

Выводы. В работе построены математические модели, адекватные соответствующей физической задаче. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца с границей – цилиндрической поверхностью с продольными щелями, сведены к гиперсингулярным, а также к сингулярным интегральным уравнениям на системе отрезков. На базе этих граничных интегральных уравнений построены дискретные математические модели (9), (14) для приближенного (с контролируемой точностью) решения указанных краевых задач. Построенные дискретные математические модели, позволяют проводить численные эксперименты по определению технических характеристик (диаграмм направленностей, полей в ближней зоне) для антенн с конечным числом продольных щелей, как это сделано, например, в [1].

Список литературы: 1. Духопельников С.В. Математические модели для расчета технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 68. С. 76-86. 2. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145 с. 3. Гандель Ю.В. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла на многощелевых цилиндрических структурах и граничные интегральные уравнения на системе отрезков / Ю. В. Гандель, С. В. Духопельников // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : Зб. наук. праць. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 16. – С. 264-293. 4. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие, часть I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. / Харьков: Издательство Харьковско-го национального университета, 2001. – 92 с. 5. Гандель Ю. В. Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems. / X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. – P.57-62.

Поступила в редколлегию 04.04.2011

УДК 539.1

А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»;

А.И. ДЕРИЕНКО, канд. техн. наук, доц., КУСИТУ, Кременчуг

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИНТОВОГО СТЕРЖНЯ

Створено лінійаризовану модель і складено рівняння енергетичного балансу для незгасаючої гармонічної хвилі трансляції (гвинтового фонона), що рухається по циліндричному гвинтовому стрижню зі швидкістю звука. Запропонована модель квантування амплітуди хвилі.

Создана линеаризованная модель и составлено уравнение энергетического баланса для незатухающей гармонической волны трансляции (винтового фонона), движущейся по цилиндрическому винтовому стержню. Предложена модель квантования амплитуды волны.

A mineralized model has been created and also an equation of the energy balance for a sustained harmonic repeater wave (screw phonon), which moves along a cylindrical spiral core has been formulated. A model of the quantization of a wave amplitude has been suggested.

Введение и постановка задачи. В работах [1-3] представлены результаты исследования высокочастотных колебаний в упругих трёхмерных континуумах, которые, возможно, открывают дорогу для механического истолкования квантовых эффектов микромира, а также к пониманию природы фундаментальных физических полей. Если указанная там схема взаимодействия полей действительно имеет отношение к решению универсальных проблем, то она открывает перспективу для освоения принципиально нового источника энергии. Точнее – она указывает на существование такого источника, но метод его освоения ещё предстоит разработать. Речь идёт об энергии донорского поля, поддерживающего существование фундаментальных силовых полей (гравитационного, электрического, и др.). Как следует из новой концепции, *все эти поля являются полями синфазных колебаний*, что является простейшим разумным объяснением и материальной основой наблюдающегося единства мира.

Однако чтобы прояснить механизм функционирования фундаментальных полей и, возможно, найти способ для непосредственного подключения к донорскому полю, нужно основательно изучить эти проблемы на более простых моделях меньшей физической размерности. Без этого знания проводить эксперименты с физическим пространством опасно и безответственно.

Математическая модель, описанная в [4], представляет собой новый инструмент для исследования связанных нелинейных колебаний и автоколебаний, возникающих в упругом одномерном и однородном континууме (винтовом стержне). Работа с этим инструментом только началась, но уже получен ряд результатов, представляющих интерес (смотри [5-7]). Часть этих результатов, касающаяся синтеза простейших автоколебательных волн трансляции (*винтовых фононов*), помещена в данной статье.

Линеаризованные уравнения фонона. Учёт трения. Уравнения модели [4] используют сопряжённые матрицы влияния (см. далее). Это означает, что они описывают замкнутую механическую систему, в которой общая механическая энергия остаётся постоянной.

Если учесть влияние трения, то часть энергии колебаний рассеется в тепло, и механическая энергия всей системы будет убывать. Но отдельные части такой системы могут определённое время получать энергию от других частей, достаточную для стабилизации своих колебаний. По такому принципу, напр., работает часовой механизм; далее мы покажем, что нечто похожее наблюдается и при автоколебаниях винтового стержня.

Фотон, как это принято в квантовой механике, является простой (самостоятельной) моногармонической волной, имеющей постоянную максимальную амплитуду на фронте и медленное затухание по длине [8]; этим он отличается от волновых пакетов интерферирующих волн, имеющих сложную структуру. У затухания волны трансляции, распространяющейся по упругому континууму, гипотетически, могут быть две причины:

- дисперсия волн (эта причина для фонона не актуальна),

- трение в материале (внутреннее) или на поверхности стержня (внешнее).

Трение необходимо учесть; именно этот фактор обычно обеспечивает устойчивость движения механической системы; в комплексе с другими условиями, он способен обеспечить стабильность фонона.

Будем считать, что внешнее трение пропорционально скоростям смещения координат (с коэффициентом f_v), а внутреннее – обобщённым силам (с коэффициентом f_q); в механике такие силы трения называют *линейными* (см. работу [9]). Кроме того, будем учитывать вязкое или гистерезисное внутреннее трение, определяемое коэффициентом f_α .

В случае гармонических колебаний операторы Кельвина – Фойгхта для вязкого и Шлиппе – Колара для гистерезисного трения записываются одинаково (см. [10]), но во втором случае коэффициент трения f_α зависит от частоты, а в первом – не зависит. В результате при вязком трении логарифмический декремент k_T затухания колебаний растёт пропорционально частоте ω , а при гистерезисном трении – не изменяется.

Физической причиной внутреннего линейного трения является неравномерность деформации материала в пределах сечения проволоки, а внутреннего вязкого или гистерезисного трения – неравномерность деформации материала для близких сечений. В стержнях, изготовленных из стали, никеля или др. ферромагнитных материалов, внутреннее трение является гистерезисным.

Внешнее линейное трение и вязкое внутреннее трение изменяет в математической модели [4] уравнения движения,

$$Mx \left(\frac{\partial Vx}{\partial \tau} + f_v \cdot Vx \right) = \frac{\partial Qx}{\partial \theta} - B Qx + f_\alpha \left(\frac{\partial^2 Qx}{\partial \theta \partial \tau} - B \frac{\partial Qx}{\partial \tau} \right) + \Omega \cdot Qy, \quad (1)$$

$$My \left(\frac{\partial Vy}{\partial \tau} + f_v \cdot Vy \right) = \frac{\partial Qy}{\partial \theta} + B^T Qy + f_\alpha \left(\frac{\partial^2 Qy}{\partial \theta \partial \tau} + B^T \frac{\partial Qy}{\partial \tau} \right) + \Omega \cdot Qx, \quad (2)$$

а внутреннее линейное трение – уравнения деформации:

$$Cx \left(\partial Qx / \partial \tau + f_q \cdot Qx \right) = \partial Vx / \partial \theta + B^T Vx + \Omega \cdot Vy, \quad (3)$$

$$Cy \left(\partial Qy / \partial \tau + f_q \cdot Qy \right) = \partial Vy / \partial \theta - B \cdot Vy + \Omega \cdot Vx, \quad (4)$$

где матрицы связи

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cx_3 Qx_3 & -cx_2 Qx_2 \\ -cx_3 Qx_3 & 0 & 0 \\ cx_2 Qx_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$Mx, \dots, Cy$ – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения стержня, $mx_1, my_2, my_3, cx_2, cy_1 = 1$,

$$mx_2, my_1, cy_3 = \frac{1}{4z^2}, cx_3 = 1 + \mu, mx_3 = \frac{1}{2z^2}, cx_1, cy_2 = \frac{1 + \mu}{2z^2},$$

μ – коэффициент Пуассона; z – индекс навивки стержня; $Qx_1, Qx_2, \dots, Qy_3$ – упругие силы,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \dot{X} = Vx = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \dot{Y} = Vy = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}, Qx = \begin{bmatrix} Qx_1 \\ Qx_2 \\ Qx_3 \end{bmatrix}, Qy = \begin{bmatrix} Qy_1 \\ Qy_2 \\ Qy_3 \end{bmatrix};$$

θ – угловая координата сечения (рис.1), τ – безразмерное время.

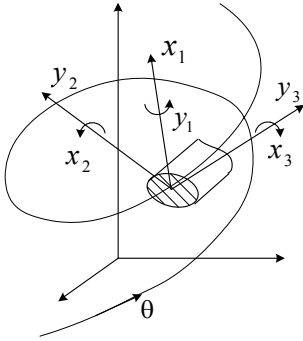


Рисунок 1 – Координаты поперечного сечения

Заметим, что после учёта гистерезиса коэффициенты податливости, используемые в формуле (5), могут отличаться от диагональных элементов матрицы Cx , поэтому далее мы будем помечать их знаком «*».

В этих уравнениях, в отличие от общего случая, описываемого моделью [4], принято, что все деформации оси равны 0: $\varepsilon_{1,2,3} = 0$, а проекция вектора кривизны на направление нормали не изменяется: $\chi_1 = 0$.

Величину ε_1 допустимо считать нулевой, поскольку она пропорциональна силе q_1 , которая для винтового фоновна, отвечающего нижней прямолинейной ветви характеристической диаграммы, мала (см. формулы и рисунки работы [7]); кроме того, при индексе $z > 7$ мал коэффициент податливости cx_1 . Деформации $\varepsilon_{2,3}$, а также проекцию χ_1 допустимо считать нулевыми, поскольку они отвечают группе поперечных колебаний, а их амплитуда в описываемом процессе крайне мала.

Поскольку мы рассматриваем колебания, имеющие малую амплитуду, а величина матрицы связи Ω так же мала, то последние слагаемые уравнений (1) и (3) можно считать постоянными. Значения этих «чужих» для данного уравнения величин будем, обозначать Vy_0, Qy_0 , они определяются низкочастотными поперечными колебаниями винтового стержня, а также соответствующими статическими деформациями (если таковые присутствуют).

Сказанное означает, что мы можем вычлениить из системы (1) – (5) замкнутую подсистему уравнений

$$Mx \left(\frac{\partial Vx}{\partial \tau} + f_v \cdot Vx \right) = \frac{\partial Qx}{\partial \theta} - B \cdot Qx + f_a \left(\frac{\partial^2 Qx}{\partial \theta \partial \tau} - B \frac{\partial Qx}{\partial \tau} \right) + \Omega \cdot Qy_0, \quad (6)$$

$$Cx \left(\frac{\partial Qx}{\partial \tau} + f_q \cdot Qx \right) = \partial Vx / \partial \theta + B^T Vx + \Omega \cdot Vy_0, \quad (7)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cx_3^* \cdot Qx_3 & -cx_2^* \cdot Qx_2 \\ -cx_3^* \cdot Qx_3 & 0 & 0 \\ cx_2^* \cdot Qx_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Система (6) – (8) является моделью винтового фонона. Поскольку при

$$cx_{2,3}^* = const \quad (8a)$$

модель линейна, то среди её решений содержатся моногармонические колебания; учёт трения приводит к тому, что эти колебания затухают по длине волны. Решения Vx , Qx , и Ω системы после подстановки в оставшиеся уравнения (2), (4) и их интегрирования при нулевых начальных и граничных условиях определяет так называемый *инверсионный след фонона*, проявляющийся в виде изменения координат из группы поперечных колебаний.

Коэффициент затухания и спин фонона. Будем искать решения системы уравнений (6) – (8) в форме волны трансляции $vf, qf(\theta + v_f \cdot \tau)$, где v_f – скорость волны, близкая к скорости звука a_{non} . В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} Mx(v_f \cdot vf' + f_v \cdot vf) &= qf' + f_\alpha v_f qf'' - B \cdot (qf + f_\alpha v_f qf') + \Omega \cdot Qy0 \\ Cx(v_f \cdot qf' + f_q \cdot qf) &= vf' + B^T \cdot vf - \Omega^T \cdot Vy0 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где
$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cx_3 qf_3 & -cx_2 qf_2 \\ -cx_3 qf_3 & 0 & 0 \\ cx_2 qf_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общий порядок этой системы после учёта вязкого (или гистерезисного) трения оказался равным 9-ти, а не 6-ти, что было бы более логичным. Кроме того, это трение нарушает симметрию уравнений. Поэтому, чтобы упростить анализ и сохранить симметрию, мы далее в этой работе будем исследовать частный случай этой системы, при котором влияние вязкого или гистерезисного трения непосредственно не учитывается (коэффициент $f_\alpha = 0$), а аналогичный эффект затухания обеспечивается за счёт внутреннего линейного трения. Соответствующая система уравнений имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Mx(v_f \cdot vf' + f_v \cdot vf) &= qf' - B \cdot qf + \Omega \cdot Qy0 \\ Cx(v_f \cdot qf' + f_q \cdot qf) &= vf' + B^T \cdot vf + \Omega \cdot Vy0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Характеристическое уравнение системы (10) имеет корень $k = 0$ второй кратности и две пары комплексно сопряжённых корней, причём, как показало компьютерное моделирование, координаты одной пары приблизительно со-

ответствуют координатами точки пересечения для средней ветви характеристического уравнения и прямой линии $\omega^2 = v_f^2 \cdot \alpha^2$ (рис. 2).

Такое совпадение является закономерным следствием слабого влияния трения и матрицы Ω .

Известно, что влияние каждого слабого фактора можно исследовать отдельно от других. Так, если в системе (10) отказаться от учёта трения (принять условие $f_{v,q} = 0$), то

полученная система уравнений

$$\left. \begin{aligned} Mx \cdot v_f \cdot v f' &= q f' - B \cdot q f + \Omega \cdot Q y 0 \\ Cx \cdot v_f \cdot q f' &= v f' + B^T \cdot v f - \Omega^T \cdot V y 0 \end{aligned} \right\}, \quad (10 \text{ а})$$

как показал её анализ, будет иметь пару мнимых характеристических чисел $\pm k_1 i$, определяющих волновое число α затухающего гармонического колебания. Величину α найдём, решив систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= v_f^2 \cdot \alpha^2 \\ \omega^2 &= \omega_c^2 + a_{non}^2 \cdot \alpha^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\omega_c^2}{v_f^2 - a_{non}^2}. \quad (11)$$

Если в системе (10) отказаться от учёта влияния поперечных колебаний (то есть принять условие $\Omega = 0$), то полученная система

$$\left. \begin{aligned} Mx(v_f \cdot v f' + f_v \cdot v f) &= q f' - B \cdot q f \\ Cx(v_f \cdot q f' + f_q \cdot q f) &= v f' + B^T \cdot v f \end{aligned} \right\}, \quad (10 \text{ б})$$

как показал её анализ, будет иметь пару комплексно сопряжённых характеристических чисел вида $\beta_0 k_1^2 \pm i k_1$, где число k_1 практически то же, что и выше ($k_1 \approx \alpha$ – это волновое число, определенное равенством (11)), а вещественная часть определяет логарифмический декремент затухания волны

$$k_T = \left[0.5(f_v + f_q) / \omega_c^2 \right] \cdot \omega. \quad (12)$$

Формула (12) была получена при обобщении результатов численного решения характеристического уравнения системы (10 б), но затем было найдено её аналитическое обоснование. Приведём это обоснование.

Если не учитывать трение, то, как показано в [7], на рассматриваемой ветви диаграммы частота ω и волновое число α будут связаны равенством

$$cx_3 + cx_2 \alpha^2 - mx_3 cx_2 cx_3 \omega^2 = 0,$$

которое можно переписать в следующем эквивалентном виде:

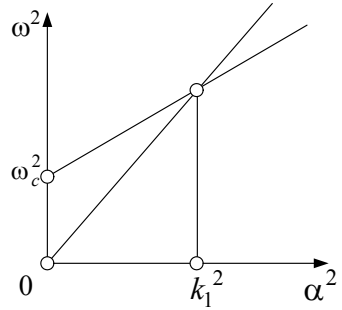


Рисунок 2 – Связь между волновым числом и скоростью фона

$$(cx_3i\omega) + (cx_2i\omega)\alpha^2 + (mx_3i\omega)(cx_2i\omega)(cx_3i\omega) = 0. \quad (13)$$

Учёт линейного трения сводится к соответствующей корректировке дисперсионного уравнения:

$$\det \begin{bmatrix} (i\omega + f_v)Mx & i\alpha I + B \\ i\alpha I + B^T & (i\omega + f_v)Cx \end{bmatrix} = 0. \quad (14)$$

Становится понятным, что для учёта трения достаточно в равенстве (13) заменить $(cx_{2,3}i\omega)$ и $(mx_3i\omega)$ выражениями $(cx_{2,3}(i\omega + f_q))$ и $(mx_3(i\omega + f_v))$:

$$cx_3(i\omega + f_q) + cx_2(i\omega + f_q)\alpha^2 + mx_3(i\omega + f_v)cx_2(i\omega + f_q)cx_3(i\omega + f_q) = 0$$

и сократить полученное равенство на общую скобку:

$$cx_3 + cx_2\alpha^2 + mx_3cx_2cx_3(i\omega + f_v)(i\omega + f_q) = 0.$$

После деления на $mx_3cx_2cx_3$ уравнение приобретает знакомый вид:

$$\omega_c^2 + a^2\alpha^2 = (\omega - f_v i)(\omega - f_q i). \quad (15)$$

При условии $\omega = \nu f \cdot \alpha$ уравнение (15) становится квадратным

$$(\nu f^2 - a^2) \cdot \alpha^2 - i(f_v + f_q)\nu f \cdot \alpha + f_v f_q - \omega_{c,n}^2 = 0,$$

и, если

$$f_v + f_q \ll 2\omega_c^2 / \omega, \quad (16)$$

то его решения $\alpha_{1,2} \approx i \frac{(f_v + f_q)\nu f}{2(\nu f^2 - a^2)} \pm \frac{\omega_c}{\sqrt{\nu f^2 - a^2}} \approx \alpha \left(1 + i \frac{(f_v + f_q) \cdot \omega}{2 \cdot \omega_c^2} \right),$

что и требовалось доказать.

Таким образом, величина декремента затухания оказалась пропорциональным волновому числу или частоте, то есть таким же, как для вязкого трения [9]. Поэтому отказ от учёта вязкого трения оказался оправданным.

Для учёта гистерезисного трения величину коэффициента трения f_q нужно корректировать, а именно уменьшать пропорционально увеличению частоты ω :

$$f_q = f_0 \cdot \omega_0 / \omega,$$

где ω_0 – характерное значение частоты, отвечающее условию $\alpha > 2$.

В обоих случаях влиянием внешнего трения допустимо пренебречь.

У стали внутреннее трение является гистерезисным, а коэффициент затухания не зависит от частоты. В результате мы пришли к следующей формуле для коэффициента линейного внутреннего трения в стальном стержне:

$$f_q = 2k_T \cdot \omega_c^2 / \omega. \quad (17)$$

Следовательно, у системы уравнений (10) существует двухпараметрическое множество решений, отвечающее комплексно сопряжённой паре харак-

теристических чисел $k_T \alpha \pm i \alpha$, причём точка с координатами $\alpha^2, \omega^2 = v_f^2 \cdot \alpha^2$ расположена вблизи рассматриваемой ветви дисперсионного уравнения. В вещественной форме это множество решений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} v f(\theta) \\ q f(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v x_1 \cdot \cos \alpha \theta \\ -v x_2 \cdot \sin \alpha \theta \\ v x_3 \cdot \cos \alpha \theta \\ q x_1 \cdot \cos \alpha \theta \\ -q x_2 \cdot \sin \alpha \theta \\ q x_3 \cdot \cos \alpha \theta \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} v x_1 \cdot \sin \alpha \theta \\ v x_2 \cdot \cos \alpha \theta \\ v x_3 \cdot \sin \alpha \theta \\ q x_1 \cdot \sin \alpha \theta \\ q x_2 \cdot \cos \alpha \theta \\ q x_3 \cdot \sin \alpha \theta \end{pmatrix} C_2 \cdot \exp(-k_T \alpha \theta) \cdot \eta(\theta), \quad (18)$$

где $\eta(\theta)$ – ступенчатая функция Хевисайда; C_1, C_2 – произвольные константы; $v x_j, q x_j$ – компоненты форм колебаний, описываемые теми же формулами, которые в работе [7] получены для модели, не учитывающей трение.

Формуле (18) можно придать другую форму:

$$\begin{pmatrix} v f(\theta) \\ q f(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v x_1 \cdot \sin(\alpha(\theta + \psi)) \\ v x_2 \cdot \cos(\alpha(\theta + \psi)) \\ v x_3 \cdot \sin(\alpha(\theta + \psi)) \\ q x_1 \cdot \sin(\alpha(\theta + \psi)) \\ q x_2 \cdot \cos(\alpha(\theta + \psi)) \\ q x_3 \cdot \sin(\alpha(\theta + \psi)) \end{pmatrix} \cdot A \cdot \exp(-k_T \alpha \theta) \cdot \eta(\theta),$$

где ψ, A – фаза и амплитуда колебания.

Затухание волны имеет логарифмический декремент

$$k_T = 0.01 \dots 0.02 \cdot (2\pi)^{-1}.$$

Базисные функции представления (18) имеют вид, показанный на рис.3.

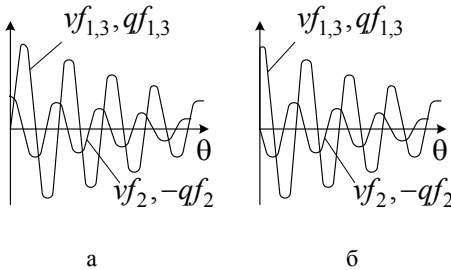


Рисунок 3 – Синусная (а) и косинусная (б) формы фона

Название формы определяет её ведущая характеристика – угловая скорость $v f_3$ закручивания витка. Заметим, что разные компоненты этих функций различаются по своей величине на много порядков, поэтому на рис.2 сходные формы колебаний приведены к одному масштабу. Изменение изгибающего момента $q f_2$ отстаёт от изменения скорости $v f_3$ на четверть длины волны.

Интеграл от скорости $v f_3$ определяет внутренний момент количества

движения волны; в квантовой механике [8] такая величина называется *спином* I_3 :

$$I_3 = \int_0^{\infty} mx_3 \cdot v f_3(\theta) d\theta . \quad (19)$$

Поскольку ось распространения волны имеет винтовую форму с постоянным углом подъёма, данная величина пропорциональна так называемой *третьей компоненте изотопического спина*.

Несобственный интеграл (19) легко вычисляется при использовании таблицы преобразования Лапласа. Здесь и в дальнейшем нам понадобятся следующие результаты:

$$\int_0^{\infty} e^{-kas} \cdot \sin(\alpha s) ds = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+k^2} ; \quad \int_0^{\infty} e^{-kas} \cdot \cos(\alpha s) ds = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+k^2} ; \quad (20)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2kas} \cdot \cos^2(\alpha s) ds = \frac{1}{4k\alpha} \cdot \frac{1+2k^2}{1+k^2} , \quad \int_0^{\infty} e^{-2kas} \cdot \sin^2(\alpha s) ds = \frac{1}{4k\alpha} \cdot \frac{1}{1+k^2} . \quad (21)$$

Для синусной формы фонона имеем

$$I_3 = A \cdot mx_3 \cdot \int_0^{\infty} \exp(-k_T \alpha \theta) \cdot \sin(\alpha \theta) d\theta = mx_3 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{A}{1+k_T^2} \approx mx_3 \cdot \frac{A}{\alpha} , \quad (19 \text{ а})$$

для косинусной формы

$$I_3 = A \cdot mx_3 \cdot \int_0^{\infty} \exp(-k_T \alpha \theta) \cdot \cos(\alpha \theta) d\theta = mx_3 \cdot \frac{k_T}{\alpha} \cdot \frac{A}{1+k_T^2} \approx mx_3 \cdot \frac{A \cdot k_T}{\alpha} , \quad (19 \text{ б})$$

где A – амплитуда волны.

Оказалось, что при одной и той же амплитуде синусная форма имеет на три порядка больший спин, чем косинусная. Поэтому синусную форму фонона можно иначе называть *спиновой*, а косинусную – *без спиновой*.

В заключение этого пункта заметим, что мы пока не можем ничего сказать об амплитуде фонона; решаемая система уравнений однородна, и поэтому амплитуда может быть любой. С другой стороны, это соображение верно для внутренних точек волны, но не для её фронта. На фронте слабой ударной волны амплитуда должна удовлетворять определённым условиям, обеспечивающим её равновесие. Подробное изучение вопроса – в следующих пунктах.

Уравнение энергетического баланса. Запишем уравнения (6), (7) при условии $f_{\alpha} = 0$:

$$Mx(\partial Vx / \partial \tau + f_v Vx) = \partial Qx / \partial \theta - B Qx + \Omega \cdot Qy0 , \quad (6 \text{ а})$$

$$Cx(\partial Qx / \partial \tau + f_q \cdot Qx) = \partial Vx / \partial \theta + B^T Vx + \Omega \cdot Vy0 , \quad (7 \text{ а})$$

скалярно умножим обе части уравнения (6 а) на вектор скоростей Vx , а урав-

нения (7 а) – на вектор сил Qx , после чего левые и правые части полученных равенств складываются между собой. Получим:

$$\begin{aligned} (Mx \cdot Vx, \partial Vx / \partial \tau) + (Cx \cdot Qx, \partial Qx / \partial \tau) + f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx) = \\ = (Vx, \partial Qx / \partial \theta) + (Qx, \partial Vx / \partial \theta) - (Vx, B \cdot Qx) + (Qx, B^T \cdot Qx) + \\ + (Vx, \Omega \cdot Qy0) + (Qx, \Omega \cdot Vy0), \end{aligned} \quad (22)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} \partial / \partial \tau [0.5(Mx \cdot Vx, Vx) + 0.5(Cx \cdot Qx, Qx)] + f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx) = \\ = \partial / \partial \theta (Vx, Qx) + (\Omega^T \cdot Vx, Qy0) + (\Omega^T \cdot Qx, Vy0). \end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем обе части этого равенства по промежутку $\theta \in (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} (Mx \cdot Vx, Vx) + \frac{1}{2} (Cx \cdot Qx, Qx) \right] d\theta + \int_0^\infty [f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx)] d\theta = \\ = (Vx, Qx) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty [(\Omega^T \cdot Vx, Qy0) + (\Omega^T \cdot Qx, Vy0)] d\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

В силу затухания волны верхняя подстановка равна 0.

Каждое слагаемое формулы (23) имеет механический смысл. Так, величина

$$E_n = \int_0^\infty [0.5(Mx \cdot Vx, Vx) + 0.5(Cx \cdot Qx, Qx)] d\theta \quad (24)$$

определяет полную механическую энергию волны, состоящую из двух видов:

- кинетической энергии $T_n = \int_0^\infty [0.5(Mx \cdot Vx(\theta), Vx(\theta))] d\theta$;
- потенциальной энергии $\Pi_n = \int_0^\infty [0.5(Cx \cdot Qx(\theta), Qx(\theta))] d\theta$.

Распределение энергии на кинетическую и потенциальную части, а также по видам деформации (сдвиг, изгиб и кручение), было представлено в [7]. Основная доля энергии винтового фонона связана с кручением стержня.

Величина

$$N_T = \int_0^\infty [f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx)] d\theta \quad (25)$$

определяет суммарную мощность сил внешнего и внутреннего трения.

Величина

$$N_{nep} = (Vx(0), Qx(0)) \quad (26)$$

определяет мощность потока энергии через неподвижное сечение стержня $\theta = 0$; в этом сечении в данный момент времени находится «голова» волны (далее мы будем называть это сечение *нелинейным ядром фонона*).

Величина

$$N_0 = \int_0^\infty N(\theta) d\theta = \int_0^\infty [(\Omega^T \cdot Vx, Qy0) + (\Omega^T \cdot Qx, Vy0)] d\theta \quad (27)$$

определяет суммарную мощность, передаваемую от группы поперечных колебаний. В развёрнутом виде плотность $N(\theta)$ этой мощности определяется следующими формулами:

- при условии $\chi_2 = 0$ (на «гистерезисной полке», см. далее) –

$$N = \begin{pmatrix} \chi_3 \cdot Qx_2 \\ -\chi_3 \cdot Qx_1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot Vy0 + \begin{pmatrix} \chi_3 \cdot Vx_2 \\ -\chi_3 \cdot Vx_1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot Qy0, \quad (28)$$

- при условии $\chi_2 \neq 0$

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi_3 \cdot Qx_1 \\ -\chi_2 \cdot Qx_1 \end{pmatrix}^T \cdot Vy0 + \begin{pmatrix} \chi_3 \cdot Vx_2 - \chi_2 \cdot Vx_3 \\ -\chi_3 \cdot Vx_1 \\ -\chi_2 \cdot Vx_1 \end{pmatrix}^T \cdot Qy0, \quad (29)$$

где $\chi_3 = cx_3 Qx_3$, $\chi_2 = cx_2 Qx_2$.

Нуль в формуле (29) получился как результат очевидного равенства

$$\chi_3 \cdot Qx_2 - \chi_2 \cdot Qx_3 = cx_3 Qx_3 \cdot Qx_2 - cx_2 Qx_2 \cdot Qx_3 = 0.$$

Если учесть, что формула для форм низкочастотных колебаний длинной пружины также содержит три нуля, то скалярные произведения (28) и (29) содержат небольшое число слагаемых и остаются обозримыми:

$$N = cx_3 Qx_3 \cdot (Qx_2 + \Delta \cdot Vx_2) \cdot Ay0, \quad (28 \text{ а})$$

$$N = [\Delta \cdot cx_3 Qx_3 \cdot Vx_2 - cx_2 Qx_2 \cdot (Qx_1 + \Delta \cdot Vx_3)] \cdot Ay0. \quad (29 \text{ а})$$

Аналогичные, но более громоздкие формулы отвечают низкочастотным коротковолновым колебаниям, описанным в [7]. Но для кластера эти формулы предельно упрощаются:

$$N = -cx_3 Qx_3 \cdot Qx_1 \sin(\theta) Ay0, \quad (28 \text{ в})$$

$$N = -(cx_3 Qx_3 \sin(\theta) + cx_2 Qx_2 \cos(\theta)) \cdot Qx_1 Ay0. \quad (29 \text{ в})$$

Таким образом, равенство (23) можно трактовать как уравнение энергетического баланса, составленное для всей волны:

$$\partial E_n / \partial \tau + N_{nep} = N_0 - N_T. \quad (30)$$

Заметим, что для стабильной волны выполняется условие

$$E_n = const,$$

но, поскольку волна движется и переносит часть своей энергии через неподвижное сечение $\theta = 0$, то для этой волны должны выполняться условия:

$$\partial E_n / \partial \tau < 0 \quad (31 \text{ а})$$

и

$$\partial E_n / \partial \tau + N_{nep} > 0 \quad (31 \text{ б})$$

Условие (31 б) означает, что часть энергии, переносимой через сечение $\theta = 0$, рассеивается в нелинейном ядре фонона. Рассеивание является следствием трения и сглаживает фронт ударной волны (рис.4).

В равенстве (30) целесообразно перейти от частной производной по времени к полной производной, вычисленной *в силу решаемой системы дифференциальных уравнений*. Для этого к обеим частям прибавим величину

$$N_{fp} = v_f \cdot [0.5 \cdot (Mx \cdot Vx, Vx) + 0.5 \cdot (Cx \cdot Qx, Qx)] \big|_{\theta=0},$$

определяющую поток энергии через фронт волны. В результате получим:

$$dE_n / d\tau = N_0 - N_T + N_{fp} - N_{nep} \quad (32)$$

Учтём, что скорость $v_f = \lambda / \alpha$, а также систему соотношений

$$\left. \begin{aligned} Mx(i\lambda \cdot Vx + f_v \cdot Vx) &= i\alpha \cdot Qx - B \cdot Qx + \Omega \cdot Qy0 \\ Cx(i\lambda \cdot Qx + f_q \cdot Qx) &= i\alpha \cdot Vx + B^T \cdot Vx + \Omega \cdot Vy0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

справедливую для комплексного представления формы, и преобразуем последние два слагаемых правой части равенства (32):

$$\begin{aligned} N_{fp} - N_{nep} &= (\omega / \alpha) \cdot [0.5 \cdot (Mx \cdot Vx, Vx) + 0.5 \cdot (Cx \cdot Qx, Qx)] - (Qx, Vx) = \\ &= 0.5 \cdot (Qx, Vx) + 0.5 \cdot i \cdot \alpha^{-1} (B \cdot Qx, Vx) - 0.5 \cdot i \cdot \alpha^{-1} \cdot (\Omega \cdot Qy0 - f_v Vx, Vx) + \\ &+ 0.5(Vx, Qx) - 0.5i \cdot \alpha^{-1} \cdot (B^T \cdot Vx, Qx) - 0.5i \cdot \alpha^{-1} \cdot (\Omega \cdot Vy0 - f_q Qx, Qx) - (Qx, Vx) = \\ &= -0.5i \cdot \alpha^{-1} \cdot [(\Omega^T \cdot Qx, Vy0) + (\Omega^T \cdot Vx, Qy0)] + 0.5i \cdot \alpha^{-1} \cdot [f_v (Vx, Vx) + f_q (Qx, Qx)]. \end{aligned}$$

Следовательно, после перехода к вещественным формам равенство (32) принимает следующий вид:

$$dE_n / d\tau = N_0^* - N_T^*, \quad (34)$$

$$\text{где } N_0^* = \int_0^\infty [(\Omega^T Vx, Qy0) + (\Omega^T Qx, Vy0)] d\theta + \frac{0.5}{\alpha} [(\Omega^T Vx, Qy0) + (\Omega^T Qx, Vy0)] \big|_{\theta=0},$$

$$N_T^* = \int_0^\infty [f_v (Mx Vx, Vx) + f_q (Cx Qx, Qx)] d\theta + \frac{0.5}{\alpha} [f_v (Mx Vx, Vx) + f_q (Cx Qx, Qx)] \big|_{\theta=0}.$$

Заметим, что вторые слагаемые ΔN_0 и ΔN_T этих формул, как показали результаты конкретных расчётов, часто, но не всегда, значительно меньше первых, поэтому звёздочку в обозначении этих величин можно не писать, а на практике ограничиться приближённым равенством

$$dE_n / d\tau = N_0 - N_T \quad (34 \text{ а})$$

Следовательно, необходимые условия устойчивости (32) теперь можно заменить одним неравенством следующего вида:

$$N_0^* > N_T^*, \quad (35)$$

Неравенство предполагает, что избыток мощности

- частично будет рассеян трением на фронте волны,
- а основная часть из группы продольных колебаний будет возвращена назад, в группу поперечных колебаний.

Скоро мы покажем, как этот процесс, замыкающий круговорот энергии между связанными колебаниями, реализуется в ядре фонона на практике.

Условия (31) или (35) являются необходимыми, но не достаточными условиями устойчивости фонона. Кроме того, поскольку обе части неравенства (35) оказываются пропорциональными квадрату амплитуды фонона, то уравнение энергетического баланса не накладывает ограничений на величину этой амплитуды. В то же время, как известно из курса физики, амплитуда такой волны должна быть квантованной и зависеть от её частоты. В следующем пункте будет показано, что такие требования будут выполняться автоматически, если воспользоваться современными общепризнанными теориями нелинейной упругости и пластичности.

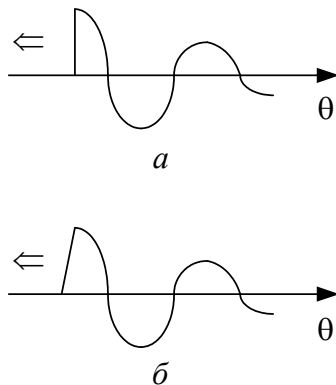


Рисунок 4 – Сглаживание фронта ударной волны (а) трением (б)

Гистерезисная модель квантования. Поскольку эта конкретная модель носит характер гипотезы, целесообразно начать с изложения тех требований, которым должна удовлетворять любая модель такого типа.

Известно [8], что энергия фотона пропорциональна частоте, а спин от частоты не зависит. Используем для описания фонона формулы (14), выберем, для определённости, синусную форму фонона, неизвестную амплитуду волны обозначим буквой A и, используя формулу (24), вычислим полную механическую энергию волны:

$$E_n = A^2 \cdot \int_0^\infty [0.5(Mx \cdot \nu f, \nu f) + 0.5(Cx \cdot qf, qf)] d\theta. \quad (36)$$

После раскрытия скалярных произведений мы получим интегралы

$$I_s = \int_0^\infty \exp(-2k_T \alpha \theta) \sin^2(\alpha \theta) d\theta \quad \text{и} \quad I_c = \int_0^\infty \exp(-2k_T \alpha \theta) \cos^2(\alpha \theta) d\theta,$$

которые при малом значении декремента k_T принимают близкие значения:

$$I_s, I_c = 1/(4k_T\alpha) .$$

Следовательно, равенство (36) принимает вид:

$$E_n = A^2 / (4k_T\alpha) \cdot [0.5(Mx \cdot vx, vx) + 0.5(Cx \cdot qx, qx)] ,$$

где, напоминаем, vx, qx – это компоненты формы гармонических колебаний.

Выражение, стоящее в квадратных скобках, определяет плотность

$$E_1 = T_1 + P_1 = z^{-2} \quad (37)$$

энергии формы. Следовательно,

$$E_n = A^2 / (4k_T\alpha) \cdot E_1 \quad (38)$$

Заметим, что вычисление энергии для косинусной формы фонона приведёт, как это ясно из анализа приведенных выше выкладок, к точно такому же результату, то есть *при совпадении амплитуд синусная и косинусная формы фонона обладают одинаковой энергией.*

Теперь, следуя Планку, будем считать, что

$$E_n \sim \omega .$$

Тогда должно выполняться соотношение

$$A^2 \sim \omega \alpha ,$$

и, поскольку в области $\alpha \gg 1$ коротких волн можно принять условие

$$\alpha \sim \omega ,$$

то мы приходим к *требованию пропорциональности амплитуды A и частоты λ* :

$$A \sim \omega . \quad (39)$$

Это же требование обеспечивает постоянство спина волны:

$$I_3 = mx_3 \cdot (A/\alpha) = const . \quad (40)$$

Ранее в [7] было показано, что для рассматриваемой здесь формы амплитуды колебания моментов кручения qx_3 и изгиба qx_2 на любой частоте $\omega > 2\omega_{c.n}$ определяются таким образом, что их отношение пропорционально частоте ω . Следовательно, если по какой-либо причине величину момента изгиба зафиксировать, то момент кручения будет возрастать пропорционально частоте. И точно также пропорционально частоте будет возрастать амплитуда волны A , что и требуется получить.

Но здесь, априори, возникают два естественных вопроса. Какой «механизм» сможет обеспечить постоянство изгибающего момента при любых частотах колебания стержня? И где он должен располагаться – внутри стержня (внутренние факторы) или за его пределами (внешние факторы)? Ясно, что ответы на эти вопросы не являются однозначными и реализация такого механизма на практике может быть различной. Но замечательным обстоятельством оказывается то, что такой механизм у природы уже есть, и не нужно изобретать ничего нового. Достаточно внимательно проанализировать то, что уже давно и хорошо известно.

Известно, что закон Гука, постулирующий пропорциональность силы и

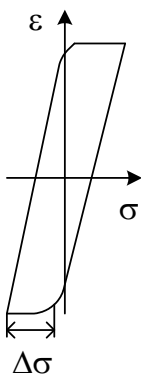


Рисунок 5 – петля гистерезиса

деформации в твёрдом теле, имеет место только для ограниченного диапазона нагрузок [11]. За пределами этого диапазона происходит пластическое упрочнение материала, после чего связь между нагрузкой σ и деформацией ε при гармонических колебаниях нагрузки описывается так называемой гистерезисной кривой (рис. 5). Работы деформации и разгрузки здесь не совпадают, что приводит к возникновению гистерезисного трения. Относительная площадь петли гистерезиса определяет величину декремента k_T затухания колебаний.

Для стального стержня декремент затухания очень мал, а гистерезисная кривая имеет острую форму. На ней можно выделить два участка пологого протекания характеристики, называемые «гистерезисными полками», и два участка, на которых изменение нагрузки и деформации соответствуют закону Гука. Ширина гистерезисной полки $\Delta\sigma$ обычно составляет 1-2 % от величины нагрузки, обеспечивающей предел текучести материала σ_T :

$$\Delta\sigma \approx k_m \cdot \sigma_T, \quad (41)$$

где k_m – коэффициент затухания свободного гармонического колебания.

В научной литературе по материаловедению (напр., в [11]) появление гистерезисной полки объясняют структурной неоднородностью материала, возникшей после пластической деформации. Для каждого вида деформации формируются *каркасы* из отдельных *дислокаций*, которые самостоятельно воспринимают данный конкретный вид нагрузки, но, пока её величина не выходит за пределы полки, они не взаимодействуют друг с другом.

Предположим, что стержень когда-либо в прошлом испытывал интенсивную изгибную и крутильную деформацию, выводящую соответствующие напряжения в материале за пределы текучести. Это означает, что в материале стержня возникли остаточные напряжения, и при каждой новой деформации связь между моментом и значением кривизны или кручения определяются не законом Гука, а гистерезисными кривыми, показанными на рис. 5.

На рис.6 отражён тот факт, что амплитуда Qx_3 колебаний момента кру-

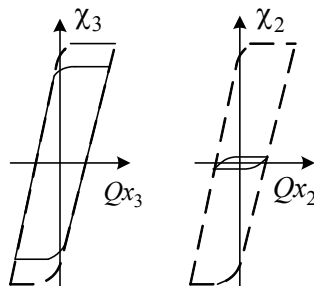


Рисунок 6 – Частичные петли гистерезиса для кручения и изгиба

чения для фонона примерно в ω раз больше, чем амплитуда Qx_2 колебаний момента изгиба, а безразмерная частота ω при выбранной нормировке – это большое число, большее, напр., чем индекс z .

Гипотеза, названная *гистерезисной моделью квантования*, возникла из анализа рис.6. Суть гипотезы проста: *амплитуда момента изгиба Qx_2 на всех частотах равна величине соответствующей гистерезисной полки.*

Поскольку ширина полки не зависит от частоты ω , то и момент Qx_2 не будет зависеть от частоты, что, в силу сказанного выше, обеспечит правильное квантование амплитуды фонона. Априори ясно, что выход амплитуды Qx_2 за пределы полки приводит к существенной нелинейности уравнений фонона (изменению матрицы влияния Ω). А в точках стыка разных уравнений возникают предпосылки для выполнения условий устойчивости решения.

Но какой конкретный механизм является ответственным за выполнение этой гипотезы, и о каких условиях устойчивости здесь идёт речь? Ответы будут даны в следующей публикации цикла.

Выводы. Составлены линеаризованные уравнения винтового фонона, учитывающие рассеивание энергии на трение и поступление энергии от группы низкочастотных колебаний пружины. Получена формула для коэффициента затухания волны и составлено уравнение энергетического баланса фонона. Предложена модель квантования амплитуды, базирующаяся на гистерезисе между нагрузкой и деформацией.

Список литературы: 1. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 2. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С.35-45. 3. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // – см. статью в настоящем сборнике. 4. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 5. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С. 20-30. 6. *Ванин В.А., Григорьев А.А., Дериенко А.И.* Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 7. *Ванин В.А., Григорьев А.А., Дериенко А.И.* Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С. 23-37. 8. *Э. Вихман.* Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. – 415 с. 9. *Васильев Н.В.* Теория колебаний. – К.: Вища школа, 1992. – 430с. 10. *Писаренко Г.С., Яковлев А.А., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971. – 375с. 11. *Дж. Мейс.* Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 318 с.

Поступила в редколлегию 03.02.11