УДК 681.518

А.С. КУЦЕНКО, д-р. техн. наук, ***Чан Занг ЛЮ***

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ПРОБЛЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКИМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Запропоновано різноманітні підходи до синтезу лінійних систем управління квазістатичними технологічними процесами, які засновані на принципах управління по збуренню та по відхиленню.

Введение. В большинстве случаев, современный уровень развития теории управления опирается на весьма зыбкий фундамент – удобную математическую модель объекта управления. Без сомнения можно сказать, что наиболее значительные теоретические и практические результаты получены для достаточно простых объектов управления, математические модели которых описываются линейными дифференциальными уравнениями. В то же время математические модели большинства технологических процессов вряд ли могут быть представлены в виде достаточно обоснованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это обусловлено, прежде всего, сложностью процессов преобразования материальных и энергетических потоков, а также недостаточной информацией о параметрах технологической установки. Для таких процессов в условиях медленно изменяющихся воздействий наиболее приемлемым следует считать эмпирический подход, позволяющий на основе эксперимента получать статические характеристики взаимосвязей «вход-выход». Изменения координат состояния и выходных координат, вызванные возмущающими и управляющими воздействиями, в соответствии со статическими характеристиками по аналогии с классической термодинамикой можно назвать квазистатическими управляемыми процессами.

Подходы, основанные на представлении динамических процессов квазистатическими, достаточно подробно рассмотрены в научной литературе. В ряде работ [1, 2] предлагается частичный переход от динамической модели к двум подмоделям, отображающим «быстрые» и «медленные» движения. Таким образом, можно уменьшить размерность исходной системы дифференциальных уравнений путем замены ее части статическими аналогами. В работе [3] предложен критерий сравнения скоростей изменения выходных координат и внешних воздействий, позволяющий судить о возможности замены динамической системы ее статическим аналогом без существенных искажений результатов численного моделирования. В [4] авторами настоящей работы предложен критерий оценки степени динамичности линейной системы по отношению к заданному классу внешних воздействий. Критерий основан на представлении выхода управляемой системы в виде ряда по производным входного воздействия, аналогичного ряду для коэффициентов ошибок.

В настоящей работе предлагаются различные подходы к синтезу регуляторов линейных квазистатических управляемых процессов, основанные на принципах управления по возмущению и по отклонению.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную статическую модель управляемого процесса $(u(t), x(t))$, подверженного возмущениям $v(t)$ в виде непрерывных функций, принадлежащих заданному классу V :

$$x = K_u u + K_v v , \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $v \in R^l$, K_u и K_v - матрицы соответствующих размерностей, $m \le n$, u - вектор управления. Необходимо синтезировать закон управления $u(x, v, t)$, минимизирующий отклонения x от заданного вектора уставки z. В качестве меры отклонения x от z примем положительно определенную квадратичную форму

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T Q \varepsilon , \tag{2}$$

где $\varepsilon = z - x$ - вектор ошибок.

Управление по возмущению. Рассмотрим случай, когда вектор возмущений полностью измеряем. Тогда, подставляя (1) в (2), получим:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{2} (z - K_u u - K_v v)^T Q (z - K_u u - K_v v) . \tag{3}$$

Дифференцируя (3) по u и приравнивая результат 0, получим линейную систему уравнений для определения оптимального закона управления:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = (z - K_u u - K_v v)^T Q K_u = 0 . \tag{4}$$

Из (4) непосредственно следует закон управления

$$u = \left(K_u^T Q K_u\right)^{-1} K_u^T Q z - \left(K_u^T Q K_u\right)^{-1} K_u^T Q K_v v . \tag{5}$$

Как видно из (5) оптимальный закон управления представим в виде линейной комбинации задающего воздействия и возмущения. Из (5) и (1) можно получить выражения для вектора выхода x и для ошибки ε

$$x = \overline{K_u} z - \left(\overline{K_u} - E\right) K_v v , \tag{6}$$

$$\varepsilon = \left(E - \overline{K_u}\right)(z - K_v v) , \tag{7}$$

где $\overline{K_u} = K_u \left(K_u^T Q K_u\right)^{-1} K_u^T Q$.

Нетрудно видеть, что в случае одинаковой размерности векторов x и u $\overline{K_u} = E$, а, следовательно, $\varepsilon = 0$.

Управление по отклонению. Рассмотрим пропорциональный регулятор, реализующий следующий закон управления:

$$u = K\varepsilon, \tag{8}$$

где K - матричный коэффициент усиления, выбор которого предстоит осуществить, исходя из требования минимума квадратичной формы (2). Для этого предварительно найдем величину ошибки ε. Из (8) и (1) непосредственно следует уравнение для вектора ошибок:

$$(E + K_u K)\varepsilon = z - K_v v, \tag{9}$$

из которого ошибка ε может быть представлена в виде:

$$\varepsilon = (E + K_u K)^{-1}(z - K_v v). \tag{10}$$

Поскольку второй сомножитель в (10) произволен, то для минимизации ошибки необходимо выбрать матрицу K таким образом, чтобы первый сомножитель в (10) был максимально близким к нулевой матрице.

Рассмотрим случай, когда $m = n$ т.е. K и K_u квадратные $n \times n$ матрицы. Будем искать матрицу K такой, чтобы матрица $K_u K$ имела структуру:

$$K_u K = C, \tag{11}$$

где $C = diag(c_1, c_2 \ldots c_n)$ - диагональная матрица, подлежащая в дальнейшем определению. Решение (11) запишется как

$$K = K_u^{-1} C. \tag{12}$$

В этом случае матричный сомножитель в соотношении (10) примет вид

$$D = (E + K_u K)^{-1} = diag\left(\frac{1}{1+c_1}, \frac{1}{1+c_2}, \cdots, \frac{1}{1+c_n}\right). \tag{13}$$

Полученная структура матрицы D позволяет, во-первых, обеспечить автономность управления, а, во-вторых, минимизировать ошибку ε путем выбора достаточно больших значений диагональных элементов матрицы C.

Если $m < n$, то система уравнений (11) в общем случае несовместна и можно говорить только о нахождении приближенного решения (11) в смысле минимума квадратичного отклонения невязки. Т.е.:

$$K = \left(K_u^T K_u\right)^{-1} K_u^T C. \tag{14}$$

В соотношении (14) по сравнению с (12) вместо матрицы K^{-1} рассматривается псевдообратная матрица $K^+ = \left(K_u^T K_u\right)^{-1} K_u^T$. В результате матрицы $K_u K$ и D будут отличаться от диагональных и полученная замкнутая система уже не будет автономной.

Комбинированное управление. Предположим, что вектор возмущения v содержит r измеряемых и l неизмеряемых компонент. Т.е. вектор v имеет структуру $v = (v_1, v_2)$, где компоненты вектора v_1 известны. Это позволяет скомбинировать законы управления по возмущению и отклонению:

$$u = K_\varepsilon \varepsilon + K v_1, \tag{15}$$

где K_ε и K - матричные коэффициенты усиления регулятора.

Уравнение объекта (1) представим в виде

$$x = K_u u + K_{v_1} v_1 + K_{v_2} v_2, \tag{16}$$

где матрицы K_{v_1} и K_{v_2} блоки матрицы K_v в (1), соответствующие измеряемой и неизмеряемой составляющим вектора v.

Найдем ошибку ε исходя из (15) и (16). В результате получим

$$\varepsilon = \left(E + K_u K_\varepsilon\right)^{-1}\left[z - \left(K_u K + K_{v_1}\right)v_1 - K_{v_2} v_2\right]. \tag{17}$$

Нетрудно видеть из (17), что в случае квадратной невырожденной матрицы K_u можно выбором K в виде

$$K = -K_u^{-1} K_{v_1} \tag{18}$$

достичь полной компенсации измеряемого возмущения v_1. Если же $m < n$, то возможна лишь приближенная компенсация v_1, в этом случае матричный коэффициент усиления K находится на основе метода наименьших квадратов:

$$K = -\left(K_u^T K\right)^{-1} K_u^T K_{v_1}. \tag{19}$$

Матрица K_ε в законе управления (15) находится по аналогии с определением матричного коэффициента усиления K для случая управления по отклонению: (12), (14).

Интегрирующий регулятор. Рассмотренные выше подходы к управлению квазистатическими системами реализуют принцип пропорционального регулирования предполагающего безынерционное изменение положения управляющего органа. В реальных же условиях формирование управляющего воздействия осуществляется исполнительными устройствами, которые представляю собой либо интеграторы, либо инерционные звенья. Рассмотрим случай, когда исполнительные устройства представляют собой интегрирующие звенья. Тогда математическая модель регулятора примет вид:

$$T\dot{u} = K\varepsilon, \tag{20}$$

где T - диагональная матрица постоянных времени интегрирования, K - матричный коэффициент усиления, подлежащий в дальнейшем определению.

Исключая из (1) и (20) переменные ε и x, получим систему дифференциальных уравнений относительно вектора управляющих воздействий u:

$$T\dot{u} + KK_u u = Kz - KK_v v. \tag{21}$$

Динамические характеристики (21) определяются матрицами T, K_u, K. Выбором K в случае $m = n$ можно получить любое наперед заданное распределение корней характеристического уравнения системы (21). Если же $m < n$, то матрицы K и K_u становятся прямоугольными $m \times n$ и $n \times m$ соответственно и в этом случае реализация матрицы системы с заданным распределением собственных чисел может быть получена приближенно на основе метода наименьших квадратов.

Рассмотрим поведение управляемой системы (21) в квазистатическом режиме, приравняв $\dot{u}$ нулю. В результате получим линейную систему для определения множества положений равновесия:

$$KK_u u - Kz + KK_v v = 0 . \qquad (22)$$

В общем случае, когда $m < n$ из (22) следует

$$u^* = \left(KK_u\right)^{-1} Kz - \left(KK_u\right)^{-1} KK_v v . \qquad (23)$$

Соответствующие управлению u^* вектор выходных координат x^* и вектор ошибок ε^* находятся подстановкой (23) в уравнения объекта:

$$\begin{aligned} x^* &= K_u\left(KK_u\right)^{-1} Kz - K_u\left(KK_u\right)^{-1} KK_v v + K_v v, \\ \varepsilon^* &= \left(E - \overline{K}\right)\left(z - K_v v\right), \end{aligned} \qquad (24)$$

где $\overline{K} = K_u\left(KK_u\right)^{-1} K$.

Соотношение (24) для ошибки в этом случае совпадает по структуре с выражением (7) для случая управления по возмущающему воздействию. Они становятся идентичными в случае «квадратной» системы при $m = n$, когда $\overline{K} = \overline{K_u} = E$, что приводит к нулевой ошибке. В общем же случае ($m < n$) установившаяся ошибка ε^* будет всегда отлична от нуля и может быть минимизирована соответствующим выбором матрицы коэффициентов усиления K с учетом требований к динамическим показателям системы (21).

Заключение. Предложены лишь самые общие подходы к синтезу регуляторов квазистатическим технологическим процессам. В развитие изложенных методов необходимо рассмотреть вопросы устойчивости процессов управления объектами такого рода, а также гарантирующих стратегий выбора параметров регуляторов в условиях неопределенности характеристик объекта управления.

Список литературы: 1. *Васильева А.Б.* О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, - Матем. Сб. 31(73), 1952. – стр. 27-32. 2. *Н.А. Картвелишвили, Ю.И. Галактионов* Идеализация сложных динамических систем, - Наука, - М. – 1976, - 272с. 3. *А.Г. Александров* Синтез регуляторов многомерных систем, Машиностроение, - М. – 1986. – 272с. 4. *А.С. Куценко, Чан Занг Лю* Критерии адекватности динамических и статических математических моделей технологических процессов // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2003. - № 18. – стр. 23-28.

Поступила в редколлегию 20.11.05