УДК 621.22.01

Л.М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, НТУ "ХПИ",
О.В. КОСТЮК, канд техн. наук, НТУ "ХПИ",
Д.Н. НУРМАХМАТОВ, ГИДРООГК (г. Москва)

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО КАСКАДА ВОДОХРАНИЛИЩ

Розглядається задача моделювання каскаду водосховищ із річним потоком, що регулюється. Із застосуванням рівнянь динаміки потоків отримана математична модель складної гідротехнічної системи як об’єкта керування. Виконано аналіз особливостей задачі синтезу багатовимірного регулятора, що стабілізує рівні води у водосховищах із урахуванням запізнення в каналах об’єкта.

The problem of cascade reservoirs modelling with contolled river flow is considered. Based on fluid flow dynamics equations the complex hydroengineering system mathematical model as a controled object is obtained. The reservoir water-level stabilizing multivariable controller design problem features is investigated subject to delay in control object channels.

Постановка проблемы. Наиболее эффективное использование гидроэнергетических ресурсов достигается при строительстве на реках каскадов водохранилищ, позволяющих обеспечить возможность эффективного регулирования стока с целью стабилизации уровней воды в водохранилищах при выполнении заданных требований к выработке электроэнергии. При этом комплексное использование водных ресурсов значительно усложняет процессы взаимодействия водохранилищ каскада. Поскольку динамика изменения уровней воды в водохранилищах каскада определяется балансом притоков и расходов воды, в том числе неуправляемых стоков и утечек и управляемых водосбросов и расходов через гидротурбины, то с точки зрения теории автоматического управления рассматриваемая система представляет собой многосвязный динамический объект управления, подверженный действию внешних возмущений. Возникает необходимость в разработке методов математического моделирования сложных гидротехнических систем как основы для решения задач оперативного управления каскадом водохранилищ с целью поддержания в них оптимальных уровней воды в условиях нестационарного стока.

Анализ литературы. В работах [1 – 8] рассматриваются различные подходы к решению задач математического моделирования и управления системой "река-плотина". В работах [1, 2, 5, 6, 8] синтезированы законы робастного управления гидротехнической системой на основе частотного подхода. Различные законы управления для открытого оросительного канала предложены и исследованы в [3, 4, 7]. Для постороения модели объекта в задачах оперативного управления каскадами водохранилищ возникает необходимость в развитии и обобщении предложенных подходов применительно к задачам математического моделирования сложных гидротехнических систем.

Цель статьи состоит в разработке математической модели управляемого каскада водохранилищ для решения задачи оперативного управления уровнями воды в системе водохранилищ с использованием методов синтеза оптимальных многомерных регуляторов.

Построение модели каскада водохранилищ. Моделирование течения реки в структуре гидротехнической системы может бытть осуществлено с использованием так называемых уравнений Сент-Венана, которые представляют собой гиперболические нелинейные уравнения в частных производных относительно усредненного стока $Q(x,t)$ и уровня воды $H(x,t)$ в одномерном приближении [1]. Рассмотрим малые отклонения уровня воды $h(x,t)$ и стока $q(x,t)$ от их стационарных значений, представленных как $H_0(x)$ (м) и $Q_0(x)$ (куб.м/с), позволяющие перейти к линеаризованным уравнениям (непрерывности и момента) Сент-Венана следующего вида:

$$L_0 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2V_0 \frac{\partial q}{\partial x} - \beta_0 q + \left(C_0^2 - V_0^2\right) L_0 \frac{\partial h}{\partial x} - \gamma_0 h = 0\,, \tag{2}$$

где L_0 – ширина водной поверхности в равновесном режиме (м); V_0 – средняя скорость (м/с); $C_0 = \sqrt{\frac{gA_0}{L_0}}$ – скорость распространения волны (м/с); A_0 – средняя площадь сечения реки (кв.м); g – ускорение свободного падения; β_0, γ_0 – постоянные параметры модели (2), вычисляемые на основе физических характеристик водохранилища (угол естественного откоса грунта, периметр смоченной поверхности и т.д.).

Предполагаются заданными граничные условия притоков и расходов водохранилища $q(0,t)$ и $q(X,t)$, где X – длина водохранилища (бьефа).

Гидравлическая структура (водонапорное сооружение – плотина или шлюз) моделируется с использованием линеаризованных уравнений [2] вида

$$q(X,t) = k_1 h(X,t) + k_2 u(t), \tag{3}$$

где $q(X,t)$ – расход (сток) через гидросистему; $h(X,t)$ – глубина воды верхнего бьефа; $u(t)$ – поднятие порога (водозабора). Коэффициенты k_1, k_2 вычисляются посредством линеаризации функциональных зависимостей параметров исходных уравнений в точке, соответствующей гидравлическому стационарному режиму.

С использованием преобразования Лапласа линеаризованного уравнения течения [3], получим модель водохранилища в структуре каскада, которая может быть представлена в виде полиномиального уравнения:

$$H(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) + \widetilde{G}(s)F(s), \tag{4}$$

где оригиналы переменных модели $h(t)=L^{-1}\{H(s)\}$ – уровень воды в водохранилище; $u_1(t)=q(0,t)$, $u_2(t)=u(t)$ – соответственно управляемые приток и расход; $f(t)$ – нерегулируемые суммарные побочные притоки и расходы, а $G_1(s)$, $G_2(s)$, $\widetilde{G}(s)$ – передаточные функции объекта управления.

Как показано в [4], передаточные функции модели (4) могут быть представлены как

$$G_1(s)\approx\frac{e^{-\tau s}}{\alpha(s)},\quad G_2(s)\approx\frac{-k_2}{\alpha(s)},\quad \widetilde{G}(s)=\frac{kG_2(s)}{k_2}, \tag{5}$$

где $\tau=\int\limits_0^X\frac{dx}{V_0(x)+C_0(x)}$ – запаздывание прохождения воды вниз по течению; $\alpha(s)=A_d s+k_1$ – характеристический полином, получаемый на основе низкочастотной аппроксимации; A_d – коэффициент, связывающий скорость изменения объема водохранилища с соответствующим поднятием уровня воды ниже по течению.

Рассмотрим математическую модель каскада водохранилищ, состоящего из N резервуаров. Номер водохранилища определяется индексом i, $i=\overline{1,N}$, причем наименьшее значение индекса соответствует водохранилищу, находящемуся выше всех по течению. Структура модели каскада задается матрицей $\Delta=\left\|\delta_{ij}\right\|$, $i,j=\overline{1,N}$, причем $\delta_{ij}=1$, если соответствующее j-е водохранилище непосредственно связано с i-м водохранилищем, находящимся ниже по течению реки, и $\delta_{ij}=0$ в противоположном случае. Очевидно, что $\delta_{ij}=0$ для всех $j>i$. При этом функционирование одного водохранилища в структуре каскада с учетом (3) – (5) может быть представлено системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами:

$$\begin{gathered}A_{d_i}\dot{h}_i(t)+k_{1_i}h_i(t)=-k_{2_i}u_i(t)+\sum_{j<i}\delta_{ij}\beta_{ij}q_j\left(t-\tau_{ij}\right)+f_i(t);\\ q_i(t)=k_{1_i}h_i(t)+k_{2_i}u_i(t),\end{gathered} \tag{6}$$

где β_{ij} – коэффициенты, описывающие потери воды вдоль русла реки между соответствующими водохранилищами; τ_{ij} – запаздывание, определяемое по расстоянию между соответствующими водохранилищами каскада и средней скорости течения реки.

Модель в переменных состояния каскада водохранилищ с учетом уравнений (6) приобретает следующий вид:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+B_w w(t),\quad y(t)=Cx(t)+Du(t), \tag{7}$$

где $x(t) = (h_1(t) \quad \dots \quad h_N(t))^T$ – вектор уровней воды в системе водохранилищ; $u(t) = (u_i(t) \quad \dots \quad u_N(t))^T$ – вектор локальных управляющих воздействий; $w(t) = PQ(t) + f(t)$ – вектор обобщенных возмущающих воздействий, включающий вектора регулируемых и нерегулируемых расходов $Q(t) = (0, q_1(t-\tau_{21}), \dots, \sum_{j<N} q_j(t-\tau_{ij}))^T$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_N(t))^T$. Матрицы модели (7) A, B, B_w, C, D, P формируются на основе уравнений (6).

Анализ особенностей задачи синтеза регуляторов уровней воды в водохранилищах. Полученные уравнения модели объекта управления (7) являются основой синтеза многомерного регулятора уровней воды в водохранилищах. Особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии различных запаздываний в каналах объекта управления, следствием чего является существенное снижение качества управления и возможная потеря устойчивости замкнутой системы. Эффективным методом решения задачи управления в этом случае является использование многомерных регуляторов Смита, синтезированных на основе развития принципа внутренней модели [9], что обеспечивает возможность компенсации запаздываний и обеспечения свойств робастности.

Выводы. В работе обоснована возможность и эффективность применения методов математического моделирования для построения модели объекта управления в задаче управления каскадом водохранилищ. Дальнейшее развитие предложенной методики позволит рассмотреть комплексную задачу управления режимами работы гидротехнических комплексов с учетом гидрологических ограничений и внешних воздействий.

Список литературы: **1.** *Litrico X.* Robust flow control of single input multiple outputs regulated rivers // Journal of Irrigation and Drainage Engineering. – 2001. – Vol. 127. – № .5. – P. 281–286. **2.** *Litrico X., Georges D.* Robust continuous-time and discrete-time flow control of a dam-river system. (II) Controller design // Applied Mathematical Modelling. – 1999. – № 23. – P. 829–846. **3.** *Litrico X., Fromion V.* Infinite dimensional modelling of open-channel hydraulic systems for control purposes // In 41 Conf. On Decision and Control. – LasVegas, 2002. – P. 1681–1686. **4.** *Litrico X., Fromion V.* Advanced control politics and optimal performance for an irrigation canal // In European Control Conference. – Cambridge, UK, 2003. – P. 1681–1686. **5.** *Litrico X.* Robust IMC Flow Control of SIMO Dam-River Open-Channel Systems // IEEE Transactions On Control Systems Technology. – 2002. – Vol. 10. – № 3. – P. 432–437. **6.** *Litrico X., Georges D., Trouvat J.* Modelling and robust control of a damer system // Int. Conf. on System, Man and Cybernetics, San Diego, 1998. – P. 3862–3867. **7.** *Litrico X., Fromion V.* About optimal performance and approximation of open-channel hydraulic systems // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decisionand Control. – 2001. – Vol. 5. – P. 4511–4516. **8.** *Litrico X., Georges D.* Robust continuous-time and discrete-time flow control of a dam-river system // Modelling, Applied Mathematical Modelling. – 1999. – 23 (11). – P. 809–827. **9.** *Normey-Rico J.E., Camacho E.F.* Multivariable generalized predictive controller based on the Smith predictor // Control Theory and Applications. IEE Proceedings. – 2003. – Vol. 147.– Issue 5. – P. 538 – 546.

Поступила в редакцию 15.10.2007