

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Методичні вказівки

до практичних занять та самостійної роботи студентів технічних
спеціальностей

Конструювання деяких поверхонь та перетин їх прямою

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 7 від 02. 02. 2021 р.

Харків НТУ «ХПІ» 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи студентів технічних
спеціальностей

Конструювання деяких поверхонь та перетин їх прямою

Харків 2021

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів технічних спеціальностей Конструювання деяких поверхонь та перетин їх прямою. / Уклад. Адашевська І. Ю., Краєвська О. О. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – 48 с.

Укладачі: І. Ю. Адашевська
 О. О. Краєвська

Рецензент *О. Ю. Ніцин, док. тех. наук, проф.*

Кафедра геометричного моделювання та комп'ютерної графіки

1. Теоретичні відомості

Поверхня - це слід прямої або кривої лінії, яка рухається за певним законом у просторі.

Сукупність умов і геометричних образів, які задають поверхню, називають визначником поверхні. Зазвичай задають лінії постійних елементів і алгоритм побудови точок і ліній цієї поверхні.

Щоб задати поверхню на комплексному кресленні, досить мати проекції таких її елементів, які дозволяють побудувати проекції кожної її точки.

Поверхні розрізняються залежно від:

- способи завдання;
- способу утворення;
- можливості суміщення з площиною;
- положення в просторі.

Геометричні і алгебраїчні поверхні можуть бути задані математично (тобто за допомогою рівнянь).

Геометричні поверхні також задаються твірною і напрямною.

Твірна — лінія, яка рухаючись в просторі утворює поверхню.

Напрямна — лінія, через точки якої послідовно проходить утворює при своєму русі в просторі.

Однак для більшої наочності на кресленні показують проекції ліній контуру на відповідну площину. Ці лінії називають нарисом поверхні. Поверхні нескінченні (окрім сфери). На практиці поверхні обмежують, і такі обмежені поверхні називаються геометричними тілами - призмами, пірамідами, циліндрами, конусами, кулями і т. д.

Залежно від форми утворює поверхні класифікуються на:

- лінійчаті (поверхні з прямолінійною твірною);
- нелінійчаті (поверхні з криволінійною твірною).

За способом розгортання розрізняють:

- поверхні, що розгортаються - поверхні, які можливо поєднати з площиною без розривів;
- поверхні, що не розгортаються - поверхні, які не можна поєднати з площиною без розривів.

За способом утворення як лінійчатих, так і нелінійчатих поверхні класифікуються (рис.1) на:

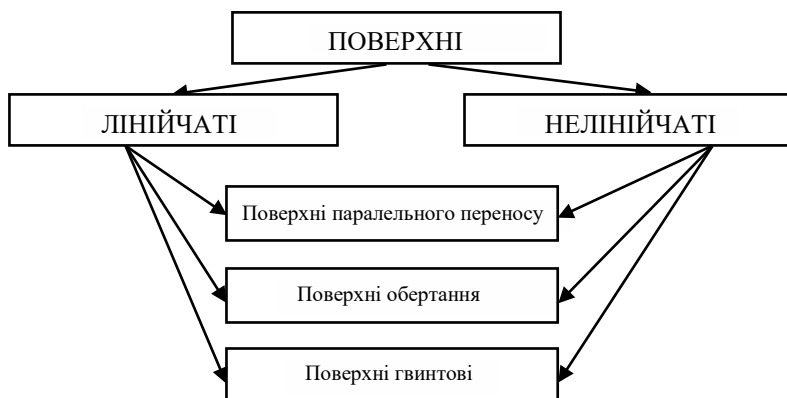


Рисунок 1

- поверхні паралельного перенесення - поверхні, утворені поступальним переміщенням твірної лінії;
- поверхні обертання - поверхні, утворені обертним рухом твірної лінії;
- гвинтові поверхні - поверхні, утворені гвинтовим рухом твірної лінії.

2. Лінійчаті поверхні, що розгортаються

2.1 Призматична поверхня — поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по направляючої ламаній лінії паралельно обраному напрямку (рис. 2).

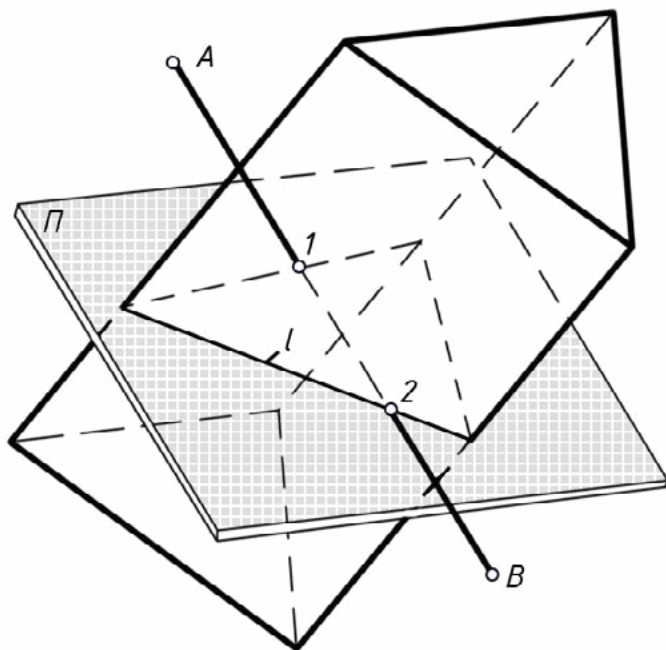


Рисунок 2

Визначник призматичної поверхні включає твірну l і напрямну m , тобто $\Phi \{l, m\}$.

2.2 Пірамідальна поверхня — поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної, яка проходить через одну нерухому точку (вершину) по направляючої ламаній лінії (рис. 3)

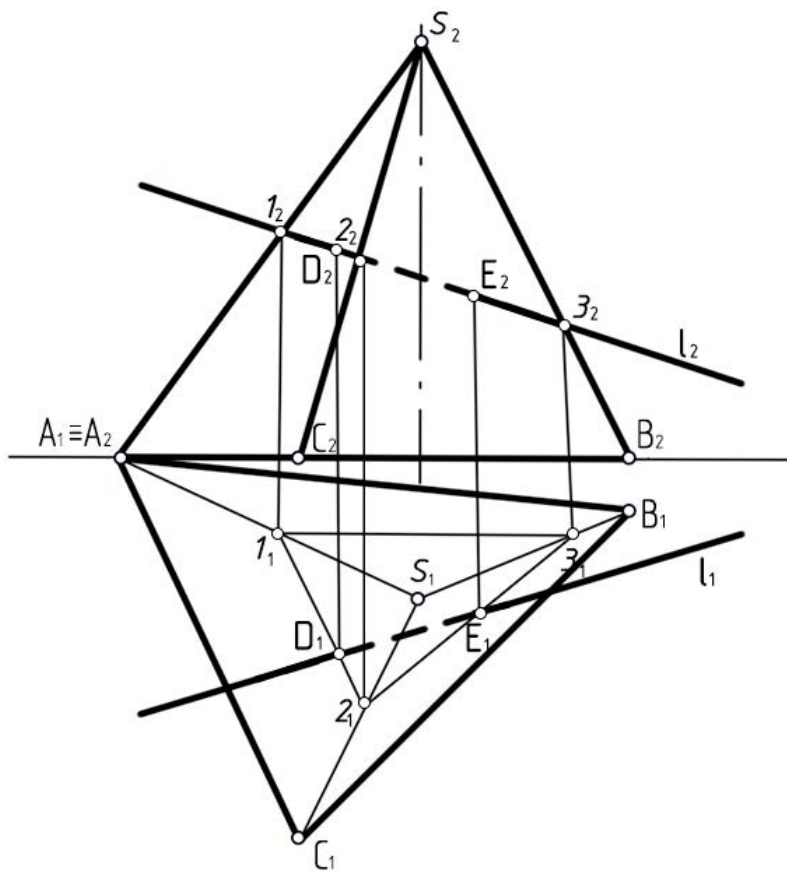


Рисунок 3

Визначник пірамідальної поверхні включає вершину – точку S , твірну l і напрямну m , тобто $\Phi \{S, l, m\}$.

2.3 Поверхні обертання, утворені обертанням твірної прямої, в залежності від її взаємного положення з віссю обертання класифікуються наступним чином:

2.3.1 якщо твірна пряма паралельна вісі обертання, то вона описує поверхню прямого кругового циліндра, званого циліндром обертання (рис.4);

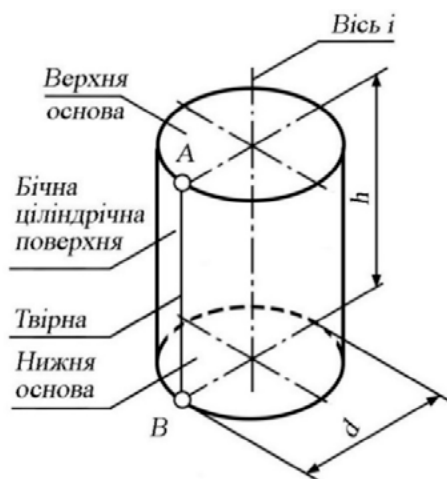


Рисунок 4

2.3.2 якщо твірна пряма перетинає вісь обертання, то вона описує поверхню прямого кругового конуса, званого конусом обертання (рис. 5);

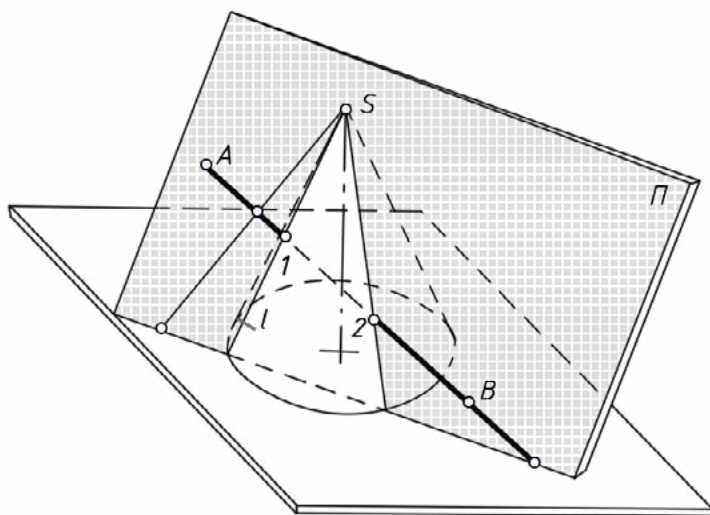


Рисунок 5

2.3.3 якщо твірна пряма схрещується з віссю обертання, то вона описує поверхню однополостного гіперboloїда (рис. 6).

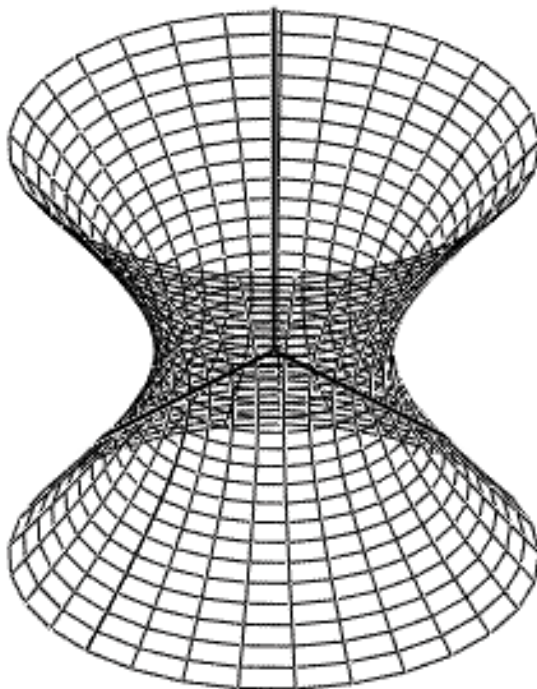


Рисунок 6

2.4 Циліндрична поверхня — поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної паралельно обраному напрямку по направляючій кривій лінії (рис. 7).

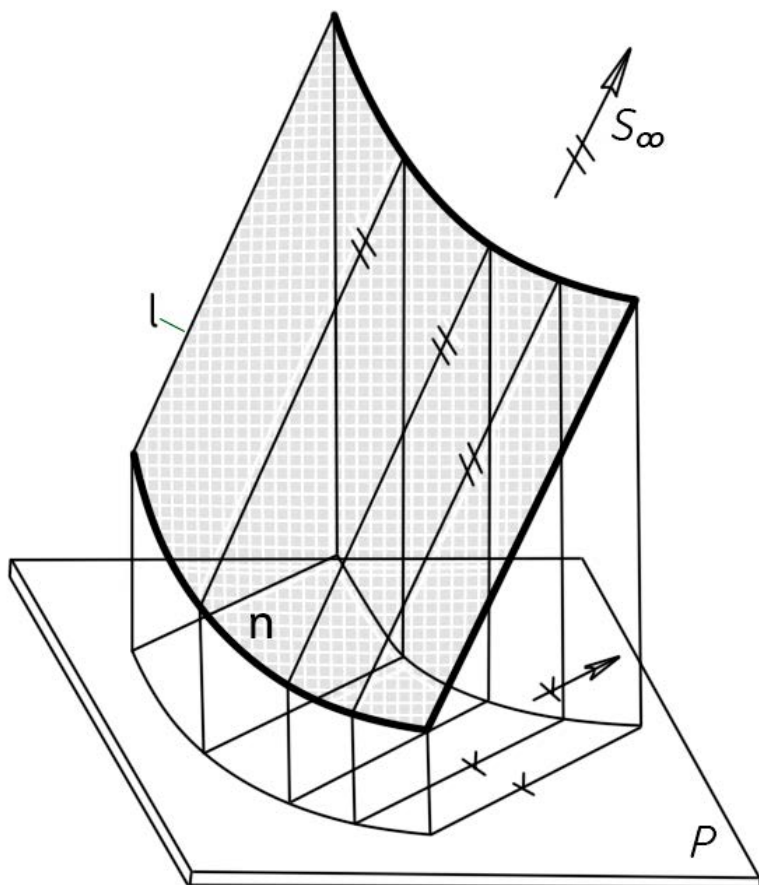


Рисунок 7

Визначник циліндричної поверхні має вигляд $\Phi \{l, m\}$.

2.5 Конічна поверхня — поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної, яка проходить через одну нерухому точку (вершину) по направляючій кривій лінії (рис. 8).

Визначник конічної поверхні включає вершину — точку S , твірну l і направляючу n , тобто $\Phi \{S, l, n\}$.

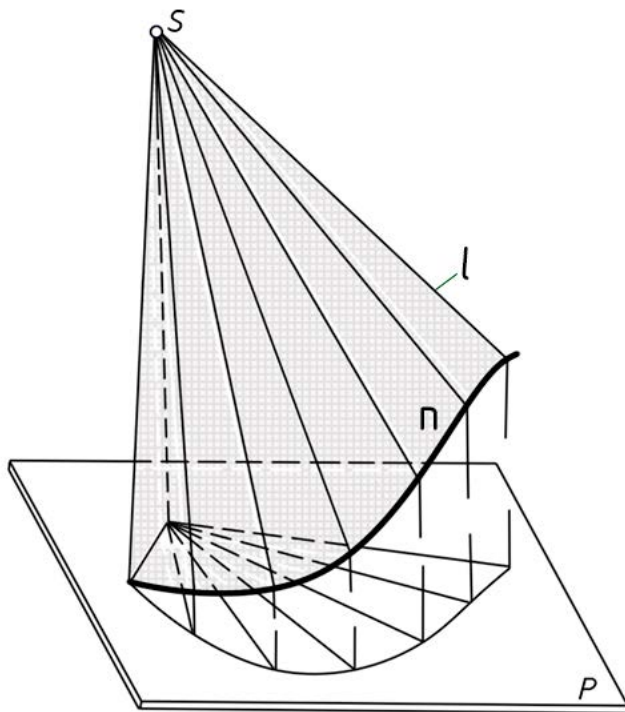


Рисунок 8

3. Лінійчаті поверхні, що не розгортаються

Лінійчаті поверхні, що не розгортаються — це лінійчаті поверхні з площиною паралелізму (поверхні Каталана).

Ці поверхні утворені шляхом переміщення прямолінійною твірною по двох напрямних лініях. При цьому твірна у всіх своїх положеннях залишається паралельною деякій площині. Поверхні з площиною паралелізму за способом утворення класифікують на три групи:

- циліндроїди;
- коноїди;
- гіперболічні параболоїди.

3.1 Поверхня циліндроїда — поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по двом криволінійним направляючим, які не лежать в одній площині і у всіх положеннях твірна зберігає паралельність деякій площині паралелізму (рис. 9).

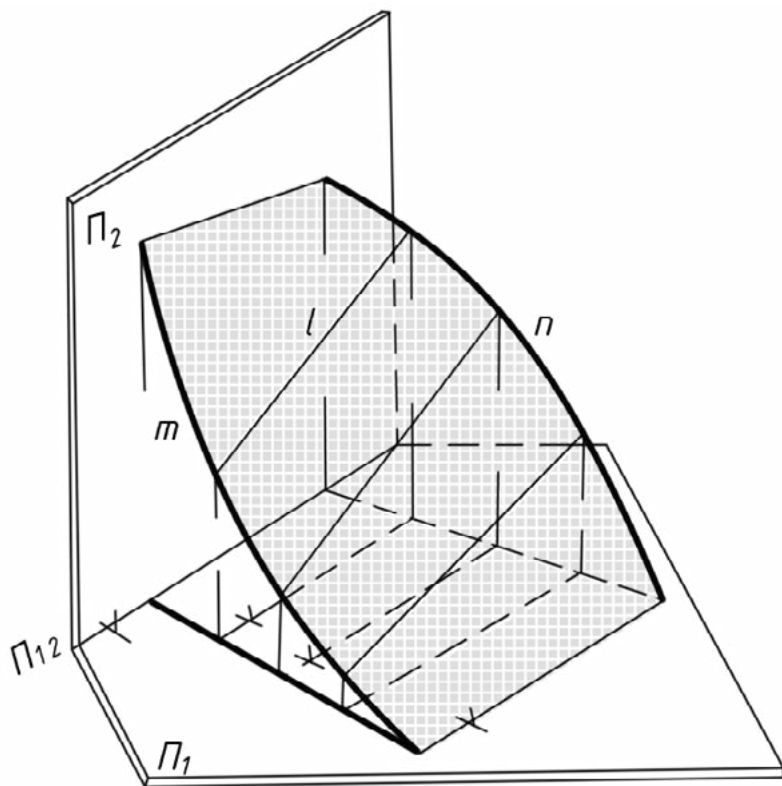


Рисунок 9

Визначники поверхні $\Phi \{l, n, m, P\}$,

де

l — твірна пряма;

n, m — криволінійні напрямні;

P — площину паралелізму.

3.2 Поверхня коноїда — поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по двом направляючим, одна з яких — крива, а інша — пряма, зберігаючи у всіх положеннях паралельність деякій площині паралелізму (рис. 10).

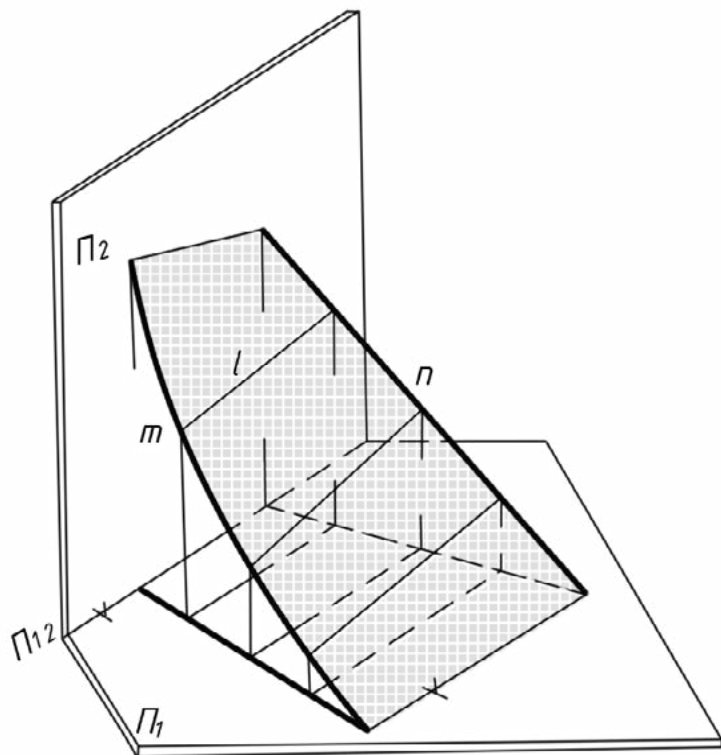


Рисунок 10

Визначники поверхні $\Phi \{l, n, m, P\}$,

де l — твірна пряма;

n — криволінійна напрямна;

m — прямолінійна напрямна;

P — площину паралелізму.

3.3 Гіперболічний параболоїд — поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по двох напрямних — мимобіжних прямих і у всіх положеннях зберігає паралельність деякій площині паралелізму (рис.11).

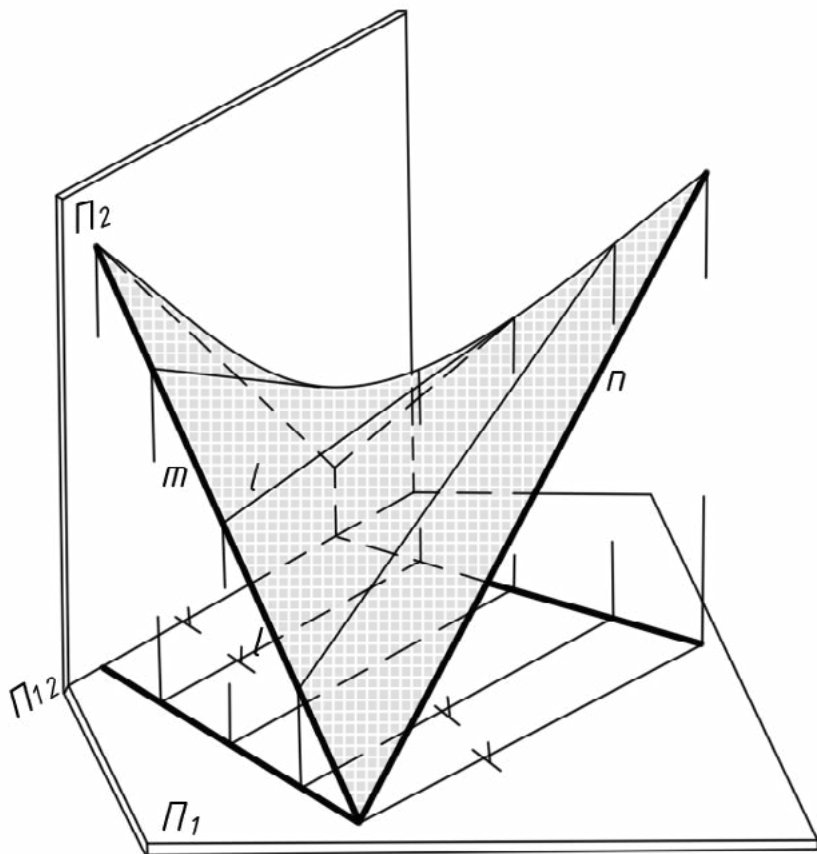


Рисунок 11

Визначники поверхні $\Phi \{l, n, t, P\}$,

де l — твірна пряма;

n — криволінійна напрямна;

t — прямолінійна напрямна;

P — площину паралелізму.

4. Нелінійчаті поверхні

Поверхні, утворені обертанням кривої лінії можна розділити на два класи:

4.1 Поверхні обертання, утворені обертанням окружності або її дуги:

4.1.1 сфера — поверхня, утворена обертанням окружності навколо вісі, що проходить через її центр (рис.12).

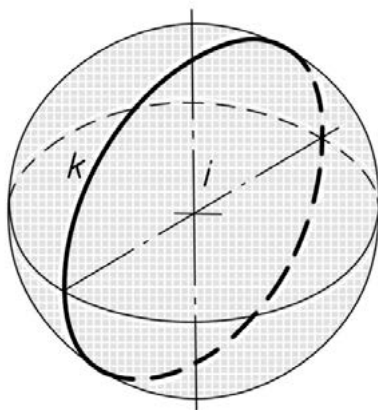


Рисунок 12

4.1.2 тор — поверхня, утворена обертанням окружності навколо вісі, що не проходить через її центр, але розташованої в її площині (рис. 13).

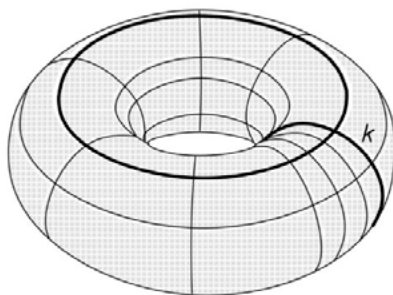


Рисунок 13

Залежно від співвідношення величини радіуса твірної кола (R) і відстані від центру кола до осі обертання (r) поверхню тора поділяють на:
Відкритий тор ($R < r$) (рис. 14);

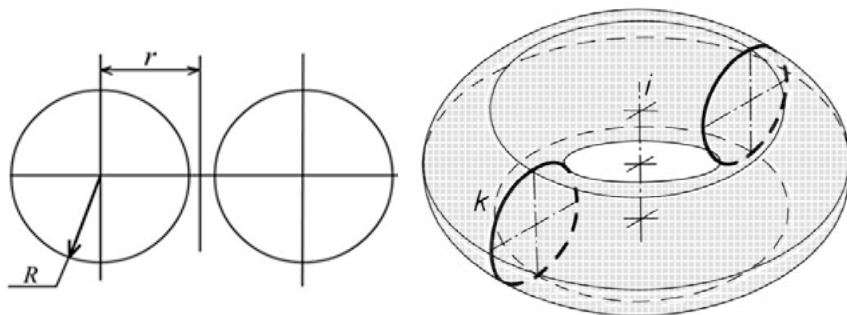


Рисунок 14

Закритий тор ($R > r$) (рис. 15).

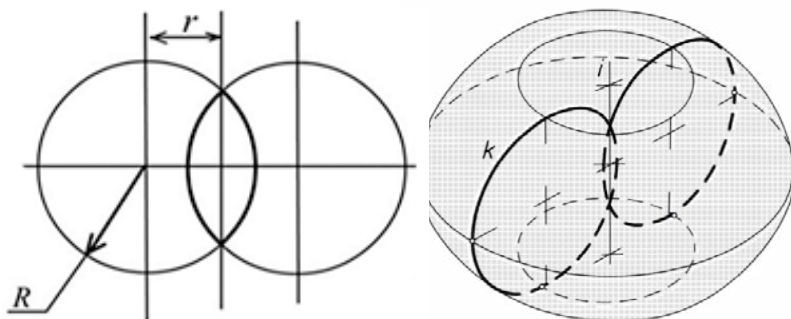


Рисунок 15

4.2 Поверхні обертання II порядку — поверхні, утворені обертанням кривих II порядку навколо їх вісей (еліпсоїд обертання, гіперboloїд обертання, параболоїд обертання і т. д.)

Еліпсоїд обертання — поверхня, утворена обертанням еліпса навколо своєї вісі (рис. 16).

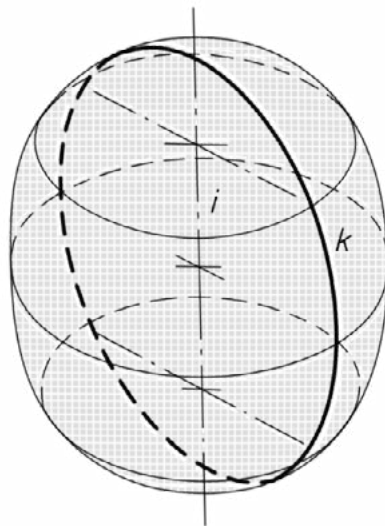


Рисунок 16

Визначники поверхні $\Phi \{l, i\}$,
де l — твірна — еліпс;
 i — вісь обертання.

5. Гвинтові поверхні

Гвинтові поверхні — поверхні, утворені гвинтовим рухом твірної лінії. Так як точки твірної при її гвинтовому русі описують співвісні циліндричні гвинтові лінії, то гвинтова поверхня може бути утворена рухом твірної по співвісним циліндричним гвинтовим лініям, які будуть її напрямними.

Гвинтова лінія постійного кроку, побудована на поверхні прямого кругового циліндра, називається Геліса. Тому лінійчаті гвинтові поверхні, напрямна яких — Геліса, називають гелікоїдом.

5.1 Гелікоїд прямий — поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної по двох напрямних: одна — циліндрична гвинтова лінія, інша — її вісь (рис.17)

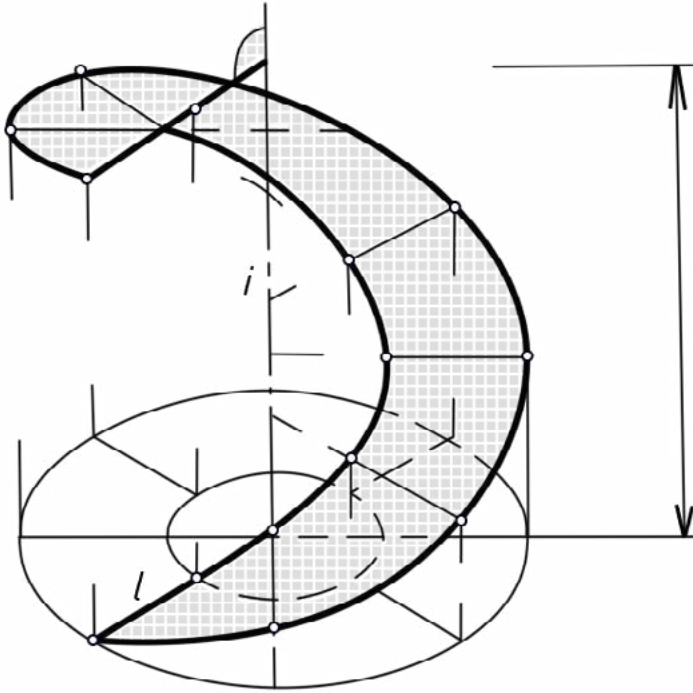


Рисунок 17

Побудова прямого гелікоїда починається з побудови гвинтової лінії.

У всіх своїх положеннях твірна паралельна площині паралелізму, яка завжди перпендикулярна вісі гвинтової лінії.

5.2 Гелікоїд косий (похилий або архимедів) — поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної по двом напрямним: одна — циліндрична гвинтова лінія, інша — її вісь. У всіх положеннях твірна паралельна твірним конуса обертання, що має загальну вісь із гвинтовою лінією (рис. 18).

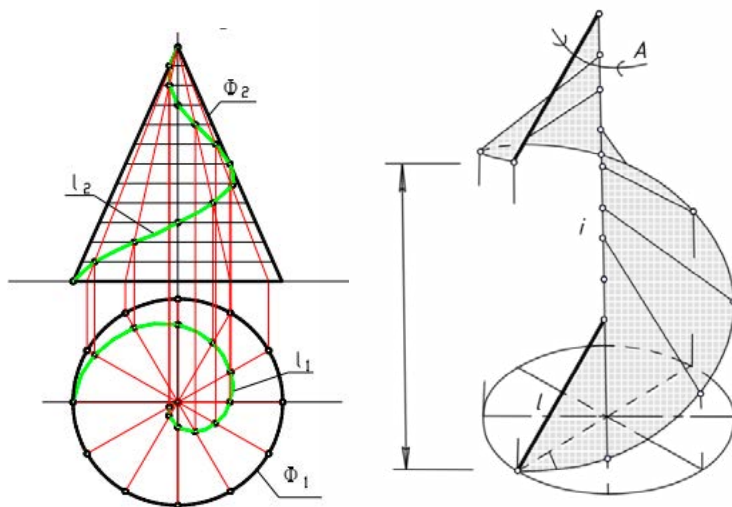


Рисунок 18

6. Вимоги щодо оформлення та зміст завдання

1. Завдання виконується на аркуші креслярського паперу формату А4 (297 x 420) в масштабі 1:1. Рамку формату та напис наносити відповідно вимогам ГОСТ 2.303 - 68.

2. Товщина і тип ліній кресленика повинні відповідати ГОСТ 2.303-68: рамку, проекції прямих, контурні лінії на зображеннях поверхонь виконувати суцільною лінією товщиною 0,8–1,0 мм, лінії проекційного зв'язку, осі проекцій — 0,3 мм, лінії невидимого контуру — штриховою лінією товщиною 0,5 мм, Фіксовані точки на кресленику обводити кружечками діаметром 1,5–2 мм.

3. Графічні побудови, що відносяться до рішення задач, слід виконувати спочатку тонкими лініями, а потім обводити. Допоміжні побудови залишати на кресленику до перевірки викладачем вірності рішення задачі.

4. Усі лінійні розміри та координати точок в умовах задач задані в міліметрах.

5. Написи та позначення виконувати шрифтами розміром 3,5 та 5

згідно з ГОСТ 2.304 – 81.

Зміст завдання

- За заданими визначниками з використанням теоретичного матеріалу побудувати поверхню (згідно з варіантом).
- Визначити точки перетину побудованої поверхні з прямою, що задається відрізком AB .
- Визначити видимість прямої на кресленнику.

7. Перетин прямої з поверхнею

Для побудови точок перетину прямої з поверхнею у загальному випадку необхідно провести через пряму допоміжну площину і побудувати лінію перерізу. Точки, в яких задана пряма перетинається з лінією перерізу, будуть шуканими точками перетину з поверхнею. Далі наведено деякі приклади вирішення задач.

7.1 Перетин прямої з призматичною та пірамідальною поверхнями

Алгоритм розв'язання задачі:

7.1.1 За заданими визначниками $\Phi \{l, n\}$ побудувати поверхню

7.1.2 Побудова точок перетину прямої з призматичною або пірамідальною поверхнею.

- Через заданий відрізок прямої AB проведемо фронтально-проектуючу (рис. 19) площину P ($P_2 = f_2 = A_2B_2$).
- Характерними точками — є точки перетину проектуючої площини з ребрами поверхні. Ця площина перетинає поверхню по багатокутнику, вершини цього багатокутника — точки D, E, G, H, F . Шуканими точками перетину прямої з поверхнею є точки K та L (спочатку знаходимо горизонтальні проекції точок перетину K_l, L_l — як точки перетину горизонтальної проекції прямої AB з горизонтальною проекцією лінії перетину з допоміжною площиною — K_2L_2 , а далі за законом проєкційного зв'язку — фронтальні проекції K_2, L_2).

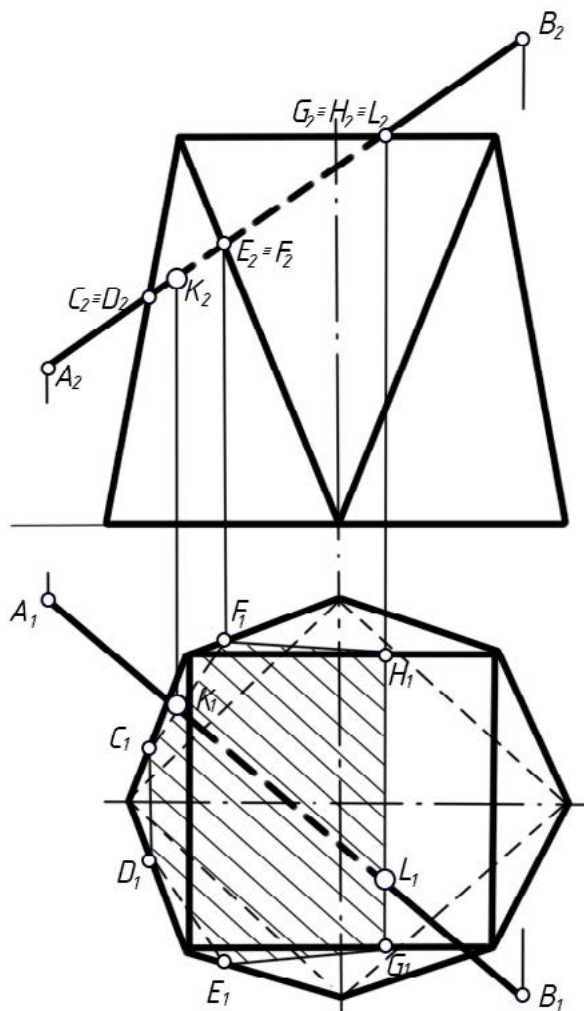


Рисунок 19

7.1.3 Визначення видимості на кресленіку.

Для визначення видимості на кресленіку слід користуватися конкуруючими точками. Конкуруючі точки — це точки, які належать одному проєктуючому променю, але різним прямим. Видимість треба визначати відносно площин проєкцій.

7.2 Перетин прямої з поверхнею циліндроїда

Алгоритм розв'язання задачі:

7.2.1 За заданими визначниками $\Phi \{l, n, m, P\}$ побудувати поверхню циліндроїда (рис.20).

- Задана площина паралелізму P — горизонтально-проектуюча. Тому для побудови каркасу поверхні проводимо горизонтальні проекції твірних l паралельно горизонтальному сліду h_1 площини — P .

- Горизонтальна проекція l_1 цієї твірної перетинає проекції напрямних n_1 та m_1 в точках 1_1 та $1'_1$. За законом проекційного зв'язку на фронтальних проекціях напрямних n_2 та m_2 знайдемо точки 1_2 та $1'_2$, які поєднаємо між собою — одержимо фронтальну проекцію l_2 твірної.

- Далі аналогічно проводимо горизонтальні проекції (2_1 - $2'_1$; 3_1 - $3'_1$...) інших твірних циліндроїда.

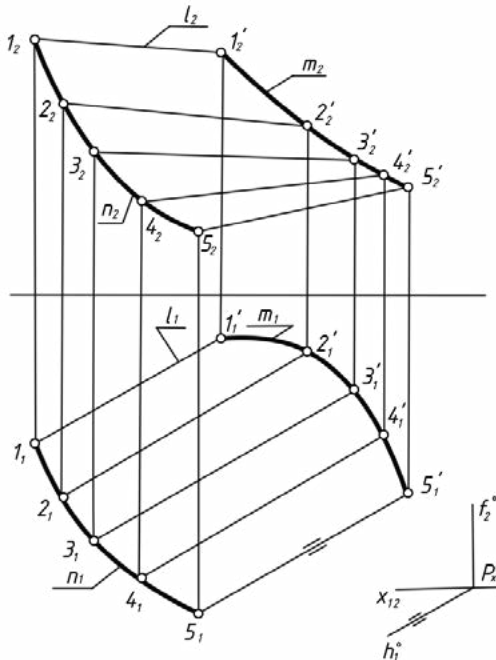


Рисунок 20

7.2.2 Побудова точок перетину прямої з поверхнею циліндроїда (рис.21).

- Заточуємо відрізок AB у горизонтально-проектуючу площину Q ($h^0_1 \equiv A_1B_1$) та побудуємо лінію перетину цієї площини з поверхнею циліндроїда. Для цього визначаємо горизонтальні проекції точок перетину $C_1, D_1, \dots, G_1$ твірних поверхні допоміжною площиною Q .
- За законом проєкційного зв'язку знаходимо фронтальні проєкції $C_2, D_2, \dots, F_2$ шуканих точок, які з'єднуємо плавною лінією.
- Точка перетину K_2 фронтальної проєкції відрізка AB з побудованою лінією перетину — фронтальна проєкція шуканої проєкції точки перетину прямої AB з поверхнею циліндроїда. Горизонтальну проєкцію K_1 - цієї точки знайдемо за проєкційним зв'язком.

7.2.3 Визначення видимості на кресленику.

Для визначення видимості на кресленику слід користуватися конкуруючими точками. Конкуруючі точки — це точки, які належать одному проєктуючому променю, але різним прямим. Видимість треба визначати відносно площин проєкцій.

Так, наприклад, для визначення видимості прямої на поверхні циліндроїда (рис. 21) відносно горизонтальної площини проєкцій вибрані дві конкуруючі точки S та C , горизонтальні проєкції яких збігаються ($C_1 \equiv S_1$). Точка S належить прямій, а точка C — твірній циліндроїда. Порівнявши їхні координати Z , помічаємо, що $Z_S > Z_C$, тобто на площині Π_1 точка S — видима. Точка S належить до прямої AB , тобто пряма AB проходить над поверхнею аж до точки K — перетину її з циліндроїдом. У точці перетину видимість змінюється на протилежну.

Для визначення видимості відносно фронтальної площини проєкцій застосовані конкуруючі точки R та T , ($R_2 \equiv T_2$). Порівнявши координату Y бачимо, що $Y_R > Y_T$ тобто точка R , що належить твірній циліндроїда, видима. Отже у цій частині пряма AB (до точки K_2) невидима, тобто вона розташована за поверхнею. У точці перетину видимість змінюється на протилежну.

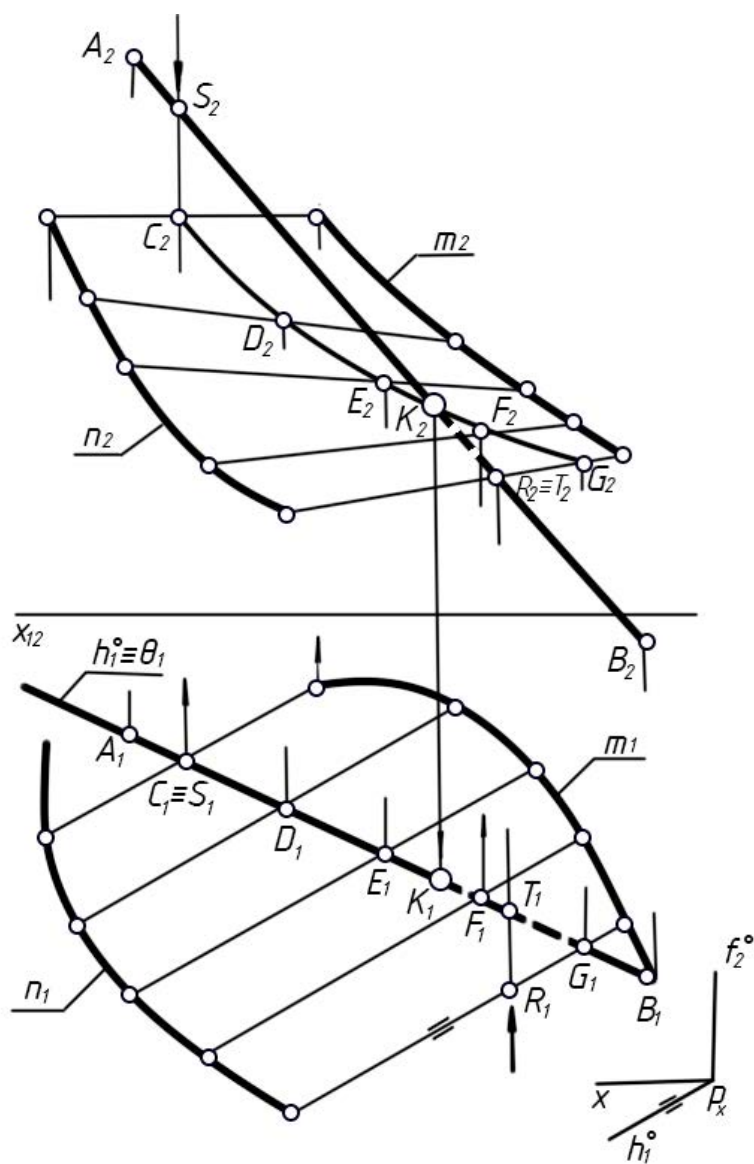


Рисунок 21

7.3 Перетин прямої з поверхнею коноїда

Алгоритм розв'язання задачі:

7.3.1 За заданими визначниками $\Phi \{l, n, m, P\}$ побудувати поверхню коноїда (рис. 22).

- В даному прикладі площина паралелізму P — фронтально-проектуюча. Тому фронтальні проекції усіх твірних проводимо паралельно до фронтального сліду площини P .

- Визначаємо фронтальні проекції точок перетину твірної l з напрямними n та m ($1_2 - 1'_2, 2_2 - 2'_2, \dots$).

- За проекційним зв'язком на горизонтальних проекціях n_1 та m_1 у знаходимо точки ($1_1 - 1'_1, 2_1 - 2'_1, \dots$), через які пройдуть горизонтальні проекції твірної l поверхні.

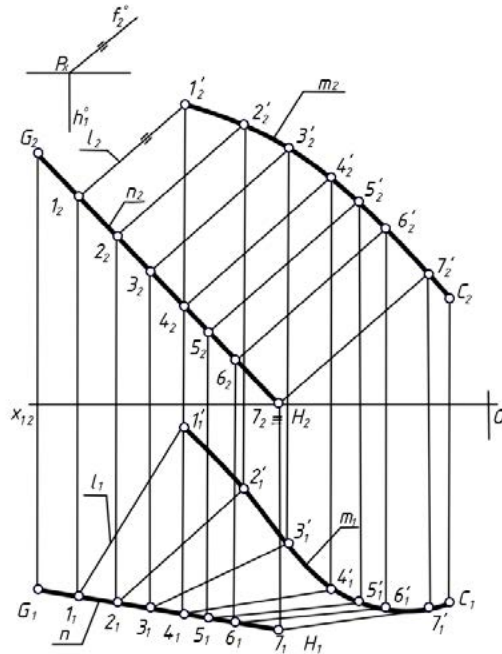


Рисунок 22

- Побудову каркасу поверхні починаємо з фронтальної проекції (проводимо фронтальні проекції твірних паралельно до вісі X), визначаємо фронтальні проекції точок перетину цих твірних з напрямними ($1_2 - 1'_2, 2_2 - 2'_2, \dots$).

The diagram illustrates the method of the equivalent system of forces for a curved beam. It is divided into two main parts: the top part shows the original curved beam segment, and the bottom part shows the equivalent system of forces.

Top Part (Original Beam):

- A curved beam segment is shown, starting from point F_2 and ending at point C_2 .
- Points along the beam are labeled $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$.
- Horizontal distances from the vertical line through F_2 to the vertical lines through the points are labeled l_2 (for 1_2) and l_1 (for 1_1).
- Vertical distances from the horizontal line through C_2 to the points are labeled m_2 (for 2_2) and n_2 (for 5_2).
- The beam is divided into segments by points $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$.
- The equivalent force $G_2 \equiv 1'_2$ is shown acting at point 1_2 .
- The equivalent force H_2 is shown acting at point 5_2 .
- The equivalent force C_2 is shown acting at point C_2 .

Bottom Part (Equivalent System):

- A curved beam segment is shown, starting from point F_1 and ending at point C_1 .
- Points along the beam are labeled $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$.
- Horizontal distances from the vertical line through F_1 to the vertical lines through the points are labeled l_1 (for 1_1) and l_2 (for 2_2).
- Vertical distances from the horizontal line through C_1 to the points are labeled m_1 (for 2_1) and n_1 (for 5_1).
- The beam is divided into segments by points $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$.
- The equivalent force $G_1 \equiv H_1 \equiv m_1 \equiv 1'_1 \dots \equiv 5'_1$ is shown acting at point 1_1 .
- The equivalent force C_1 is shown acting at point C_1 .

26

7.3.2 Побудова точок перетину прямої з поверхнею коноїда.

Алгоритм розв'язання задачі такий самий, як у випадку циліндроїда.

7.3.3 Визначити видимість на кресленнику.

Для визначення видимості на кресленнику слід користуватися конкуруючими точками. Конкуруючі точки — це точки, які належать одному проектуючому променю, але різним прямим. Видимість треба визначати відносно площин проекцій.

7.4 Перетин прямої з поверхнею косої площини.

Алгоритм розв'язання задачі:

7.4.1 За заданими визначниками $\Phi \{l, n, m, P\}$ побудувати поверхню косої площини.

Коса площина (гіперболічний параболоїд) (рис. 24) утворюється переміщенням прямолінійної твірної l по двох мимобіжних прямих n та m паралельно до площини паралелізму.

- У наведеному випадку площиною паралелізму є фронтальна площина проекцій Π_2 (тому горизонтальні проекції твірних $l_1 \dots$ проводимо паралельно до вісі X).

- Визначимо точки перетину цих твірних $l_2, 2_2, 3_2 \dots$ із горизонтальними проекціями напрямних та за проекційним зв'язком знайдемо їхні фронтальні проекції $1_2, 2_2, 2_2 \dots$ через які проведемо фронтальні проекції твірних l_2 .

- Крива, що огинає фронтальні проекції твірної є параболою, тому цю поверхню також називають параболоїдом.

7.4.2 Побудова точок перетину прямої з поверхнею косої площини (рис. 25).

Алгоритм розв'язання задачі такий самий, як у випадку циліндроїда.

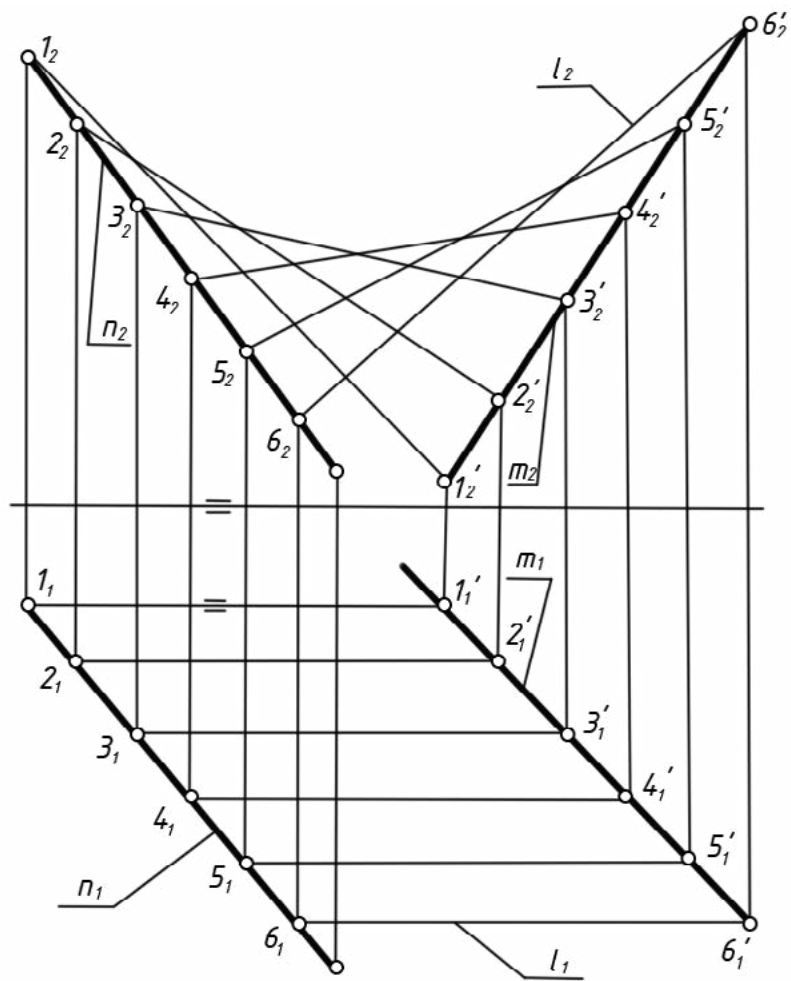


Рисунок 24

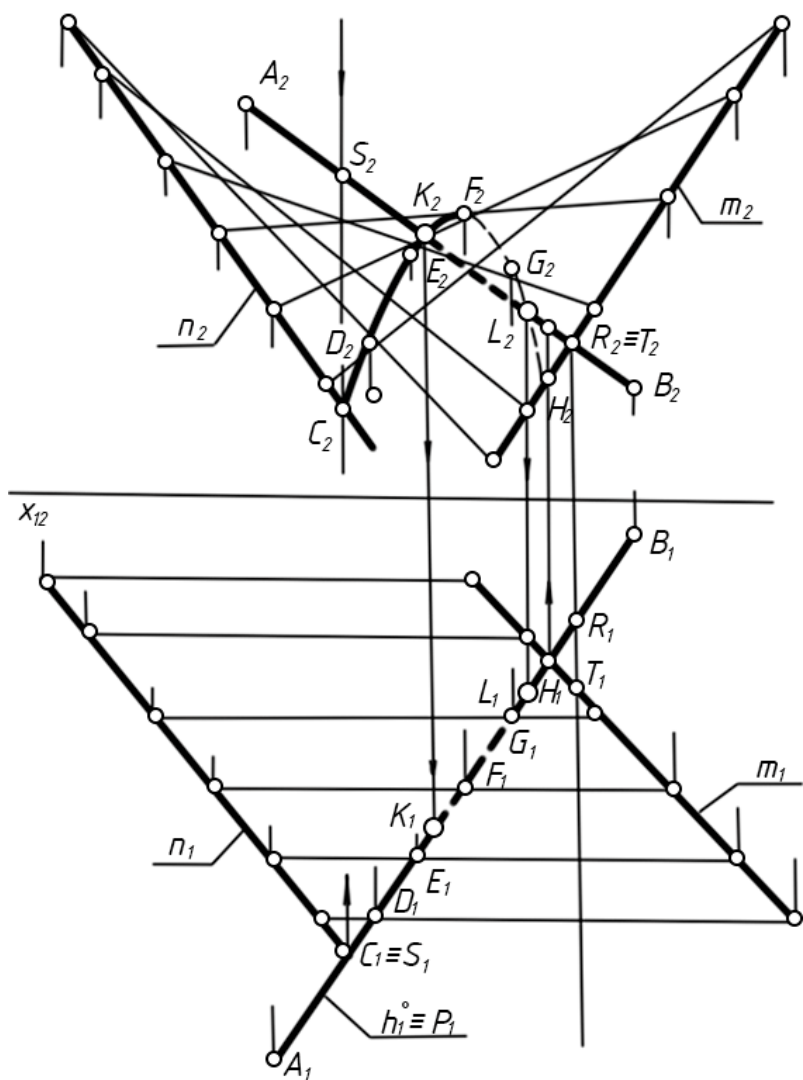


Рисунок 25

7.4.3 Визначити видимість на кресленику.

Для визначення видимості на кресленику слід користуватися конкуруючими точками. Конкуруючі точки — це точки, які належать одному проєктуючому променю, але різним прямим. Видимість треба визначати відносно площин проєкцій.

7.5 Перетин прямої з гвинтовою поверхнею

7.5.1 Перетин прямої з поверхнею прямого гелікоїда.

Алгоритм розв'язання задачі:

7.5.1.1 За заданими визначниками $\Phi \{l, n, m, P\}$ побудувати поверхню прямого гелікоїда.

Прямий гелікоїд, або гвинтовий коноїд (рис.26) утворюється рухом твірної — відрізка прямої — по двох напрямних, одна з яких є гвинтова лінія — m , а друга — її вісь — n , за умови обертання твірної навколо напрямної осі з одночасним ковзанням кінців твірної по обох напрямних.

- Побудувати циліндричну гвинтову лінію за заданими параметрами (d та t). Провести твірні гелікоїда паралельно горизонтальній площині проєкцій Π_1 (спочатку проводимо фронтальні проєкції твірних паралельно до вісі X , які перетинають гвинтову лінію та її вісь відповідно у точках $0_2, 1_2, 2_2 \dots$ та $0'_2, 1'_2, 2'_2 \dots$)

- За законами проєкційного зв'язку знайдемо горизонтальні проєкції вказаних точок, через які пройдуть горизонтальні проєкції твірних.

Цю поверхню можна віднести до класу гвинтових поверхонь, тому що одна з напрямних являє собою гвинтову лінію.

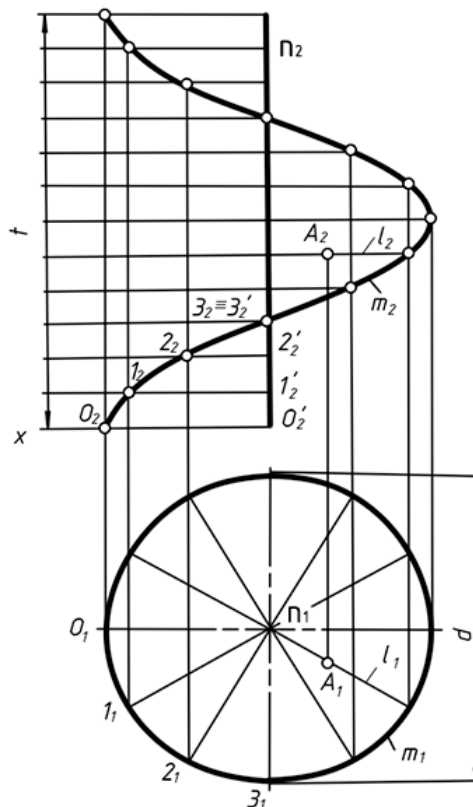


Рисунок 26

7.5.1.2 Побудова точок перетину прямої з поверхнею прямого гелікоїда

- Через пряму AB проводимо допоміжну січну фронтально-проектуючу площину $P(P_2 = f_2 = A_2B_2)$.
- Знаходимо (рис. 27) горизонтальні проекції $1_1, 1_4, \dots, 2_1$ точок перетину площини з твірними, з'єднуємо ці точки плавною лінією. Точки перетину горизонтальної проекції прямої AB ($A_1 B_1$) з лінією перетину допоміжної площини з поверхнею — точки K_1, L_1, C_1 — горизонтальні проекції точок перетину прямої з поверхнею.
- Фронтальні проекції K_2, L_2, C_2 цих точок знаходимо за проекційним зв'язком.

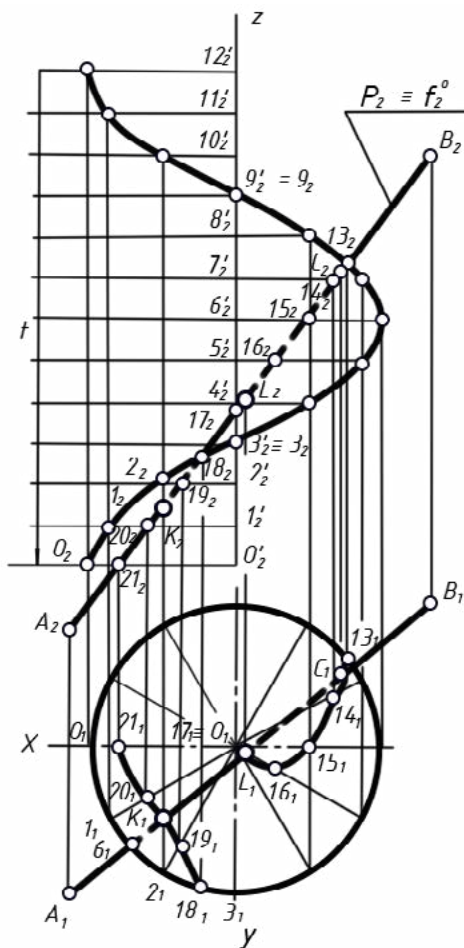


Рисунок 27

7.5.1.3 Визначити видимість на кресленику.

Для визначення видимості на кресленику слід користуватися конкуруючими точками. Конкуруючі точки — це точки, які належать одному проєктуючому променю, але різним прямим. Видимість треба визначати відносно площин проєкцій.

7.5.2 Перетин прямої з поверхнею косої гелікоїди.

Алгоритм розв'язання задачі:

7.5.2.1 За заданими визначниками $\Phi \{l, n, t, P\}$ побудувати поверхню косої гелікоїди (рис.28).

- побудувати циліндричну гвинтову лінію (відомий діаметр і крок гвинтової лінії);
- побудувати направляючий конус гелікоїди (відомий кут направляючого конуса — бета);
- побудувати фронтальні положення твірної гелікоїди паралельно з положеннями твірної направляючого конуса.

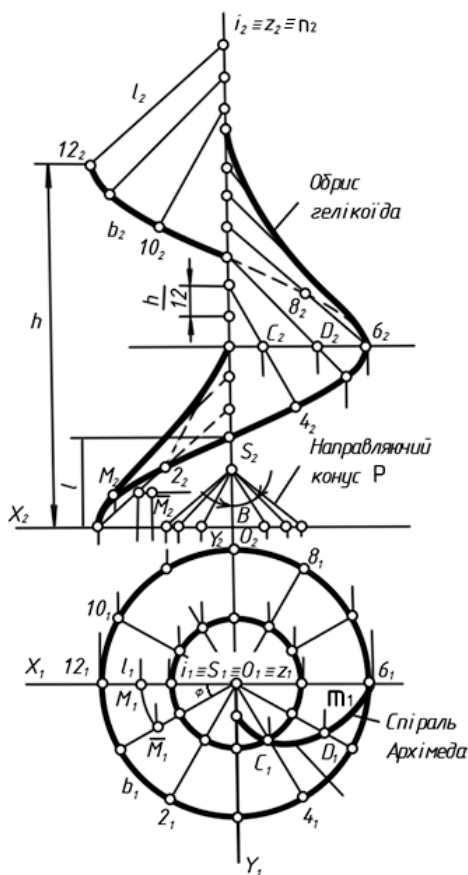


Рисунок 28

7.5.2.2 Побудова точок перетину прямої з поверхнею косого гелікоїда.

Алгоритм розв'язання задачі такий самий, як у випадку прямого гелікоїда.

7.5.2.3 Визначити видимість на кресленику.

8. Перетин прямої з нерозгортними криволінійчатыми поверхнями

У цьому розділі розглянемо перетин прямої з поверхнями сфери, еліпсоїда обертання, тора. Щоб спростити графічні операції, бажано застосувати перетворення кресленика таким чином, щоб допоміжні криві являлися, де це можливо, окружністю.

8.1 Перетин прямої з поверхнею сфери

Якщо через пряму AB провести допоміжну горизонтально-проектуючу площину Σ ($\Sigma_1 \equiv A_1B_1$), то вона перетне задану поверхню по окружності. Але на фронтальну площину проєкцій Π_2 ця окружність проєктується у вигляді еліпса. Доцільно застосовувати перетворення кресленика, щоб лінія перетину сфери площиною Σ проєктувалась в дійсну величину, тобто в окружність. Для цього застосуємо один з двох методів перетворення.

8.1.1 Застосування методу заміни площин проєкцій

- Замінено площину проєкцій Π_2 на Π_4 (рис. 29), яка буде паралельною до площини Σ (нова вісь проєкцій X_{14}).

- На цю площину проєкцій окружність, яка має радіус r , проєктується в дійсну величину. Щоб знайти новий центр окружності O_4 через точку O_1 проводимо перпендикуляр до вісі X_{14} , на якому відкладаємо координату центра Z_0 , яку заміряємо у старій системі Π_2 / Π_1 .

- Знаходимо нові фронтальні проєкції A_4 та B_4 кінців відрізка AB , користуючись координатами Z цих точок, заміряних на площині проєкцій Π_2 .

- Точки перетину відрізка A_4B_4 з окружністю радіуса r визначають K_4 та L_4 — нові фронтальні проекції точок перетину. За проекційним зв'язком з K_4 та L_4 знайдемо горизонтальні проекції K_1 та L_1 шуканих точок, а далі їхні фронтальні проекції K_2 та L_2 .

- Визначити видимість на кресленнику.

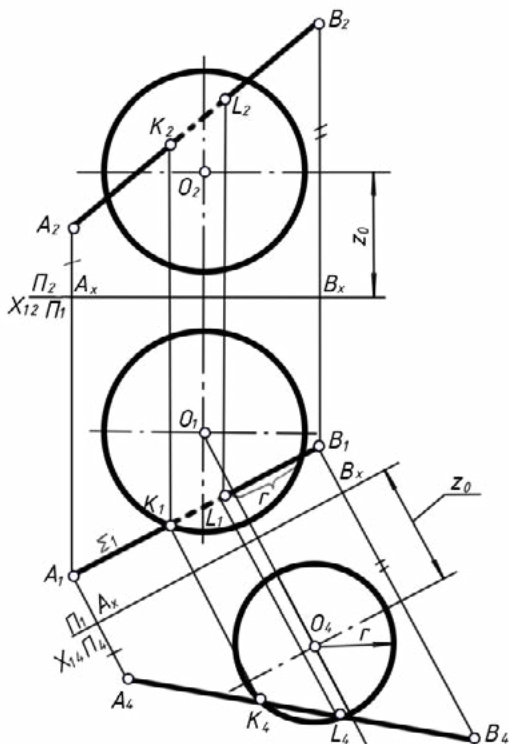


Рисунок 29

8.1.2 Застосування метода обертання навколо проєктуючої прямої

- Через пряму AB проводимо горизонтально — проєктуючу площину Σ (Σ_1, A_1B_1) та обернемо її навколо вісі, що перпендикулярна до площини проєкцій Π_1 та проходить через центр сфери ($i_1 \equiv O_1$) так, щоб площина Σ стала паралельна до Π_2 (рис. 30) ($\Sigma_1 \parallel X_{12}$).

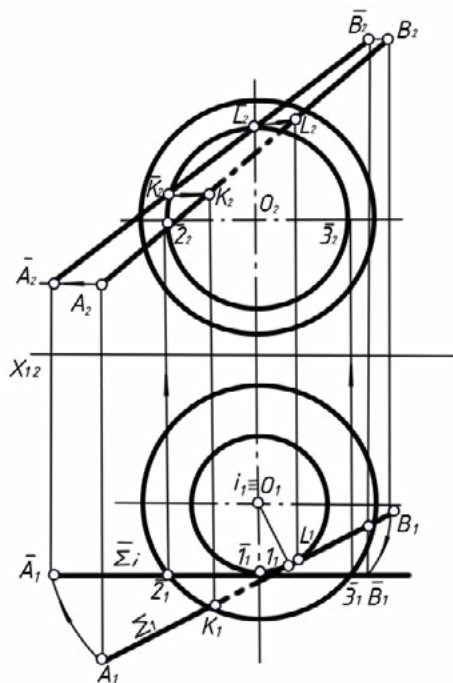


Рисунок 30

• Отримана лінія перетину — окружність, що має діаметр 2_13_1 , проектується на площину Π_2 в дійсну величину.

• Горизонтальні проекції точок A_1 та B_1 обертаються разом з площиною навколо центра $i_1 \equiv O_1$ та після обертання займають положення A_1 та B_1 .

• Їхні фронтальні проекції в цей час будуть переміщуватися по прямих, що паралельні до вісі X_{12} , до відновлення проекційного зв'язку з A_1 та B_1 , тобто займають положення A_2 та B_2 .

• Точки перетину відрізка $A_2 B_2$ з окружністю, що має діаметр $2_2 - 3_2$, будуть точками перетину K_2 та L_2 прямої AB у новому положенні.

• Зворотним проектуванням знайдено точки K_2 та L_2 , а також їхні горизонтальні проекції K_1 та L_1 точок перетину прямої AB зі сферою.

• Визначити видимість на кресленнику.

8.2 Перетин прямої з еліпсоїдом обертання

Алгоритм розв'язання задачі:

- Через пряму AB проводимо горизонтально-проектуючу площину Σ (рис. 31). Задана пряма і допоміжна площина проходить через центр і вісь еліпсоїда і перетинає його по такому ж еліпсу, як і контур поверхні, зображений на фронтальній проекції.

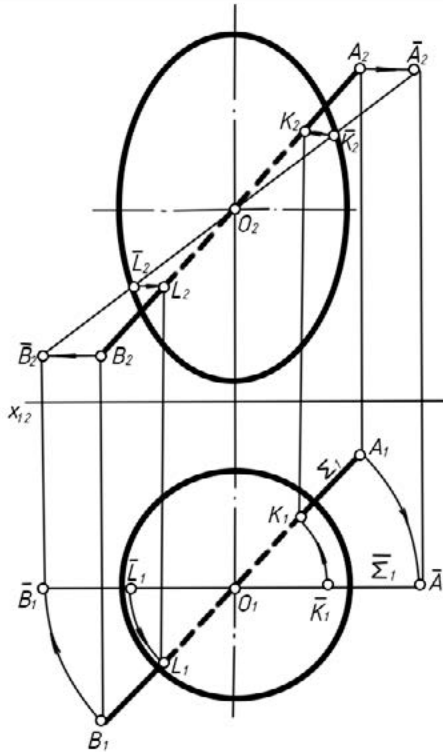


Рисунок 31

- Далі, як у випадку сфери, застосуємо перетворення (обертання навколо проектуючої прямої або заміни площин проєкцій), що значно спростить розв'язання задачі. У наведеному прикладі (рис.31) площину Σ обертаємо навколо вертикальної вісі еліпсоїда, щоб вона стала паралельно до площині проєкцій Π_2 .

- Її горизонтальна проекція Σ_1 стане паралельною до вісі X_{12} , а відрізок A_1B_1 також розташується паралельно до вісі X_{12} , тобто перейде у відрізок A_1B_1 .

- Фронтальні проекції точок A_2 та B_2 будуть переміщуватися паралельно до вісі X_{12} до поновлення проекційного зв'язку з точками A_1 та B_1 і тепер будуть позначатися, як A_2 та B_2 .

- Точки перетину K_2 та L_2 відрізка прямої A_2B_2 з фронтальним контуром еліпсоїда будуть перетвореними точками перетину.

- Зворотним проектуванням знайдено дійсне положення K_2, L_2 та K_1, L_1 – проекції точок перетину.

- Визначити видимість на кресленнику.

Порядок графічних операцій позначено на кресленнику стрілками.

8.3 Перетин прямої з тором

Алгоритм розв'язання задачі:

- Фронтально — проектуюча площина, що проведена через пряму AB (пряма AB у даному випадку перетинає вісь тора), перетинає тор по окружності радіуса r , тобто по твірній (рис. 32). Лінія перетину тора з проектуючою площиною буде проектуватися у вигляді еліпса. Щоб спростити графічні операції, як у попередньому прикладі, застосуємо метод обертання навколо вісі тора (у цьому випадку вісь тора фронтально-проекуюча).

- Обертання проводимо до суміщення допоміжної площини з горизонтальною площиною проекцій. У цьому разі після обертання фронтальної проекції площини Σ_2 та відрізка прямої A_2B_2 збіжаться з віссю X_{12} . Їхнє позначення стане $\Sigma_2 \equiv X_{12}$ та $A_2 B_2 \equiv X_{12}$.

- Горизонтальні проекції точок A_1 та B_1 відповідно перейдуть у точки A_1 та B_1 .

- Окружність, по якій площина перетинає тор, суміститься з лівим твірним колом тора, у перетині з яким прямої A_1B_1 знайдуться точки K_1 та L_1 .

- Зворотним проектуванням (на кресленнику це позначено стрілками) знайдемо горизонтальні K_1 та L_1 , а потім і фронтальні K_2 та L_2 проекції точок перетину прямої з поверхнею тора.

- Визначити видимість на кресленнику.

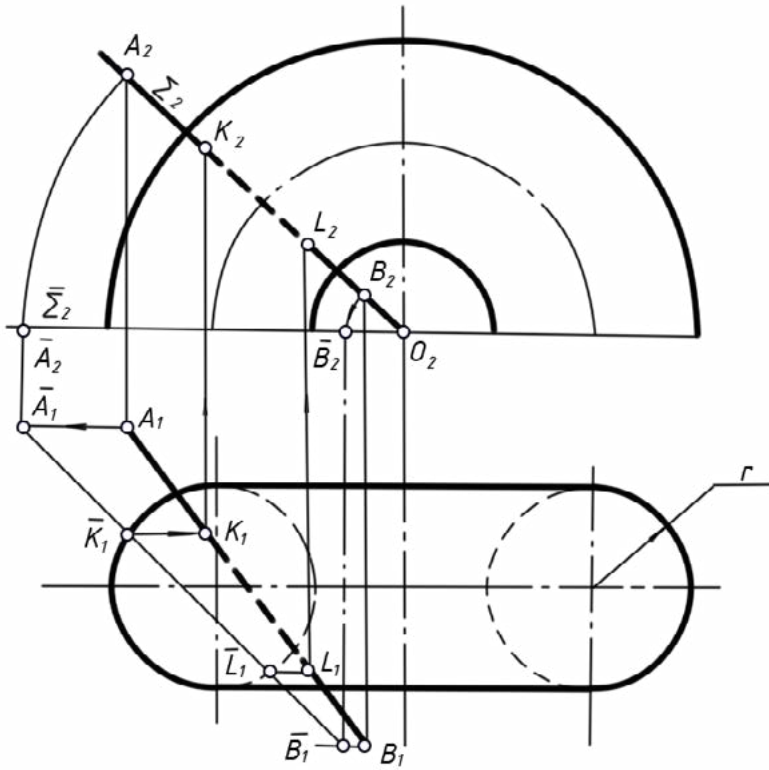


Рисунок 32

9. Деякі особливі випадки побудови перетину прямої з розгорненими лінійчатими поверхнями

У цих випадках треба застосувати таку допоміжну січну площину, яку б перетинали задані поверхні по простих лініях – по окружності чи по

двох прямих. Такою площиною може бути площина не обов'язково особливого, але і загального положення.

9.1 Перетин прямої з похилим циліндром

Щоб допоміжна січна площина, яку треба провести через задану пряму AB (рис.33) перетинала заданий циліндр по прямих – твірних, необхідно щоб в ній була пряма, паралельна до вісі (або контурних твірних) циліндра.

Алгоритм розв'язання задачі:

- Обираємо на прямій AB довільну точку C (C_1, C_2).
- Проводимо через цю точку C пряму m , що паралельна вісі циліндра (m_2 паралельна фронтальній проекції, а m_1 паралельна горизонтальній проекції вісі циліндра).
- Знаходимо точки перетину 1 ($1_2, 1_1$) та 2 ($2_2, 2_1$) прямих AB і m з горизонтальною площиною проекцій, тобто горизонтальні сліди прямих.
- З'єднуємо точки 1_1 та 2_1 , одержуємо горизонтальний слід допоміжної площини, яка буде площиною загального положення.
- Основа циліндра належить площині проекцій Π_1 , тому горизонтальний слід січної площини h^0_1 та окружність – основа циліндра перетинаються у точках 3_1 та 4_1 .
- Через одержані точки 3_1 та 4_1 проведемо горизонтальні проекції лінії перетину 3_15_1 та 4_16_1 січної площини з циліндром. Вони будуть паралельні до проекцій прямої m_1 .
- Визначаємо точки K_1 та L_1 перетину твірних 3_15_1 та 4_16_1 з A_1B_1 . Це будуть горизонтальні проекції точок перетину прямої AB з поверхнею циліндра. Їхні фронтальні проекції K_2 та L_2 знайдемо на A_2B_2 за проекційним зв'язком з K_1 та L_1 .
- Визначити видимість на кресленнику.

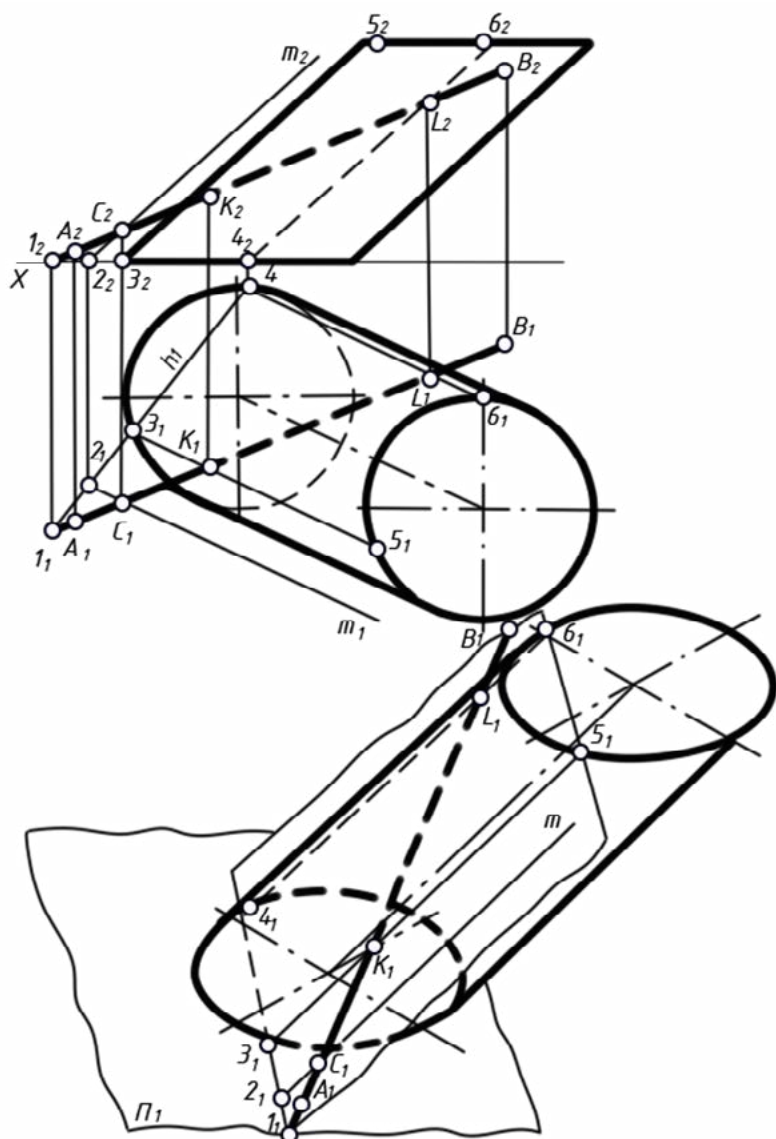


Рисунок 33

9.2 Перетин прямої з поверхнею похилого конуса

Через пряму AB треба провести допоміжну січну площину, що буде перетинати конус по прямих лініях, тобто по твірних. Це можливо тільки у тому випадку, коли площина проведена через вершину конуса S (S_1, S_2). А щоб точка S належала січній площині, необхідно, щоб вона належала прямій лінії цієї площини. Тому план розв'язання задачі буде таким (рис.34):

Алгоритм розв'язання задачі:

- На прямій AB обираємо довільну точку 1 ($1_2 \in A_2B_2$; $1_1 \in A_1B_1$).
- Через точку 1 та вершину конуса S проводимо пряму m (m_1, m_2) яка разом з прямою AB визначить січну площину.
- Через те, що основа конуса належить фронтальній площині проєкцій, знаходимо фронтальний слід f^0_2 допоміжної площини. Для цього знаходимо фронтальні сліди N_2 прямої AB та N'_2 прямої m , які потім поєднуємо між собою. Лінія $N_2N'_2$ – фронтальний слід січної площини.
- Знаходимо точки перетину 2_2 та 3_2 фронтального сліду січної площини з фронтальною проєкцією окружності – основи конуса.
- Поєднуємо точки 2_2 та 3_2 з фронтальною проєкцією вершини конуса S_2 та 2_1 і 3_1 з S_1 . Одержуємо лінії перетину січної площини з поверхнею конуса.
- Точки K_2 і L_2 перетину A_2B_2 з твірною 2_2S_2 та A_2B_2 з твірною 3_2S_2 визначають фронтальні проєкції точок перетину прямої AB з поверхнею конуса. Їхні горизонтальні проєкції K_1 та L_1 знайдуться на A_1B_1 за проєкційним зв'язком з K_2 та L_2 .
- Визначити видимість на кресленнику.

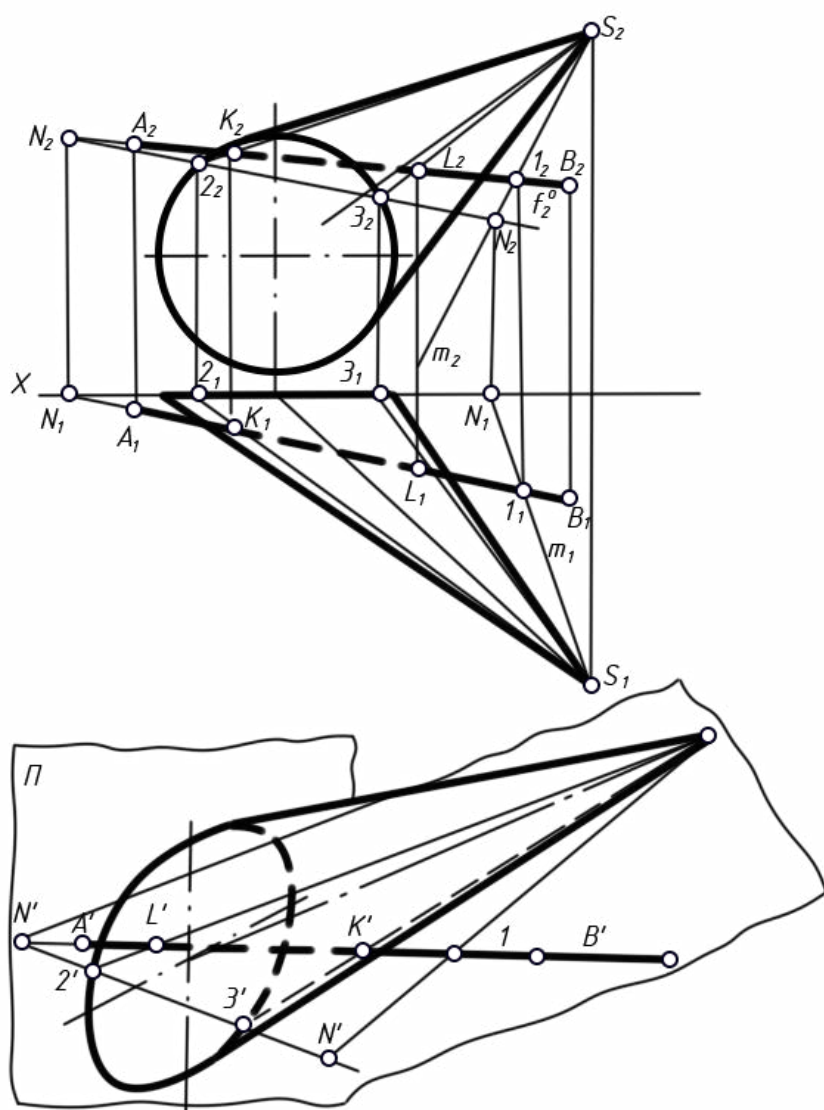


Рисунок 34

9.3 Перетин прямої з поверхнею прямого конуса

Допоміжна січна площина повинна бути проведена через вершину конуса S (рис.35).

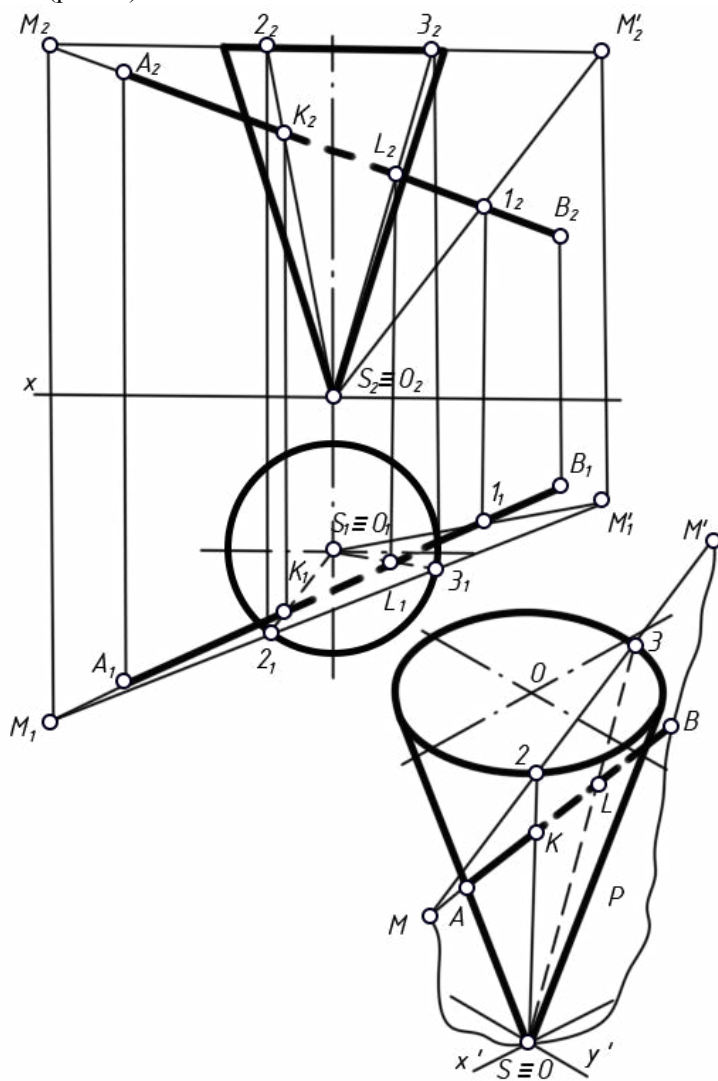


Рисунок 35

- На прямій AB оберемо довільну точку $1(1_1, 1_2)$, поєднаємо її прямою з вершиною конуса S . Прямі AB та $S1$ визначили шукану площину.

- Знаходимо лінію перетину цієї площини з площиною основи конуса, яка являє собою горизонтальну площину рівня. Для цього знайдемо фронтальні проекції горизонтальних слідів прямих AB та $S1$: M_2 та M_2' (як точок перетину проекцій A_2B_2 та S_21_2 з віссю X (фронтальною проекцією основи конуса) (рис. 35).

- За законом проекційного зв'язку знайдемо M_1 та M_1' — горизонтальні проекції горизонтальних слідів на A_1B_1 та S_11_1 , які поєднаємо між собою. M_1M_1' — горизонтальна проекція лінії перетину допоміжної січної площини з площиною основи конуса.

- Ця лінія перетинає основу конуса — окружність в точках 2 та 3 ($2_1, 2_2$ та $3_1, 3_2$). Поєднавши ці точки з вершиною конуса, одержимо $S2(S_12_1, S_22_2)$ та $S3(S_13_1, S_23_2)$ фронтальну проекцію лінії перетину допоміжної січної площини з поверхнею конуса

- Перетин побудованої лінії перетину з заданою прямою AB , дає точки перетину $K(K_1, K_2)$ та $L(L_1, L_2)$ цієї прямої з поверхнею конуса.

- Визначити видимість на кресленнику за допомогою конкуруючих точок.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Положення прямої в просторі						
Види поверхонь	Цилиндрична Ф	1. $\perp \pi_1$	2. $\perp \pi_2$	3. $\parallel \pi_1$	4. $\parallel \pi_2$	5. Загального положення
		1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
		2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
		3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
		4.1 Циліндроїд	4.2 Гіперболоїд	4.3 Коноїд	4.4 Гіперболоїд	4.5 Коноїд
Поверхні з площинного паралелізму	h_1^0 $A(140, 50, 90)$ $B(0, 90, 10)$ $C(10, 75, 40)$ $D(40, 65, 80)$ $E(70, 45, 100)$ $F(100, 15, 110)$ $G(150, 45, 55)$ $H(125, 75, 35)$ $M(95, 105, 10)$ $N(80, 115, -15)$ $CDEF$ $GHMN$ — напрямна циліндроїда P — площина паралелізму	$A(140, 100, 95)$ $B(20, 5, 5)$ $C(-50, 35, 95)$ $D(0, 25, 20)$ $E(135, 30, 85)$ $F(95, 35, 20)$ CD, EF — напрямні косої площини; π_1 — площина паралелізму	$A(-115, 100, 20)$ $B(20, 20, 95)$ $C(-50, 35, 95)$ $D(-10, 7, 130)$ $E(-105, 115, 40)$ $F(-95, 90, 55)$ $G(0, 105, 45)$ $H(0, 0, 45)$ $CDEF$ та GH — напрямна коноїду π_2 — площина паралелізму	$A(0, 95, 100)$ $B(125, 5, 5)$ $C(35, 95, 110)$ $D(140, 20, 25)$ $E(5, 85, 30)$ $F(50, 20, 35)$ CD, EF — напрямні косої площини; π_2 — площина паралелізму	$A(115, 20, 20)$ $B(-20, 95, 80)$ $C(50, 95, 35)$ $D(10, 130, 7)$ $E(105, 40, 115)$ $F(95, 55, 90)$ $G(0, 45, 115)$ $H(0, 45, 0)$ $CDEF$ та GH — напрямна коноїду π_1 — площина паралелізму	

ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Основи інженерної графіки з елементами професійного конструювання : підручник / І.О. Чермних, О.О. Краєвська, І. Ю. Адашевська, В.Н. Нестеренко, А.В. Сілічев. – Київ: Видавничий дім «Кондор», 2020. 240 с.
2. Гордон В.О. Курс нарисної геометрії / В.О. Гордон. – М., 1988.
3. Нарисна геометрія : підручник / В.Є. Михайленко, М.Ф. Євстифєєв, С.М. Ковальов. – Київ, 1993.
4. Кириченко А.Ф. Теоретичні основи інженерної графіки : підручник для вищих технічних навчальних закладів / А. Ф. Кириченко. – Київ: Професіонал, 2004. –496 с.
5. Краснокутський А. М. Теоретические основы построения технических чертежей /А. М. Краснокутський, В. В. Жережон-Зайченко. — Харків : НТУ «ХПИ», 2003. –106 с.
6. Федоренко Н.О. Конструювання деяких поверхонь та перетин їх прямою: методичні вказівки для студентів машинобудівних спеціальностей / Федоренко Н. О., Глібко О. А., Шевченко М. М., Шутєєва Л. М., Івашко А. В. – Харків : НТУ «ХПИ», 2003. –38 с.

Навчальне видання
Методичні вказівки
до практичних занять та самостійної роботи студентів технічних
спеціальностей

Конструювання деяких поверхонь та перетин їх прямою

з курсу Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка

для студентів технічних спеціальностей

Укладачі: АДАШЕВСЬКА Ірина Юріївна,
КРАЄВСЬКА Олена Олександрівна

За авторською редакцією

План 2021 р., поз. 141.

Підписано до друку 02. 02. 2021 р. Формат 60×84 1/16.

Папір офсетний. Друк — цифровий.

Гарнітура Times New Roman Ум. друк. арк. 3,13

Наклад 20 прим. Зам. № 1275/19. Ціна договірна.

Надруковано: видавництво «НТМТ»
61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16
E-mail: jornal_2016@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1748 від 15.04.2005 р.