

Список литературы: 1. *Чепурной А.Д., Глинин Г.П., Гусев Ю.Б., Пеклич М.М., Барчан Е.Н., Ткачук Н.А.* Расчетно-экспериментальный метод определения параметров элементов машиностроительных конструкций // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: „Машиноведение и САПР”. – 2005. – №53. – С.162-176. 2. *Ткачук Н.Н., Гусев Ю.Б., Танченко А.Ю., Васильев А.Ю.* Системный подход к проектированию, анализу и синтезу элементов зубчатых передач и транспортных средств на основе взаимного обмена данными между подсистемами // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелитополь, 2006. – Вип.36. – С.115-121. 3. *Глинин Г.П., Гусев Ю.Б., Головченко В.И., Орлов Е.А.* Методи автоматизованого аналізу міцності та жорсткості просторових конструкцій // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: „Машиноведение и САПР”. – 2006. – №3. – С.58-69. 4. *Гусев Ю.Б.* К вопросу об исследовании напряженно-деформированного состояния металлоконструкции перегружателя ПМГ-20 // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: „Машиноведение и САПР”. – 2006. – №24. – С.70-75. 5. *Гусев Ю.Б., Слободяник В.А., Ткачук Н.А., Танченко А.Ю.* К вопросу об определении причин сверхнормативного износа реборд колес грейферной тележки мостового крана-перегружателя // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: „Машиноведение и САПР”. – 2007. – № 3. – С.55-66. 6. *Зенкевич О.К.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

Поступила в редколлегию 21.09.2007

УДК 534.1

В.Б. ЗЕЛЕНСКИЙ, канд. техн. наук, **А.А. ЗАРУБИНА**, канд. техн. наук,
З.С. САФОНОВА, И.Я. ХРАМЦОВА, НТУ „ХПИ”

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО МАЯТНИКА-РОТОРА С ИЗГИБНО И КРУТИЛЬНО ДЕФОРМИРУЮЩИМСЯ СТЕРЖНЕМ

Розглядається постановка задачі про просторові коливання пружного маятника-ротора (стрижень із плоским диском на кінці), що випробовує вигинні та крутильні деформації. Виводяться рівняння, що визначають вигинні та крутильні коливання тільки стрижня. Задача зводиться до наближеного представлення системи з 4n узагальненими координатами.

The task is examined about the spatial vibrations of resilient pendulum-rotor (a bar is with a flat disk on its end) which tests bending and turning deformations. Equations which determine only bending and turning vibrations of the bar are derived. The task is taken to approximate presentation of the system with 4n generalized coordinates.

Постановка задачи. Рассматриваются пространственные колебания упругого маятника-ротора с изгибно и крутильно деформирующимся стержнем (рис. 1). Уравнения движения выводятся с применением теории динамики относительного движения. „Носимыми” телами являются упругий нерастяжимый стержень, совершающий малые колебания относительно того положения, которое он занимал бы в недеформированном состоянии, и сосредоточенная на конце стержня масса (плоский „диск”). „Несущее” тело представляется той же системой в недеформированном („замороженном”) состоянии.

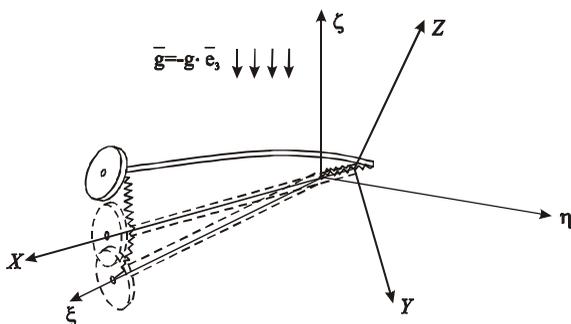


Рис. 1

Длина стержня – l , масса единицы длины стержня – ρ , масса диска – m . Диск представляет собой симметричную фигуру. Радиусы инерции диска относительно его геометрических осей (которые были бы центральными при уравновешенном диске), параллельных осям OY и OZ подвижной системы координат $OXYZ$, равны r_y и r_z . Жесткости стержня на изгиб EI_y , EI_z – постоянны по длине стержня. В точке подвеса O осуществлено упругое закрепление со сферической жесткостью на поворот, равный k .

Закон распределения неуровновешенности маятника-ротора по длине стержня $\mathbf{e}^{\mathbf{I}}(a)$ является заданным (в недеформированном состоянии)

$$\mathbf{e}^{\mathbf{I}}(a) = e_2(a)\mathbf{i}_2^{\mathbf{I}} + e_3(a)\mathbf{i}_3^{\mathbf{I}}, \quad (1)$$

здесь a – абсцисса некоторой точки геометрической оси стержня (которая была бы центральной при полностью уравновешенном роторе) в недеформированном состоянии.

Движение „несущего” тела (недеформированной геометрической оси стержня) будем определять вектором \mathbf{V}_0 полюса O и вектором его угловой скорости $\mathbf{\omega}$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= V_{01}\mathbf{i}_1^{\mathbf{I}} + V_{02}\mathbf{i}_2^{\mathbf{I}} + V_{03}\mathbf{i}_3^{\mathbf{I}}, \\ \mathbf{\omega} &= \omega_1\mathbf{i}_1^{\mathbf{I}} + \omega_2\mathbf{i}_2^{\mathbf{I}} + \omega_3\mathbf{i}_3^{\mathbf{I}}. \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{i}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{i}_2^{\mathbf{I}}, \mathbf{i}_3^{\mathbf{I}}$ – орты осей подвижной системы координат $OXYZ$, связанной с несущим телом; $V_{01}, V_{02}, V_{03}, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции векторов \mathbf{V}_0 и $\mathbf{\omega}$ на эти оси (квазискорости).

Положение системы „носимых” тел определяется известными абсциссами a точек нейтральной (геометрической оси) недеформированного стержня, искомыми проекциями перемещений $u(a,t), v(a,t), w(a,t)$ этих точек на оси

X, Z, Y подвижной системы координат $OXYZ$ и, наконец, углом закручивания сечения стержня $\theta(a, t)$.

Запишем выражение вектора-радиуса r' точка M' поперечного сечения стержня, которая до деформации имела в подвижной системе координаты a, b, c .

Учет изгиба. Используя гипотезу плоских сечений, получим для проекции точки M' на подвижную ось OX при изгибе в плоскости XY (рис. 2)

$$a + u - \frac{\partial v}{\partial a} b,$$

или с учетом изгиба и в плоскости XY

$$a + u - \frac{\partial v}{\partial a} b - \frac{\partial w}{\partial a} c. \quad (3)$$

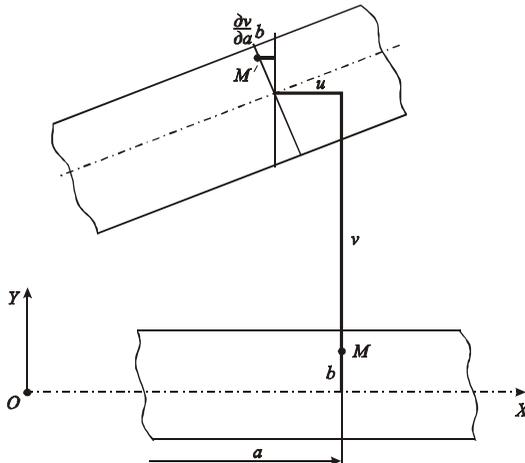


Рис. 2

Проекция точки M' на оси OY и OZ будут соответственно $v + b$ и $w + c$. Таким образом, при изгибе в плоскостях XY и XZ вектора-радиуса точки M' поперечного сечения стержня, имевшей до деформации координаты a, b, c , будет

$$r' = \left(a + u - \frac{\partial v}{\partial a} b - \frac{\partial w}{\partial a} c \right) \mathbf{r}_1 + (v + b) \mathbf{r}_2 + (w + c) \mathbf{r}_3. \quad (4)$$

Учет кручения. Пусть до деформации точка M поперечного сечения стержня имела координаты (рис. 3) $a, b = R \cos \chi, c = R \sin \chi$. Тогда, пренеб-

регая влиянием депланаций сечения от кручения, найдем значения координат точки M' , в которую переходит точка M в результате закручивания на угол θ :

$$a, b' = R \cos(\psi - \theta), \quad c' = R \sin(\psi - \theta)$$

или

$$a, b' = b \cos \theta + c \sin \theta, \quad c' = c \cos \theta - b \sin \theta.$$

Эти значения соответствуют выбору положительного направления вращения, происходящего по часовой стрелке (если смотреть с конца оси OX (система координат правая)).

В случае выбора положительного направления вращения обратно ходу стрелки часов координаты точки M' будут

$$a, b' = b \cos \theta - c \sin \theta, \quad c' = c \cos \theta + b \sin \theta. \quad (5)$$

Остановимся на последнем выборе направления вращения.

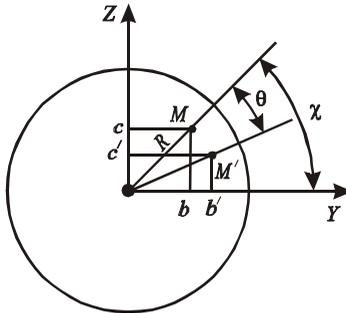


Рис. 3

Теперь с учетом изгиба и кручения вектор-радиус r' точки M' поперечного сечения стержня будет

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' = & \left(u + a - \frac{\partial v}{\partial a} b - \frac{\partial w}{\partial a} c \right) \mathbf{i}_1 + (v + b \cos \theta - c \sin \theta) \mathbf{i}_2 + \\ & + (w + b \sin \theta + c \cos \theta) \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (6)$$

По (1) и (6) находим вектор-радиус центра тяжести сечения стержня с абсциссой a в подвижной системе координат $OXYZ$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\text{тс}} = & \left(u + a - \frac{\partial v}{\partial a} \varepsilon_2 - \frac{\partial w}{\partial a} \varepsilon_3 \right) \mathbf{i}_1 + (v + \varepsilon_2 \cos \theta - \varepsilon_3 \sin \theta) \mathbf{i}_2 + \\ & + (w + \varepsilon_2 \sin \theta + \varepsilon_3 \cos \theta) \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Величины статической неуравновешенности вала $\mathbf{\varepsilon}(a)$ и динамической неуравновешенности диска $\mathbf{\varepsilon}_1(l)$ считаем малыми, и содержащие их члены могут рассматриваться в дальнейшем как малые возмущения. По той же причине определение геометрических характеристик стержня (статических и инерционных моментов сечения) производится без учета неуравновешенности, а определение массовых характеристик (составляющих тензора инерции и др.) производится в предположении равномерного распределения масс, однако с последующей поправкой на неуравновешенность в соответствии с теоремами о параллельном переносе осей инерции.

С целью использования методов динамики относительного движения систем с конечным числом степеней свободы разобьем стержень в недеформированном состоянии поперечными сечениями на n участков длиной Δa^l , где l – номер участка. Положение каждого участка после деформации определяется обобщенными координатами u^l, v^l, w^l , которые являются проекциями перемещений геометрического центра участка, абсцисса которого до деформации была равна a^l , и обобщенной координатой θ^l , которая представляет собой средний угол поворота участка в результате кручения стержня.

Допуская возможности рассредоточить массу $\rho \Delta a^l$ l -го участка в конечном числе материальных точек с массами m_s^l , перенумеруем эти точки от 1 до N_l ($s = 1, 2, \dots, N_l$).

Вектор радиус $\mathbf{r}_s^{l,p}$ s -й точки l -го участка стержня в соответствии с (6) будет равен

$$\mathbf{r}_s^{l,p} = \left(u^l + a^l - \frac{\partial v^l}{\partial a^l} b_s^l - \frac{\partial w^l}{\partial a^l} c_s^l \right) \mathbf{i}_1 + (v^l + b_s^l \cos \theta^l - c_s^l \sin \theta^l) \mathbf{i}_2 + (w^l + b_s^l \sin \theta^l + c_s^l \cos \theta^l) \mathbf{i}_3 \quad (8)$$

Выводы. Таким образом мы получаем возможность приближенно представить систему (без учета диска) $4n$ обобщенными координатами u^l, v^l, w^l, θ^l ($l = 1, 2, \dots, n$) и использовать выражения динамических величин для системы материальных точек. Записывая эти выражения в известной форме [1] и заменяя суммирование интегрированием по объему, получим затем динамические выражения для сплошного деформируемого стержня в функции от величин $u(a,t), v(a,t), w(a,t), \theta(a,t), V_0(t), \mathbf{\Omega}(t)$ и их производных.

Список литературы: 1. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.

Поступила в редколлегию 30.08.2007