УДК 534:539.3 (09)

Ларин А.А., Аврамов К.В.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ И ИСТОРИЯ ИХ РАЗВИТИЯ В УКРАИНЕ С 1930-го ГОДА

Нелинейные уравнения с малым параметром. В настоящее время нелинейная динамика является развитой ветвью прикладных наук, изучающей динамические процессы в системах различной физической природы. На первом этапе развития теории колебаний большинство задач решалось с помощью линеаризации. Однако даже слабая нелинейность приводит к эффектам, которые не могут быть объяснены в линейной постановке. Значительная часть динамических процессов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями с малым параметром. В общем виде уравнение движения механической системы с одной степенью свободы может быть записано в виде

$$\ddot{q} + k^2 q + \varepsilon f(q, \dot{q}) = 0, \tag{1}$$

где q – обобщенная координата, ε – малая величина. Уравнение обязательно строится таким образом, что при $\varepsilon = 0$ оно является линейным. В механике модели типа (1) описывают колебания маятника, подрессоренного экипажа, а также деформируемых систем, в которых связь между перемещениями и деформациями является нелинейной. Например, колебания лопаток турбин, лопастей вертолетов, элементов робототехнических систем и т.д. Нелинейными уравнениями описываются также колебания пластин и оболочек, являющихся частями ракетной и космической техники. Кроме того, только нелинейные модели описывают такие явления, как параметрические или автоколебания.

Асимптотические методы в динамике. Основными методами для решения уравнений вида (1) являются асимптотические методы, основанные на разложении решения в ряд по степеням малого параметра. Асимптотические методы представляют собой мощный аппарат для решения задач механики, физики, техники.

Степенные ряды для интегрирования дифференциальных уравнений начали применять одновременно с разработкой основ дифференциального и интегрального исчисления. Уже в ряде статей и мемуаров Ньютона, Лейбница, Якова и Иоганна Бернулли дано систематическое изложение метода неопределенных коэффициентов для решения дифференциальных уравнений. Дальнейший шаг в этом направлении был сделан Эйлером, который предложил искать решение дифференциального уравнения

$y' = f(x, y)$ при начальном условии $y(0) = 0$ в виде степенного ряда

$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$, где $a_n = \dfrac{y^n(0)}{n!}$; $a_1 = y'(0) = f(x, y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$;

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'; \; y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''; \; \ldots .$$

В XVIII веке появился математический аппарат решения нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Указанный аппарат применялся астрономами для решения задач возмущенного движения планет Солнечной системы. Для примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{q} + k^2 q + \varepsilon f(q) = 0 , \qquad (2)$$

где $f(q)$ является полиномом. Начальные условия принимаются в виде

$$q(0) = a; \ \dot{q}(0) = 0 , \qquad (3)$$

а начальные условия с ненулевой обобщенной скоростью могут быть выбором начала отсчета времени приведены к виду (3).

Одним из первых *метод разложения решения в ряд по степеням малого параметра* предложил Пуассон в своей "Механике". Решение уравнения (2) принимается в виде ряда по степеням малого параметра ε .

$$q = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ... + \varepsilon^n y_n . \qquad (4)$$

Здесь $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ - неизвестные функции. Подставляя (4) в уравнение (2), получают систему уравнений:

$$\ddot{y}_0 + k^2 y_0 = 0; \ \ddot{y}_1 + k^2 y_1 = f_1(y_0); \ \ddot{y}_2 + k^2 y_2 = f_2(y_0, y_1); \ ... \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$y_0(0) = a; \ \dot{y}_0(0) = 0; \ y_1(0) = 0; \ \dot{y}_1(0) = 0; \ y_2(0) = 0; \ \dot{y}_2(0) = 0; \ ...$$

Для четной функции $f(q)$ решение получается периодическим, но если $f(q)$ будет включать и нечетные степени переменной *q*, в правой части уравнения системы (5), которым определяются решения $y_2, y_3, ...$ наряду с членами, гармонически зависящими от времени, появятся секулярные члены вида $t^m \sin \alpha t$ и $t^m \cos \alpha t$, которые при возрастании *t* будут расти. Таким образом пользоваться найденным решением можно лишь для малых значений переменной *t*. Ниже приводится решение уравнения

$$\ddot{q} + q = \varepsilon q^3 \qquad (6)$$

при начальных условиях

$$q(0) = 1; \ \dot{q}(0) = 0 , \qquad (7)$$

полученное с точностью до второго приближения

$$q = \cos t + \frac{\varepsilon}{32}(12 t \sin t + \cos t - \cos 3t) . \qquad (8)$$

В связи с вышесказанным появилось много работ, в основном французских математиков, в которых рассматриваются различные способы уничтожения в решении секулярных членов. Среди них наиболее знамениты работы Лапласа и Лагранжа [1, с. 182]. Однако их методы приводят к весьма сложным выкладкам.

Можно построить процесс таким образом, чтобы при решении уравнения выбором произвольных или неопределенных величин не уничтожать, а предотвратить появление секулярных членов. Такой способ в работе "Note sur la méthode des approximations successives", опубликованной в III томе 6-й серии Мемуаров Петербургской академии наук в 1840 году предлагает М.В.Остроградский, который одним из первых применял асимптотические методы в механике. Остроградский рассматривает для примера уравнение (6) при начальных условиях (7) и приходит к тому, что нужно изменить частоту колебаний, взяв вместо единицы *p*.

$$q = \cos pt + \frac{\varepsilon}{32 p^2}\left(\cos pt - \cos 3pt\right), \quad p^2 = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon \quad . \tag{9}$$

Значительно позже, в конце XIX века кораблестроители встретились с уравнением (6), рассмотренным Остроградским, при исследовании качки корабля [1, с. 184].

В 1877 году вышла в свет знаменитая "Теория звука" Рэлея ("The theory of sound"). В ней автор рассматривает аналогичное, но более общее уравнение

$$\ddot{q} + k^2 q + \varepsilon q^3 = 0 \tag{10}$$

при начальных условиях $q(0) = a$; $\dot{q}(0) = 0$. [2, с. 97-99]. Восстанавливающая сила в (10) симметрична относительно положения равновесия. Это уравнение является простейшей моделью, описывающей флаттер упругих систем.

Полученное им во втором приближении решение

$$q = A\cos mt + \frac{1}{32}\frac{\varepsilon A^3}{m^2}\left(\cos 3mt - \cos kt\right), \tag{11}$$

где m выбирается соответствующим образом, верно математически, но неверно физически, так как величины m и k между собой, как правило, не соизмеримы и функция $q(t)$ не будет периодической и вместо члена $\cos kt$ должен стоять $\cos mt$ [1, с. 186].

Весомый вклад в борьбе с секулярными членами в разложении решения внесли астрономы. А. Линстедт (1882 г.), Болин (1889 г.), Гюльден (1893 г.) разработали подход, который состоит в том, что при поиске периодического решения уравнения (1) вводится новая переменная $\tau = \omega(\varepsilon)t$, а затем q и ω ищутся в виде разложения по степеням малого параметра

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \ldots \;; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots \tag{12}$$

При этом параметры $\omega_1, \omega_2, \ldots$ подбираются из условия отсутствия секулярных членов. Однако, динамические системы, рассматриваемые в астрономической теории возмущений консервативны, а в технике, как правило, нужно учитывать затухание и наличие источников энергии. В связи с этим методы астрономической теории возмущений не могут быть непосредственно перенесены в нелинейную механику [3, с. 6].

Исследование сходимости приведенных рядов содержится в трехтомном сочинении А.Пуанкаре «Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste» (1892-1897 гг.). Он анализирует понятие сходимости и дает определение асимптотического ряда [4]. Пуанкаре предлагает считать сходящимся ряд, у которого быстро убывают первые члены, что особенно важно при решении практических задач.

Несмотря на то, что получаемые ряды, как правило, расходящиеся, они при ограничении некоторым количеством членов вполне пригодны для практических расчетов. Такие ряды до сих пор эффективно применяются в теории нелинейных колебаний. Ряды являются асимптотическими, т.е. погрешность m-го приближения оказывается пропорциональной m+1-й степени малого параметра.

Аналогичный подход к решению уравнения (10) применил А.М.Ляпунов в своей докторской диссертации "Общая задача об устойчивости движения" [5], написанной в Харькове в 1892 году. В упомянутой диссертации содержится и исследование сходимости приведенных рядов. Оставив в 1902 году педагогическую деятельность, Ляпунов занялся применением асимптотических методов к задачам о фигурах равновесия вращающейся жидкости и получил в этой области выдающиеся результаты. Академик РАН Н.Н.Моисеев отмечал, что значение теории малого параметра Ляпунова – Пуанкаре состоит не только в том, что она дает метод отыскания периодических решений квазилинейных уравнений… Эта теория также дает очень много для понимания того, как должны строиться методы исследования новых задач [6].

А.Н.Крылов предложил [1, с. 188] раскладывать в ряд не частоту, а ее квадрат, т.е.

$$k^2 = p^2 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \ldots + C_n\varepsilon^n, \tag{13}$$

где p^2 – неизвестная постоянная, а коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – подбираются таким образом, чтобы в получаемых выражениях $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ время t не выходило за знак синуса или косинуса.

А.Н.Крылов показал, что его метод может быть применен и для других видов уравнений, описывающих и вынужденные колебания, и колебания с нелинейным демпфированием. Но в отличие от методов Лагранжа и Лапласа, он не требует решения сложной системы дифференциальных уравнений для уничтожения секулярных членов, а решать надо только одно алгебраическое уравнение с одной неизвестной [1, с. 191].

Метод Ван-дер-Поля. В 1926 году голландский физик и инженер Ван-дер-Поль вывел уравнение колебаний лампового генератора [7, с. 89–90]

$$\ddot{q} + q = \varepsilon\left(1 - q^2\right)\dot{q} \tag{14}$$

и предложил для его решения метод медленно меняющихся амплитуд. Позже он распространил этот метод на более широкий класс задач со слабой нелинейностью. Согласно методу Ван-дер-Поля решение дифференциального уравнения (1) берется в виде

$$q = A\cos\left(kt - \varphi\right), \tag{15}$$

где A и φ медленно меняющиеся функции времени [8, с. 55]. Если подставить теперь решение (15) в уравнение (1), то получится уравнение, содержащее две неизвестных функции A и φ . Обобщенная скорость определяется по формуле

$$\dot{q} = -Ak \sin\left(kt + \varphi\right), \qquad (16)$$

как будто величины A и φ являются постоянными. Подставляя (15) и (16) в уравнение (1), получим уравнение первого порядка для определения $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$. Упрощение дальнейшего решения заключается в том, что производные $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$ принимаются постоянными в течение любого одного цикла.

Первыми в Советском Союзе асимптотическими методами стали заниматься Л.И.Мандельштам и Н.Д.Папалекси. Их статья [9] стала фундаментальной не только для нелинейных задач технической физики, но и для задач механики.

Киевская школа нелинейной динамики. Дальнейшее развитие асимптотических методов связано с именами киевских ученых Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова. Начиная с 1927 года, Н.М. Крылов занимался математическими проблемами асимптотических методов. Его ученик Н.Н. Боголюбов развил полученные результаты и предложил общую процедуру усреднения для системы неавтономных дифференциальных уравнений. В 1932 г. Крылов и Боголюбов начали разрабатывать методы, пригодные для исследования как периодических, так и квазипериодических процессов. Можно считать, что киевские ученые создали новое научное направление – нелинейную механику, выполнив цикл работ, посвященных методам приближенного интегрирования дифференциальных уравнений и теории почти периодических функций. В 1931-1939 г.г. Н.М.Крылов и Н.Н.Боголюбов занимались внедрением теории нелинейных колебаний в практику. В монографии [10] было дано систематическое изложение асимптотических методов.

Значительный прогресс в фундаментальных и прикладных вопросах теории асимптотических методов был сделан учеником Н.Н.Боголюбова Ю.А.Митропольским [3], который распространил метод Крылова и Боголюбова на нелинейные системы томсоновского типа. Митропольский с помощью метода последовательных замен построил общее решение системы нелинейных уравнений и изучил его поведение в окрестности квазипериодического решения. Он разрабатывал метод усреднения для исследования колебательных систем с медленно меняющимися параметрами, предложил способ нахождения приближенного решения задачи о колебаниях системы со многими степенями свободы. Изучал также метод интегральных многообразий. Особого внимания заслуживают исследования прохождения через резонанс нелинейных систем в том числе и систем несколькими степенями свободы. До Ю.А.Митропольского подобные задачи решались только для простых линейных систем.

В своих работах Ю.А.Митропольский рассматривает дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами [11, с. 11]

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dq}{dt}\right] + c(\tau)q = \varepsilon F\left(\tau, \theta, q, \frac{dq}{dt}\right), \qquad (17)$$

где θ – фаза возмущающей силы, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ – мгновенная частота. При этом в уравнении (17) $m(\tau)$, $c(\tau)$ и $\nu(\tau)$ являются функциями медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Параметр ε $(0 < \varepsilon << 1)$ указывает на то, что система близка к линейной консервативной и коэффициенты уравнения (17) меняются медленно.

Асимптотические методы были развиты многочисленными учениками Ю.А.Митропольского. Среди них можно отметить В.М.Волосова (уравнения с медленно меняющимися параметрами, метод усреднения), Б.И.Мосеенкова (колебания систем с распределенными параметрами, исследования колебаний вращающегося стержня двоякой жесткости), О.Б.Лыкову (одночастотные колебания в системах с несколькими степенями свободы). Ссылки на их работы можно найти в монографии [11, сс. 425-431].

Из киевской научной школы по нелинейной механике вышло много выдающихся ученых. Среди них В.О.Кононенко, применивший идеи асимптотических методов для исследования колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности [12, 13]. В.О.Кононенко решил ряд технических задач по автоколебаниям. С помощью асимптотических процедур совместно с Р.Ф.Ганиевым он изучал нелинейную динамику сферического движения [14, 15]. Академик АН УССР Г.С.Писаренко занимался нелинейными колебаниями с учетом энергетических потерь. В частности, он аналитически и экспериментально исследовал нестационарные одночастотные колебания турбинной лопатки [16]. Академик АН УССР И.З.Штокало исследовал критерии устойчивости и неустойчивости решений дифференциальных уравнений с периодическими и почти периодическими коэффициентами и обобщил символический метод на случай дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [17]. Необходимо отметить вклад в прикладные аспекты асимптотических методов академика НАН Украины В.Д.Кубенко, который использовал для исследования поперечных нелинейных колебаний цилиндрических оболочек метод Крылова-Боголюбова [18, 19].

Дальнейшее развитие теория нелинейных колебаний получила в трудах академика АН УССР А.М.Самойленко, который обосновал методы асимптотического интегрирования разрывных и импульсных систем. Следует отметить его работы по математической теории квазипериодических колебаний [20]. Чрезвычайно интересны работы А.М.Самойленко и Н.А.Перестюка по нелинейным динамическим системам с импульсным воздействием [21]. Отметим также работы А.А.Мартынюка, связанные с развитием теории векторных функций Ляпунова [22].

Харьковские ученые академик АН УССР А.П.Филиппов и профессор Е.Г.Голоскоков применяли асимптотические методы для исследования прохождения через резонанс в различных упругих системах. Ими была решена задача о взаимодействии нестационарной и параметрической нагрузок, действующих на механическую систему [23].

Донецкая школа аналитической механики организована в 1965 году, когда туда переехал вместе с учениками П.В.Харламов, избранный членом-корреспондентом АН УССР. Работы П.В.Харламова по динамике твердого тела [24] развиваются в настоящее его время учениками А.М.Ковалевым [25], Г.В.Горром [26], И.Н.Гашененко и др. Подробно о работах этой школы можно прочитать в статье [27].

Днепропетровская школа нелинейных колебаний. В Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта работал академик АН УССР Н.Г.Бондарь, который занимался в основном строительной механикой. Он получил решение ряда нелинейных задач о колебаниях систем при различном сопротивлении с учетом гистерезиса при произвольном периодическом и импульсном возбуждении. Н.Г.Бондарь исследовал также устойчивость упругих систем при наличии нелинейности, изучал нелинейные задачи сейсмостойкости сооружений [28].

В школе, основанной Л.И.Маневичем развивается разработанный Розенбергом метод нелинейных нормальных форм колебаний, базирующийся на асимптотическом подходе [29]. Нелинейные нормальные формы это такие периодические движения, при которых все обобщенные координаты выражаются через одну. Например, если движение описывается s обобщенными координатами $q_1, q_2,..., q_s$, то в режиме нормальных колебаний $q_i(q_1), i = 2,3,... s$. Таким способом уничтожается явная зависимость обобщенных координат от времени, а система, имеющая s степеней свободы в режиме нормальных колебаний ведет себя как система с одной степенью свободы. В трудах Л.И.Маневича, Ю.В.Михлина и В.Н.Пилипчука, применивших метод нелинейных нормальных форм для существенно нелинейных систем, асимптотические процедуры получили дальнейшее развитие [30, 31, 32].

Выводы: Теория нелинейных колебаний и асимптотические методы быстро развивающийся раздел механики. Сейчас бурно развиваются исследование динамических процессов около гомоклинических и гетероклинических структур. Ждет своего разрешения вопрос исследования нелинейных динамических систем высокой размерности. Этот вопрос чрезвычайно актуален, так как его решение позволит исследовать реальные механические системы, которые могут являться конечноэлементной дискретизацией реальных инженерных систем. Особо актуален вопрос исследования поведения нелинейных динамических систем под действием случайных нагрузок и систем со случайными параметрами. Асимптотические методы позволяют проводить аналитические исследования и сохраняют свою актуальность и при широком применении современной вычислительной техники

Литература: 1. Крылов А.Н. Вибрация судов т. X собрания трудов – М–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 402 с. 2. Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей) Теория звука, т. I. М.: Гостехиздат, 1955. – 504с. 3. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику.– К.: Изд. АН УССР.– 1937.– 321 с. 4. Пуанкаре А. Избранные труды. Новые методы небесной механики. т1.– М.: Наука, 1971. – 654 с. 5. Ляпунов А.М. "Общая задача об устойчивости движения"// Собр. соч. т. 2.– М.: Изд. АН СССР.– 1954.– С. 7-236. 6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы в нелинейной механике.– М.: Наука.– 1981.– 400 с. 7. Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Биогр. Справочник. – К.: Наук. думка, 1983. – 640 с. 8. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 272 с. 9. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. О явлении резонанса *n*-го рода // Журнал технической физики – Вып. 2.– 1932.– с. 775-811. 10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.– М.: Наука.– 1958.– 543 с. 11. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.– М.: Наука.– 1964.– 431 с. 12. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением.– М.: Наука.– 1964. – 240 с. 13. Кононенко В.О. Нелинейные колебания механических систем. Избр. Труды.– К.: Наук. думка, 1980. – 220 с. 14. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 432 с. 15. Ганиев Р.Ф., Ковальчук П.С. Динамика систем твердых и упругих тел. – М.: Машиностроение, 1980. – 340 с. 16. Писаренко Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. – К.: Изд. АН УССР, 1955. – ??? с. 17. Штокало И.З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами (асимптотические методы и критерий устойчивости и неустойчивости решений). – К.: Изд-во АН УССР, 1960. – ??? с. 18. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наук. думка, 1984. – 200 с. 19. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Вища школа, 1989. – 240 с. 20. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – ??? с. 21. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 200 с. 22. Мартынюк А.А. Устойчивость движения сложных систем. – К.: Наук. думка, 1975. – 432 с. 23. Голоскоков Е.Г., *Филиппов А.П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – К.: Наукова думка, 1977. – 336 с. 24. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела Ч. 1. – Новосибирск: изд-во НГУ, 1965. – 221 с. 25. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – К.: Наукова думка, 1980. – 175 с. 26. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – К.: Наукова думка, 1978. – 296 с. 27. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Донецкой школе аналитической механики – 40 лет // Наукові праці Донецького національного технічного університету Вип. 94, 2005. – С. 13-34. 28. Бондарь Н.Г. Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике. – К.: Вища школа, 1987. – 213с. 29. Rosenberg R.M., Hsu C.S. On the geometrization of normal vibrations of nonlinear systems having many degree of freedom. // Тр. междун. симпозиума по нелинейным колебаниям. – К.: Наук. думка, – 1961. – С. 380-416. 30. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука. – 1989. – 280 с. 31. Vakakis A., Manevich L.I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A., Normal modes and localization in nonlinear systems.– New York: Willey Interscience.– 1996. – 579 с. 32. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейные нормальные формы колебаний цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения. – Харьков, 2003. – №4. – С. 60-67

А.О. Ларін, К.В. Аврамов

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ В НЕЛІНІЙНІЙ ДИНАМІКІТА ІСТОРІЯ ЇХ РОЗВИТКУ В УКРАЇНІ З 1930-го РОКУ

Розглядається історія виникнення та розвиток асимптотичних методів, їх застосування для вирішення нелінійних задач механіки. Досліджується вклад в нелінійну механіку українських вчених від її основоположників М.М.Крилова і М.М.Боголюбова до сучасних вчених

A.A.Larin, K.V.Avramov

ASYMPTOTIC METHODS FOR NONLINEAR DYNAMICS AND THE HISTORY OF ITS DEVELOPMENT IN UKRAINE FROM 1930

The history of appearance and development of asymptotic methods and its applications to solve the problems of nonlinear mechanics is considered. The contribution of Ukraine scientists to nonlinear mechanics from its foundations N.M.Krilov and N.N.Bogolubov till modern scientific is investigated.