расчетной схемы, позволяющей проследить изменение угла поворота ведомой звездочки в зависимости от угла поворота ведущей (рис. 3).

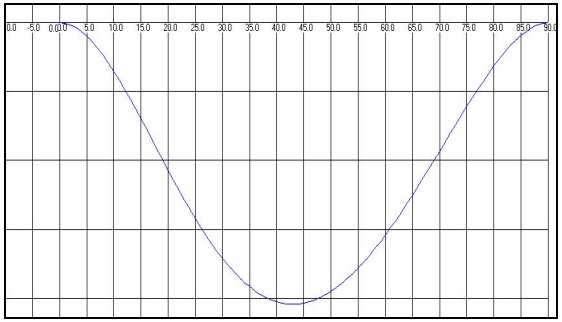

Рис. 3. Расхождение углов поворота ведущей и ведомой звездочек в зависимости от угла поворота ведущей

В результате анализа указанной проблемы предложены несколько технических решений, направленных на устранение разницы перемещений ведомого и ведущего звеньев, приводящих к заклиниванию механизма. Использование различных расчетных схем было обусловлено особенностями рассматриваемых вариантов.

В качестве одного из решений, позволяющих синхронизировать углы поворота ведомой и ведущих звездочек, было предложено изменение текущего радиуса ведомой звездочки таким образом, чтобы в проекции на горизонтальную ось оно компенсировало увеличение длины цепи. На рис. 4 показана траектория ролика ведомого звена, при которой разность указанных углов не превышает 0,001 радиана.

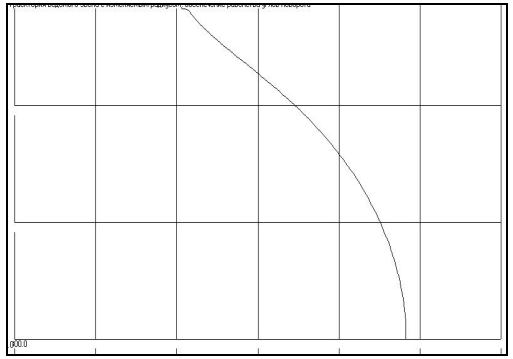

Рис. 4. Траектория ролика ведомого звена в проекции на фронтальную плоскость (начало координат совпадает с центром звездочки)

Выводы. Разработанные рекомендации и программный комплекс позволяют решать прикладные конструкторские задачи. Учитывая указанные особенности кинематики, спроектирован профиль, который удовлетворяет заданному условию равенства перемещений верхней и нижней ветвей.

Список литературы: **1.** *Медведев Н.Г., Абляскин О.И., Сериков В.И.* Повышение быстродействия механизмов для перемещения стандартных грузов // Материалы междунар. науч.-техн. конф. "MicroCAD'97". 12-14 мая 1997 г.Харьков: ХГПУ. 1996. Ч.3. С. 344. **2.** *Евченко К.* Как выбрать CAD–систему // САПР и графика. – 2002. – №5. – С. 85-86. **3.** *Малов М.* Библиотеки стандартных элементов в SolidWorks. Ч. 2 // САПР и графика. – 2002. – № 7. – С. 44-48. **4.** *Зайков М.* Комплекс ТехноПро /Шестерни для проектирования и моделирования изготовления зубчатых колес // САПР и графика. – 2002. – № 7. – С. 53-55.

Поступила в редколлегию 12.04.11

УДК 621.833

В. В. СТАВИЦКИЙ, канд. техн. наук, доц., ВНУ им. В. Даля, Луганск;
П. Л. НОСКО, д-р техн. наук, проф., проректор ВНУ им. В. Даля, Луганск

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО КПД В ЗУБЧАТОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ С УЧЕТОМ УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Получены аналитические выражения для оценки потерь мощности вследствие трения скольжения и качения в зубчатом зацеплении. Выявлены основные факторы, влияющие на эффективность эвольвентной зубчатой передачи.

Отримані аналітичні вирази для оцінки втрат потужності внаслідок тертя ковзання та кочення в зубчастому зачепленні. З'ясовані основні чинники, що впливають на ефективність евольвентної циліндричної зубчастої передачі.

Analytical expressions are got for the estimation of sliding and rolling power losses in the mesh teethes. Basic factors, influencing on efficiency of gearing, are exposed.

Постановка проблемы. Развитие современных энергетических машин идет по пути увеличения скоростей вращения с целью увеличения их мощности при снижении массы и габаритов деталей передач. Например, в современном турбостроении окружные скорости зубчатых колес достигают 120 м/с, а передаваемые мощности – 100 МВт и более. При таких параметрах даже при высоких значениях КПД потери в зубчатом редукторе составляют десятки киловатт. С целью достоверной комплексной оценки влияния геометрических параметров и условий эксплуатации на эффективность функционирования зубчатых передач необходимо иметь аналитическое выражение для

расчета потерь мощности вследствие трения скольжения и качения. Такая оценка позволит провести поиск рациональных конструктивных решений и выбор оптимальных условий эксплуатации высокоскоростных цилиндрических зубчатых передач с точки зрения их максимальной эффективности на этапах проектирования новых и усовершенствования существующих передач.

Анализ литературы. Изучение трения в зубчатых передачах имеет длительную историю, и в значительной мере связано с трудами известных ученых механиков В.А. Гавриленко, Х.Ф. Кетова, Н.И. Колчина, В.Н. Кудрявцева, Д.Н. Решетова и др. [1-6]. Все авторы отмечают, что с увеличением скорости вращения зубчатых колес коэффициент трения уменьшается, а, следовательно, уменьшаются и потери мощности в передаче. К таким же выводам привели и экспериментальные исследования [7-11]. Однако, предлагаемый в работах [4, 5] метод учета влияния скорости качения зубьев на коэффициент трения с помощью графиков и номограмм является трудоемким и неточным. В работах [12-16] получены аналитические зависимости, позволяющие рассчитать потери мощности, независящие от нагрузки (аэрогидродинамическое сопротивление вращению зубчатых колес, элементов подшипников и уплотнений, потери вследствие периодического сжатия-расширения масловоздушной смеси в защемленном между зубьями объеме), в функции геометрических параметров и частоты вращения зубчатых колес. Результаты этих исследований показали, что с ростом частоты вращения потери мощности возрастают практически по кубической зависимости. Анализ приведенных литературных источников приводит к качественному выводу о существовании окружной скорости, при которой потери мощности в зубчатой передаче будут минимальны, а кпд соответственно максимальным. Для количественной комплексной оценки влияния геометрических параметров и условий эксплуатации зубчатых передач на эффективность их функционирования необходимо иметь аналитическую зависимость КПД передачи от окружной скорости колес.

Цель статьи. Получить аналитическую зависимость, дающую возможность с минимальными затратами вычислительных усилий количественно оценивать потери мощности на трение качения и скольжения в зубчатом зацеплении. Провести анализ влияния ключевых геометрических параметров и условий эксплуатации зубчатых передач.

1. Определение коэффициента потерь мощности вследствие трения скольжения зубьев. На рис. 1 изображен момент контакта зубьев в т. С, находящейся на произвольном расстоянии y от полюса зацепления Р. Участок линии $\overline{AE}$ и $\overline{DB}$ соответствует двухпарному зацеплению, а участок $\overline{ED}$ – однопарному. Отрезки $\overline{AD}$ и $\overline{EB}$ равны основному шагу: $\overline{AD} = \overline{EB} = p_b$. Обозначим $\overline{AP} = L_1$; $\overline{PB} = L_2$; $\overline{EP} = a$; $\overline{PD} = b$.

Обозначенные длины отрезков могут быть определены из геометрии эвольвентного зубчатого зацепления:

$$\overline{AP} = L_1 = AN_2 - PN_2 = r_{b_2} \cdot \left(tg\alpha_{a_2} - tg\alpha_w\right) = r_{b_2} \cdot \tau_2 \cdot \chi_2 ; \qquad (1)$$

$$\overline{PB} = L_2 = BN_1 - PN_1 = r_{b_1} \cdot \left(tg\alpha_{a_1} - tg\alpha_w\right) = r_{b_1} \cdot \tau_1 \cdot \chi_1 ; \qquad (2)$$

$$\overline{EP} = a = p_b - L_2 = r_{b_1} \cdot \left(\tau_1 - tg\alpha_{a_1} + tg\alpha_w\right) = r_{b_1} \cdot \tau_1 \cdot \left(1 - \chi_1\right); \qquad (3)$$

$$\overline{PD} = b = p_b - L_1 = r_{b_2} \cdot \left(\tau_2 - tg\alpha_{a_2} + tg\alpha_w\right) = r_{b_2} \cdot \tau_2 \cdot \left(1 - \chi_2\right), \qquad (4)$$

где $\chi_2 = \dfrac{tg\alpha_{a_2} - tg\alpha_w}{\tau_2}$ и $\chi_1 = \dfrac{tg\alpha_{a_1} - tg\alpha_w}{\tau_1}$ – коэффициенты, сумма которых равна коэффициенту перекрытия ε; $\varepsilon = \chi_1 + \chi_2$; $tg\alpha_{a_1} = \dfrac{\sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2}}{r_{b_1}} = \sqrt{A_1^2 - 1}$;

$tg\overline{\alpha}_{a_2} = \dfrac{\sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2}}{r_{b_2}} = \sqrt{A_2^2 - 1}$; $A_1 = \dfrac{r_{a_1}}{r_{b_1}} = \dfrac{1 + (h_a^* + x_1)/z_1}{\cos\alpha}$; $A_2 = \dfrac{r_{a_2}}{r_{b_2}} = \dfrac{1 + (h_a^* + x_2)/z_2}{\cos\alpha}$;

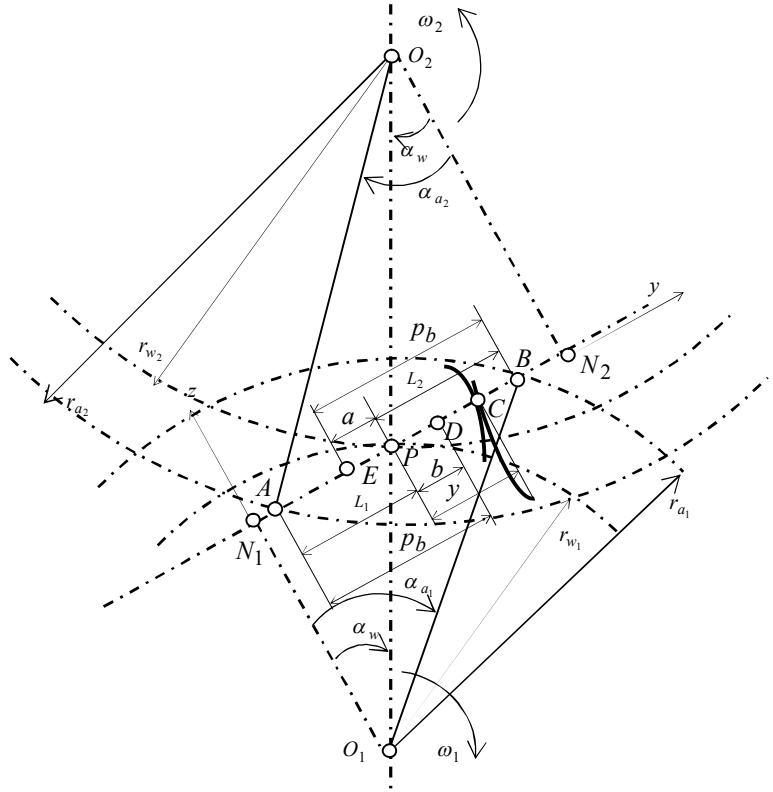

Рис. 1. Схема перемещения точки зацепления колес по углу поворота

p_b – основной шаг зацепления, м; r_{a_1}, r_{a_2} – радиусы окружностей вершин шестерни и колеса соответственно, м; r_{b_1}, r_{b_2} – радиусы основных окружностей шестерни и колеса соответственно, м; α – угол станочного зацепления; α_w – угол эксплуатационного зацепления; x_1, x_2 – коэффициенты смещения шестерни и колеса соответственно.

Работа сил трения определена следующим образом

$$A_f = \int F_f \cdot |V_s| \cdot dt = \int F_f \cdot \left|\frac{V_s}{V_t}\right| \cdot dy, \qquad (5)$$

где $V_s = y \cdot (\omega_1 + \omega_2)$ – относительная мгновенная скорость скольжения сопряженных профилей зубьев, м/с; $F_f = f \cdot F_n$ – сила трения, Н; $V_t = \omega_1 \cdot r_{w_1} \cdot \cos\alpha_w$ – скорость точки зацепления боковых поверхностей зубьев, м/с; $F_n = \dfrac{T_1}{r_{w_1} \cdot \cos\alpha_w}$ – нормальное усилие, действующие на зубья передачи, Н; f – коэффициент трения в зубчатой паре; ω_1, ω_2 – угловые скорости шестерни и колеса соответственно, м/с; r_{w_1} – радиус начальной окружности шестерни, м; T_1 – крутящий момент на валу шестерни передачи, Нм.

Ниже рассмотрены два случая расчета коэффициента потерь мощности вследствие трения качения.

В первом случае принято, что коэффициент трения в зубчатой передаче постоянный, но различный для двухпарного и однопарного зацепления $f_1 \neq f_2 = const$. Тогда работа сил трения на участке двухпарного зацепления (на участках $\overline{AE}$ и $\overline{DB}$) определяется определенным интегралом (5) в соответствующих пределах

$$A_{f_2} = \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{r_{w_1}} + \dfrac{1}{r_{w_2}}\right) T_1 \cdot f_2}{2 \cdot r_{w_1} \cdot \cos^2\alpha_w} \cdot \left(\int_{-L_1}^{-a} |y| \cdot dy + \int_{b}^{L_2} |y| \cdot dy\right) = \frac{u+1}{u} \cdot \frac{T_1 \cdot f_2 \cdot \left[\left(L_1^2 + L_2^2\right) - \left(a^2 + b^2\right)\right]}{4 \cdot r_{w_1}^2 \cdot \cos^2\alpha_w}.$$

Аналогично для однопарного зацепления (участок $\overline{ED}$)

$$A_{f_1} = \frac{\left(\dfrac{1}{r_{w_1}} + \dfrac{1}{r_{w_2}}\right) \cdot T_1 \cdot f_1}{r_{w_1} \cdot \cos^2\alpha_w} \cdot \left(\int_{-a}^{0} |y| \cdot dy + \int_{0}^{b} |y| \cdot dy\right) = \frac{u+1}{u} \cdot \frac{T_1 \cdot \left(a^2 + b^2\right) \cdot f_1}{2 \cdot r_{w_1}^2 \cdot \cos^2\alpha_w}.$$

Суммарные потери работы на трение на всем протяжении линии зацепления

$$A_f = A_{f2} + A_{f1} = \frac{T_1 \cdot (u+1) \cdot \left[f_2 \cdot \left(L_1^2 + L_2^2\right) + (2 \cdot f_1 - f_2) \cdot \left(a^2 + b^2\right)\right]}{4u \cdot r_{w_1}^2 \cdot \cos^2\alpha_w}. \qquad (6)$$

Подставив в (6) выражения (1), (2), (3) и (4) получим окончательно работу, затраченную на трение

$$A_f = \frac{u+1}{u} \cdot \frac{T_1 \cdot r_{b_1}^2 \cdot \tau_1^2}{4 \cdot r_{w_1}^2 \cdot \cos^2\alpha_w} \cdot \left[f_1 \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2\right) - (2 \cdot f_1 - f_2) \cdot (\varepsilon - 1)\right]. \qquad (7)$$

Передаваемая зубчатой передачей работа определяется произведением

$$A_з = F_n \cdot p_b = \frac{T_1 \cdot r_{b_1} \cdot \tau_1}{r_{w_1} \cdot \cos\alpha_w}. \qquad (8)$$

Коэффициент потерь мощности вследствие трения скольжения сопряженных поверхностей зубьев

$$\psi_f = \frac{A_f}{A_з} = \frac{u+1}{u} \cdot \frac{r_{b_1} \cdot \tau_1}{2 \cdot r_{w_1} \cdot \cos\alpha_w} \cdot \left[f_1 \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2\right) - (2 \cdot f_1 - f_2) \cdot (\varepsilon - 1)\right]. \qquad (9)$$

При равенстве коэффициентов трения в однопарном и двухпарном зацеплениях $f_1 = f_2 = f$ в нулевых зубчатых колесах $r_{w_1} = r_1$ и $\cos\alpha_w = \cos\alpha$ выражение (9) значительно упрощается и приобретает вид, аналогичный [3]:

$$\psi_f = \frac{A_f}{A_з} = f \cdot \frac{u+1}{u} \cdot \frac{\pi}{z_1} \cdot \left[\left(\chi_1^2 + \chi_2^2\right) - (\varepsilon - 1)\right]. \qquad (10)$$

Во втором случае предполагается, что коэффициент трения в зубчатой передаче переменный по скорости сопряженных поверхностей, но одинаковый при двух- и однопарном зацеплениях $f_1 = f_2 = f = \mathrm{var}$. В зависимость (5) подставляется значение коэффициента трения, полученное экспериментально многими авторами [7-11], например, Мишариным Ю.А. [7], в диапазоне коэффициента трения $0{,}02 \prec f \prec 0{,}08$;

$$f = \frac{0{,}325}{(\upsilon \cdot V_s \cdot V_r)^{0{,}25}}, \qquad (11)$$

где V_r – относительная мгновенная скорость качения сопряженных профилей зубьев, м/с; υ – кинематическая вязкость смазочного материала, сСт.

$$A_f = \int \frac{0{,}325}{(\upsilon \cdot V_s \cdot V_r)^{0{,}25}} \cdot F_n \cdot \left|\frac{V_s}{V_t}\right| \cdot dy = \int \frac{0{,}325}{(\upsilon \cdot V_r)^{0{,}25}} \cdot \frac{T_1}{r_{w_1} \cdot \cos\alpha_w} \cdot \left|\frac{V_s^{0{,}75}}{V_t}\right| \cdot dy. \qquad (12)$$

Скорости скольжения и качения поверхностей сопрягающихся зубьев определяются, соответственно, как разность и сумма касательных составляющих

$$V_s = V_{k_1}^{\tau} - V_{k_2}^{\tau} = \omega_1 \cdot y \cdot \frac{1+u}{u}, \; V_r = V_{k_1}^{\tau} + V_{k_1}^{\tau} = \omega_1 \cdot \left(r_{b1} \cdot 2 \cdot tg\alpha_w + y \cdot \frac{u-1}{u} \right), \quad (13)$$

где $V_{k_1}^{\tau} = \omega_1 r_{b_1} tg\alpha_{k_1} = \omega_1 \left(r_{b_1} tg\alpha_w + y \right), V_{k_2}^{\tau} = \omega_2 r_{b_2} tg\alpha_{k_2} = \omega_2 \left(r_{b2} tg\alpha_w - y \right)$,

$tg\alpha_{k_1} = \dfrac{PN_1 + y}{r_{b_1}} = tg\alpha_w - \dfrac{y}{r_{b_1}}$, $\quad tg\alpha_{k2} = \dfrac{PN_1 - y}{r_{b2}} = tg\alpha_w - \dfrac{y}{r_{b_2}}$ (см. рис. 1).

Среднеинтегральное значение скорости качения

$$V_r^m = \frac{1}{AB} \int_{-AP}^{PB} \omega_1 \cdot \left(r_{b1} \cdot 2 \cdot tg\alpha_w + y \cdot \frac{u-1}{u} \right) dy = \omega_1 \cdot r_{b1} \cdot \left[2 \cdot tg\alpha_w + \pi \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) \cdot \frac{u-1}{z_2} \right].$$

Подставляя полученные выражение для скоростей скольжения и качения в уравнение (12), получим выражения для определения работы сил трения

$$A_f = \int \frac{0{,}325 \cdot T_1 \cdot \left(\dfrac{(1+u)}{u} \right)^{0{,}75}}{\upsilon^{0{,}25} \cdot r_{b_1}^{2{,}25} \cdot \omega_1^{0{,}5} \left[2 \cdot tg\alpha_w + \pi \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) \cdot \dfrac{u-1}{z_2} \right]^{0{,}25}} \cdot \left| y^{0{,}75} \right| \cdot dy. \quad (14)$$

Для двухпарного зацепления (на участках $\overline{AE}$ и $\overline{DB}$) работа сил трения определится интегрированием в пределах от $-L_1$ до $-a$ и от b до L_2

$$A_{f_2} = \frac{0{,}325 \cdot \left[\left(L_1^{1{,}75} + L_2^{1{,}75} \right) - \left(a^{1{,}75} + b^{1{,}75} \right) \right] \cdot T_1 \cdot \left(\dfrac{(1+u)}{u} \right)^{0{,}75}}{7 \cdot \upsilon^{0{,}25} \cdot r_{b_1}^{2{,}25} \cdot \omega_1^{0{,}5} \left[2 \cdot tg\alpha_w + \pi \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) \cdot \dfrac{u-1}{z_2} \right]^{0{,}25}}. \quad (15)$$

Аналогично для однопарного зацепления (участок $\overline{ED}$) интегрированием в пределах от $-a$ до 0 и от 0 до b получим

$$A_{f_1} = \frac{0{,}325 \cdot T_1 \cdot \left(\dfrac{(1+u)}{u} \right)^{0{,}75} \cdot \left(a^{1.75} + b^{1.75} \right)}{3{,}5 \cdot \upsilon^{0{,}25} \cdot r_{b_1}^{2{,}25} \cdot \omega_1^{0{,}5} \left[2 \cdot tg\alpha_w + \pi \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) \cdot \dfrac{u-1}{z_2} \right]^{0{,}25}}. \quad (16)$$

Суммарные потери работы на трение на всем протяжении линии зацепления равны

$$A_f = A_{f2} + A_{f1} = \frac{0{,}325 \cdot T_1 \cdot \left(\dfrac{(1+u)}{u} \right)^{0{,}75} \cdot \left[\left(L_1^{1{,}75} + L_2^{1{,}75} \right) + \left(a^{1{,}75} + b^{1{,}75} \right) \right]}{7 \cdot \upsilon^{0{,}25} \cdot r_{b_1}^{2{,}25} \cdot \omega_1^{0{,}5} \left[2 \cdot tg\alpha_w + \pi \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) \cdot \dfrac{u-1}{z_2} \right]^{0{,}25}}.$$

С учетом зависимостей (1)-(4) окончательно потери работы вследствие сил трения скольжения в зубчатой передаче равны

$$A_f = \frac{0{,}325 \cdot T_1 \cdot \left(\dfrac{(1+u)}{u} \right)^{0{,}75} \cdot \tau_1^{1{,}75} \cdot \left[\left(\chi_1^{1{,}75} + \chi_2^{1{,}75} \right) + \left[(1-\chi_1)^{1{,}75} + (1-\chi_2)^{1{,}75} \right] \right]}{7 \cdot \upsilon^{0{,}25} \cdot r_{b_1}^{0{,}5} \cdot \omega_1^{0{,}5} \left[2 \cdot tg\alpha_w + \pi \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) \cdot \dfrac{u-1}{z_2} \right]^{0{,}25}} \quad (17)$$

С учетом выражения (8) для определения передаваемой зубчатой передачей работы коэффициент потерь определится следующим образом

$$\psi_f = 0{,}0464 \cdot \frac{\left(\dfrac{(1+u)}{u} \right)^{0{,}75} \cdot \tau_1^{0{,}75} \cdot \left[\left(\chi_1^{1{,}75} + \chi_2^{1{,}75} \right) + \left[(1-\chi_1)^{1{,}75} + (1-\chi_2)^{1{,}75} \right] \right]}{\upsilon^{0{,}25} \cdot V_{okp}^{0{,}5} \cdot \left[2 \cdot tg\alpha_w + \tau_1 \cdot \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) \cdot \dfrac{u-1}{2 \cdot u} \right]^{0{,}25}}. \quad (18)$$

Допуская, что эмпирическая зависимость [7] работоспособна и при средних значениях скоростей скольжения и качения, необходимо определить границы применимости зависимости (18).

Среднеинтегральное значение произведения скоростей скольжения и качения:

$$\left(V_s \cdot V_r \right)_m = \frac{\omega_1^2}{AB} \int_{-AP}^{PB} \cdot \left(y \cdot \frac{1+u}{u} \right) \cdot \left(r_{b1} \cdot 2 \cdot tg\alpha_w + y \cdot \frac{u-1}{u} \right) \cdot dy =$$

$$= \frac{u^2 - 1}{u^2} \cdot V_{okp}^2 \cdot \tau_1^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \left(\frac{\left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) \cdot u \cdot tg\alpha_w}{(u-1) \cdot \tau_1} + \frac{\chi_1^3 + \chi_2^3}{3} \right).$$

Тогда среднее за период зацепления значение коэффициента трения

$$f_m = \frac{0{,}325}{\left[\upsilon \left(V_s V_r \right)^m \right]^{0{,}25}} = \frac{0{,}325}{\sqrt{V_{okp} \cos \alpha} \left[\upsilon \dfrac{u^2 - 1}{u^2} \left(\dfrac{\left(\chi_1^2 + \chi_2^2 \right) u tg\alpha_w}{(u-1) \cdot \tau_1} + \dfrac{\chi_1^3 + \chi_2^3}{3} \right) \right]^{0{,}25}}.$$

Тогда

$$V_{окр} = \frac{0{,}1056}{\sqrt{\upsilon \cdot \frac{u^2-1}{u^2} \cdot \left(\frac{\left(\chi_1^2+\chi_2^2\right) \cdot u \cdot tg\alpha_w}{(u-1)\cdot \tau_1} + \frac{\chi_1^3+\chi_2^3}{3} \right) \cdot f_m^2 \cdot \tau_1 \cdot \cos\alpha}} . \quad (19)$$

На рис. 2 приведен диапазон окружных скоростей в зубчатой передаче, в котором применима зависимость (18) для определения коэффициента потерь вследствие трения скольжения при различных значениях передаточного отношения и чисел зубьев и вязкости смазочного масла 30 Сст. Анализ рис. 2 показывает, что с ростом числа зубьев диапазон применения представленных в настоящей статье зависимостей увеличивается. С использованием выражения (18) появляется возможность с минимальными затратами вычислительных усилий количественно оценивать потери мощности на трение качения и скольжения в зубчатом зацеплении и проводить анализ влияния ключевых геометрических параметров и условий эксплуатации зубчатых передач. Анализ представленной на рис. 3 зависимости коэффициента потерь вследствие трения скольжения от числа зубьев шестерни и передаточного числа показывает, что с увеличением числа зубьев и передаточного числа потери в зубчатой передаче уменьшаются.

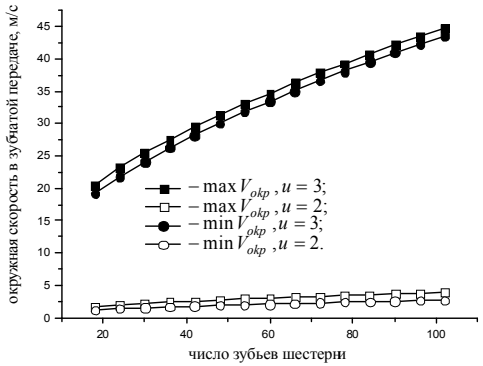

Рис. 2. Диапазон окружных скоростей, в котором применима зависимость (18) при различных значениях передаточного отношения, чисел зубьев и вязкости смазочного масла 30 Сст

2. Определения потерь мощности вследствие трения качения. Случай качения сопряженных боковых поверхностей дух зубьев цилиндрических прямозубых колес можно рассматривать как качение двух круговых цилиндров радиусов ρ_1 и ρ_2 в плоскости чертежа. Если оси цилиндров параллельны, поверхность контакта превращается в узкий прямоугольник.

Половина ширины площадки сжатия этих цилиндров в случае их покоя обычно принимается равной [17]:

$$a = 1{,}128 \cdot \sqrt{q \cdot \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1+\rho_2} \cdot \frac{\left[E_1\left(1-\nu_2^2\right)+E_2\left(1-\nu_1^2\right)\right]}{2 \cdot E_1 \cdot E_2}} , \quad (20)$$

где $q = \frac{F_n}{b} = \frac{T_1}{b \cdot r_{w1} \cdot \cos\alpha_w}$ – нагрузка, приходящаяся на единицу длины кон-

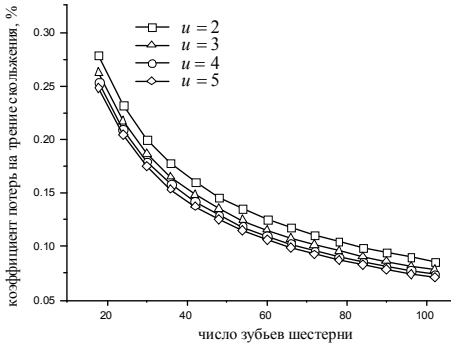

Рис. 3. Зависимость коэффициента потерь трения скольжения от числа зубьев шестерни и передаточного отношения при окружной скорости 20 м/с и вязкости смазочного масла 100 Сст

тактной полоски, Н/м^2; b – ширина зубчатого венца колеса, м; E_1 и E_2 – модули упругости материалов сопряженных зубчатых колес, МПа; ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона материалов сопряженных зубчатых колес; ρ_1, ρ_2 – радиусы кривизны эвольвент шестерни и колеса соответственно, м.

В случае качения цилиндров полагаем, что вся нагрузка будет действовать только на одну половину площадки и распределение нагрузки на ней будут близки к таковым при двойной нагрузке в состоянии покоя (рис. 4) и, следовательно,

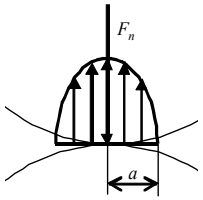

Рис. 4. Площадка сжатия двух цилиндров, находящихся в покое

$$a_1 = 1{,}128 \cdot \sqrt{2 \cdot q \cdot \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1+\rho_2} \cdot \frac{\left[E_1\left(1-\nu_2^2\right)+E_2\left(1-\nu_1^2\right)\right]}{2 \cdot E_1 \cdot E_2}} . \quad (21)$$

Как известно [17], эпюра напряжений сжатия у неподвижных цилиндров имеет вид полуэллипса (см. рис. 4), а у катящихся цилиндров – вид четверти эллипса (рис. 5).

Координата центра тяжести площади четверти эллипса $x_0 = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot a_1$ является плечом момента сопротивления качению и равна коэффициенту трению качения C_k. Следовательно, $C_k = x_0 = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot a_1$ или

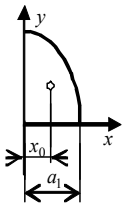

Рис. 5. Площадка сжатия двух катящихся цилиндров

$$C_k = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot 1{,}128 \cdot \sqrt{2 \cdot q \cdot \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1+\rho_2} \cdot \frac{\left[E_1\left(1-\nu_2^2\right)+E_2\left(1-\nu_1^2\right)\right]}{2 \cdot E_1 \cdot E_2}} . \quad (22)$$

Переходя к случаю качения боковых поверхностей пары сопряженных зубьев цилиндрических колес $\rho_1 + \rho_2 = r_1 \cdot (1+u) \cdot tg\alpha_w \cdot \cos\alpha$, получаем:

$$C_k = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot 1{,}128 \cdot \sqrt{\frac{T_1}{b \cdot r_1^2 \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2}{(1+u) \cdot tg\alpha_w \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{\left[E_1\left(1-\nu_2^2\right)+E_2\left(1-\nu_1^2\right)\right]}{2 \cdot E_1 \cdot E_2}} .$$

Подставив значения минимально возможных ширины зубчатого венца и радиуса делительной окружности из условия прочности по контактным напряжениям [18]

$$b \cdot r_1^2 = \frac{T_1 \cdot K_H}{[\sigma_H]^2 \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{(u+1)}{u} \cdot \frac{\cos\beta}{\varepsilon_\alpha \sin 2\alpha_w} \cdot \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{\pi \cdot \left[E_1\left(1-\nu_2^2\right)+E_2\left(1-\nu_1^2\right)\right]},$$

получим коэффициент трения качения в функции переменных радиусов кривизны эвольвент сопряженных профилей зубьев

$$C_k = [\sigma_H] \cdot \left(\frac{\left[E_1\left(1-\nu_2^2\right)+E_2\left(1-\nu_1^2\right)\right]}{2 \cdot E_1 \cdot E_2} \right) \cdot \frac{3 \cdot \varepsilon \cdot \cos\alpha_w}{\sqrt{\pi} \cdot (1+u)} \cdot \sqrt{\frac{u \cdot \rho_1 \cdot \rho_2}{K_H \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha}} . \qquad (23)$$

После подстановки численных значений констант и обозначив

$$E_{np}^* = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{\left[E_1\left(1-\nu_2^2\right)+E_2\left(1-\nu_1^2\right)\right]},$$

для некорригированных колес $\alpha_w = \alpha$; $r_{w_1} = r_1$ выражение (23) упрощается

$$C_k = 3 \cdot \frac{u}{(1+u)} \cdot \frac{[\sigma_H]}{E_{np}^*} \cdot \sqrt{\frac{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \varepsilon \cdot \cos\alpha}{\pi \cdot u \cdot K_H \cdot \cos\beta}} . \qquad (24)$$

Работа трения качения определится следующим образом $A_k = \int C_k \cdot F_n \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot dt$. Приняв во внимание, что $\frac{dy}{dt} = \omega_1 \cdot r_1 \cdot \cos\alpha$ и подставив $dt = \frac{dy}{\omega_1 \cdot r_1 \cdot \cos\alpha}$, получим выражение для определения работы сил трения качения

$$A_k = \int C_k \cdot \frac{T_1}{r_1^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot \frac{(1+u)}{u} \cdot dy . \qquad (25)$$

Подставляя выражение (23) для коэффициента трения качению, получим

$$A_k = 3 \cdot \frac{[\sigma_H]}{E_{np}^*} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \cos\alpha}{\pi \cdot u \cdot K_H \cdot \cos\beta}} \cdot \frac{T_1}{r_1^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot \int \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot dy . \qquad (26)$$

Таким образом, определение работы трения сводится к вычислению интеграла $\int \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot dy$. Радиус кривизны эвольвенты шестерни можно представить в виде произведения $\rho_1 = \overline{N}_1\overline{C} = \overline{N}_1\overline{P} + y = r_{b_1} tg\alpha_w + y$ (см. рис. 1).

Аналогично радиус кривизны эвольвенты колеса $\rho_2 = \overline{N}_2\overline{C} = \overline{N}_2\overline{P} + y = r_{b_2} \cdot tg\alpha_w - y$. Тогда $\rho_1 \cdot \rho_2 = \left(r_{b_1} \cdot tg\alpha_w + y\right) \cdot \left(r_{b_2} \cdot tg\alpha_w - y\right)$, или

$$\int \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}\, dy = r_{b_1} tg\alpha_w (1+u) \sqrt{\frac{\left(1+\frac{y}{r_{b_1} tg\alpha_w}\right)}{(1+u)} \left[1 - \frac{\left(1+\frac{y}{r_{b_1} tg\alpha_w}\right)}{(1+u)}\right]}\, dy . \qquad (27)$$

Проведя соответствующие замены, интеграл (27) может быть приведен сначала к виду $\int \sqrt{x \cdot (1-x)} \cdot dx$, а потом и к форме табличного интеграла $\int \sqrt{a^2 - (x-a)^2} \cdot dx$, решением которого является

$$\frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x-a}{a} + \frac{x-a}{2} \cdot \sqrt{a^2 - (x-a)^2} .$$

Подставляя $x = \frac{\left(1+\frac{y}{r_{b_1} \cdot tg\alpha_w}\right)}{(1+u)}$; $dx = \frac{dy}{r_{b_1} \cdot (1+u) \cdot tg\alpha_w}$; $a = 1/2$, на участке однопарного зацепления (участок $\overline{ED}$ на рис. 1) определенный интеграл равен

$$H_1 = \int_{-\bar{x}_a}^{\bar{x}_b} \sqrt{x \cdot (1-x)}\, dx = \frac{1}{8}\left[\left(Z_a\sqrt{1-Z_a^2} + \arcsin Z_a\right) + \left(Z_b\sqrt{1-Z_b^2} + \arcsin Z_b\right)\right],$$

где $Z_a = 2 \cdot x_a - 1$; $\bar{x}_a = \left[\frac{\tau_1 \cdot (1-\chi_1)}{tg\bar{\alpha}_w} + 1\right] \cdot \frac{1}{(u+1)}$; $\bar{x}_b = \left[\frac{\tau_1 \cdot (1-\chi_2)}{tg\bar{\alpha}_w} + 1\right] \cdot \frac{1}{(u+1)}$;

$Z_b = 2 \cdot x_b - 1$.

Определенный интеграл на участках двухпарного зацепления (на участках $\overline{AE}$ и $\overline{DB}$ рис. 1):

$$H_2 = \int_{-\bar{x}_{L_1}}^{-\bar{x}_a} \sqrt{x \cdot (1-x)} \cdot d\bar{x} + \int_{\bar{x}_b}^{\bar{x}_{L_2}} \sqrt{x \cdot (1-x)} \cdot d\bar{x} = \frac{1}{8}\left(Z_{L_1}\sqrt{1-Z_{L_1}^2} + \arcsin Z_{L_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(Z_{L_2}\sqrt{1-Z_{L_1}^2} + \arcsin Z_{L_2}\right) - H_1,$$

где $Z_{L_1} = 2 \cdot x_{L_1} - 1$; $\bar{x}_{L_2} = \left[\frac{\tau_1 \cdot \chi_1}{tg\bar{\alpha}_w} + 1\right] \cdot \frac{1}{(u+1)}$; $\bar{x}_{L_1} = \left[\frac{\tau_1 \cdot \chi_2}{tg\bar{\alpha}_w} + 1\right] \cdot \frac{1}{(u+1)}$;

$Z_{L_2} = 2 \cdot x_{L_2} - 1$.

Окончательно выражение для определения работы сил трения качения в зубчатой передаче

$$A_k = 3 \cdot T_1 \cdot \frac{[\sigma_H]}{E^*_{пр}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \cos\alpha}{\pi \cdot u \cdot K_H \cdot \cos\beta}} \cdot \frac{(u+1)^2}{4} \cdot tg^2\alpha_w \cdot H, \qquad (28)$$

где $H = H_1 + H_2\sqrt{2}/2$

С учетом (8) коэффициент потерь вследствие трения качения

$$\psi_к = \frac{A_k}{A_з} = 3 \cdot \frac{[\sigma_H]}{E^*_{пр}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \cos\alpha}{\pi \cdot u \cdot K_H \cdot \cos\beta}} \cdot \frac{(u+1)^2}{4 \cdot \tau_1} \cdot tg^2\alpha_w \cdot H. \qquad (29)$$

Механический коэффициент полезного действия эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи определяется известной формулой

$$\eta_m = 1 - (\psi_f + \psi_к). \qquad (30)$$

На рис. 6 изображена зависимость коэффициента потерь трения качения от числа зубьев шестерни. Тенденция изменения коэффициента потерь аналогична трению скольжения – с ростом числа зубьев коэффициент потерь убывает по степенной зависимости. Необходимо также отметить, что потери трения качения на порядок меньше потерь трения скольжения.

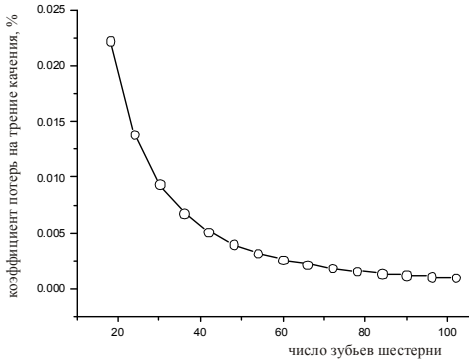

Рис. 6. Зависимость коэффициента потерь трения качения от числа зубьев шестерни

На рис. 7 изображена зависимость механического КПД зубчатой передачи от скорости вращения вала шестерни при передаточном отношении, равном 3, и числе зубьев шестерни, равном 20. Анализ показывает, что с ростом скорости вращения шестерни и вязкости смазочного масла коэффициент полезного действия зубчатой передачи увеличивается.

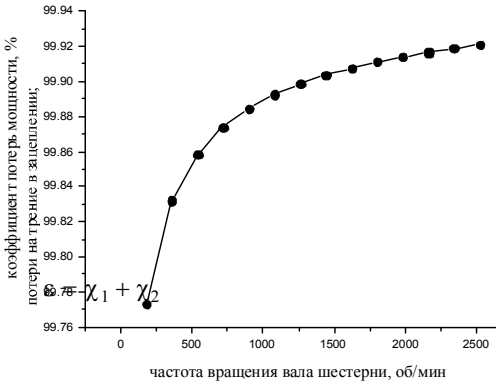

Рис. 7. Зависимость механического коэффициента полезного действия от скорости вращения вала шестерни зубчатой передачи

Выводы.

1. Предложены аналитические зависимости для определения коэффициентов потерь мощности вследствие трения скольжения и качения в зубчатой передаче.

2. На основе проведенного анализа потерь мощности вследствие трения скольжения и качения установлено:

а) потери мощности вследствие трения скольжения уменьшаются с ростом окружной скорости, числа зубьев и передаточного отношения;

б) потери вследствие трения качения на порядок меньше потерь вследствие трения скольжения;

в) потери мощности, независящие от нагрузки прямо пропорциональны объему, занимаемому зубчатыми колесами.

3. Разработанный метод оценки потерь мощности вследствие трения скольжения и качения позволяет проводить комплексный анализ, поиск рациональных конструктивных решений и выбор оптимальных условий эксплуатации высокоскоростных цилиндрических зубчатых передач с точки зрения их максимальной эффективности на этапах проектирования новых и усовершенствования существующих передач.

Список литературы: **1.** *Гавриленко В. А.* Зубчатые передачи в машиностроении. – М.: Машгиз, 1962. – 531 с. **2.** *Кетов Х. Ф., Колчин Н. И.* Теория машин и механизмов. – М., Л.: Машгиз, 1939. – 600 с. **3.** *Кудрявцев В. Н.* Зубчатые передачи. – М.: Машгиз, Ленинградское отделение, 1957. – 263 с. **4.** *Кудрявцев В. Н.* Планетарные передачи. – Л.: Машиностроение, 1966. – 305 с. **5.** *Планетарные* передачи. Справочник. Под ред.. В.Н. Кудрявцева и Ю.Н. Кирдяшева. – Л.: Машиностроение (Ленингр. Отделение), 1977. – 536 с. **6.** *Решетов Д. Н.* Детали машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 497 с. **7.** *Misharin Yu. A.* Influence of the friction condition on the magnitude of the friction coefficient in the case of rollers with sliding // 1958 - Proc. Int. Conf. on gearing, Inst. Mech. Eng., London, 1958. – PP. 159-164. **8.** *Kuzmin N. F.* Coefficient of friction in heavily loaded contact// - 1954 -Vest. Mashinostr. 1954. – Vol. 34. – PP. 18-26. **9.** *Benedict G. H.* Instantaneous coefficients of gear tooth friction/ Benedict G. H. , Kelley B. W. // Tribology Transactions. – 1961. – Vol. 4. – PP. 59-70. **10.** *O'Donoghue J. P.* A. Friction and temperature in rolling sliding contacts/ O'Donoghue J. P., Cameron A. // ASLE Trans. – 1966. – Vol. 9. – PP. 186-194. **11.** *Kelley B. W.* Lubrication of involute gearing/ Kelley B. W., Lemanski A. J. // Conf. On Lubrication and Wear Fundamentals and Application to Design. Proc. Inst. Mech. Eng., London 1967/1968. – Vol. 182. – №. 3A. – PP. 173-184. **12.** *Ставицкий В.В.* Анализ аэрогидродинамических потерь в зубчатых передачах / В.В. Ставицкий, П.Л. Носко, П.В. Филь// Вісник нац. у-ту ім. В Даля, 2009. – №12 (142). – С. 125-131. **13.** *Ставицкий В.В.* Исследование аэродинамических потерь энергии в высокоскоростных прямозубых цилиндрических передачах/ В.В. Ставицкий, П.Л. Носко // Вестник НТУ «ХПИ». - Харьков: НТУ «ХПИ», 2010. – № 27. – С. 167-173. **14.** *Ставицкий В. В.* Анализ составляющих потерь мощности вследствие аэродинамического сопротивления вращению зубчатых колес / Ставицкий В. В., Носко П. Л., Лиходеев С. И. // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: ХПИ, 2011. – № 41. – С. 297-302. **15.** *Stavytskyy V. V.* Power losses by the air-pumping phenomen in high-speed spur gears/ Stavytskyy V. V., Nosko P. L. // TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture, Lublin University of Technology, The Volodymir Dahl East-Ukrainian national university of Lugansk. Poland, Lublin, Polish Academy of Sciences Branch in Lublin. 2010.V. XC/ – PP. 324-331. **16.** *Stavytskyy V. V.* A model for the prediction of windage losses in geared transmissions – preliminary resultants/ Stavytskyy V. V., Nosko P. L. // TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture, Lublin University of Technology, The Volodymir Dahl East-Ukrainian national university of Lugansk. Poland, Lublin, Polish Academy of Sciences Branch in Lublin. 2010. – V. XC/ – PP. 316-323. **17.** *Прикладная* механика/ Под ред. К. И. Заблонского. – Учеб. Пособие для вузов. – Киев: Вища школа. Головное изд-во. 1979. – 280 с. **18.** *Иосилевич Г. Б.* Детали машин. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.

Поступила в редколлегию 30.08.11