Список литературы: 1. *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. радио, 1974. — 400 с. 2. *Голоскоков А. Е.* Стохастическая постановка распределительной задачи. — В кн.: Эффективность и оптимизация систем и процессов гражданской авиации и совершенствование системы комплексного планирования. М., 1977, с. 21. 3. *Голоскоков А. Е.* Построение стохастической модели планирования.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1979, № 148. Прикладная механика и процессы управления, вып. 1, с. 59—61.

Поступила в редколлегию 11.12.81.

УДК 519.3

Л. А. ГАМБАРОВ, канд. техн. наук

ИТЕРАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Широкий класс практических задач приводит к следующей математической постановке: найти

$$\min_{x_{ikl},\,\hat{x}_{kjl}} \left(\sum_i \sum_k \sum_l c_{ik} x_{ikl} + \sum_k \sum_j \sum_l \hat{c}_{kj} \hat{x}_{kjl}\right) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_k x_{ikl} = a_{il},\ i = 1,\ldots,n,\ l = 1,\ldots,q; \tag{2}$$

$$\sum x_{ikl} = \sum \hat{x}_{kjl},\ k = 1,\ldots,r,\ l = 1,\ldots,q; \tag{3}$$

$$\sum_k \hat{x}_{kjl} = b_{jl},\ j = 1,\ldots,m,\ l = 1,\ldots,q; \tag{4}$$

$$\sum_j \sum_l \hat{x}_{kjl} \leqslant d_k,\ k = 1,\ldots,r; \tag{5}$$

$$x_{ikl} \geqslant 0,\ \hat{x}_{kjl} \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,r,\ j = 1,\ldots,m. \tag{6}$$

Выражения (1)—(6) — пример многопродуктовой транспортной задачи с промежуточными узлами. Суть ее в отыскании оптимального плана перевозок неоднородного продукта l из пунктов производства i в пункты потребления j при наличии ограничений на пропускные способности промежуточных узлов k. Предполагается, что весь изготовленный продукт в каждом i-м пункте производства используется, а спрос каждого j-го пункта потребления удовлетворяется. В формализованной постановке (1)—(6) даны следующие обозначения: x_{ikl}, $\hat{x}_{kjl}$ — количество единиц продукта l-й номенклатуры, перевозимого соответственно по маршрутам $i \to k$ и $k \to j$; c_{ik}, $\hat{c}_{kj}$ — стоимости перевозки единицы продукта по соответствующим маршрутам; a_{il} — количество единиц продукта l-й номенклатуры, производимое в i-м пункте; b_{jl} — количество единиц продукта l-й номенклатуры, потребляемое в j-м пункте; d_k — суммарная пропускная способность k-го узла.

Особенность задачи (1) — (6) связана с наличием ограничений (3). Действительно, если предположить, что

$$\sum_i x_{ikl} = \sum_j \hat{x}_{kjl} = \bar{h}_{kl},\ k = 1,\ldots, r,\ l = 1,\ldots, q, \tag{7}$$

где h_{kl}, $k=1, \ldots, r$, $l=1, \ldots, q$, определены, то налицо возможность расчленения задачи (1)—(6) на две группы подзадач и, как следствие, распараллеливание алгоритма решения. В первой группе q подзадач требуется найти

$$\min_{x_{ikl}} \sum_i \sum_k e_{ik} x_{ikl} \tag{8}$$

при ограничениях

$$\sum_k x_{ikl} = a_{il},\ i = 1,\ldots, n,\ l = 1,\ldots, q; \tag{9}$$

$$\sum_i x_{ikl} = \bar{h}_{kl};\ k = 1,\ldots, r,\ l = 1,\ldots, q; \tag{10}$$

$$x_{ikl} \geqslant 0,\ i = 1,\ldots, n,\ k = 1,\ldots, r,\ l = 1,\ldots, q. \tag{11}$$

Во второй группе q подзадач необходимо определить

$$\min_{\hat{x}_{kjl}} \sum_k \sum_j \hat{c}_{kj} \hat{x}_{kjl} \tag{12}$$

при ограничениях

$$\sum_j \hat{x}_{kjl} = \bar{h}_{kl},\ k = 1,\ldots, r,\ l = 1,\ldots, q; \tag{13}$$

$$\sum_k \hat{x}_{kjl} = b_{jl},\ j = 1,\ldots, m,\ l = 1,\ldots, q; \tag{14}$$

$$\hat{x}_{kjl} \geqslant 0,\ k = 1,\ldots, r,\ j = 1,\ldots, m,\ l = 1,\ldots, q. \tag{15}$$

Таким образом, благодаря наличию условий (7) задача минимизации функции цели (1) сводится к решению $2q$ независимых двухиндексных задач транспортного типа, что является эффективным способом «борьбы» с большой размерностью исходной задачи.

Остановимся на определении условий (7), допускающих описанный выше подход. Решение этого вопроса свяжем с задачей построения рациональной последовательности точек $h(s) = \{\{\bar{h}_{kl}(s), k=1, ..., r\}, l=1, ..., q\}$, $s=0, 1, 2, ...$, где s — номер шага предлагаемой в работе итеративной процедуры. Введем в рассмотрение вектор $h=\{\{h_{kl}, k=1, ..., r\}, l=1, ..., q\}$ и обозначим через $\Phi(h)$ неявную зависимость функции цели (1) от переменных h_{kl}. Тогда вопрос определения оптимального набора переменных x_{kil}, $\hat{x}_{kjl}$, $i=1, ..., n$, $k=1, ..., r$, $j=1, ..., m$, $l=1, ..., q$ в задаче (1)—(6) надо решать в такой постановке: найти

$$\min_{h \in H} \Phi(h), \tag{16}$$

где H — множество векторов, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_k h_{kl} = \sum_i a_{il}, \ l = 1, ..., q; \tag{17}$$

$$\sum_l h_{kl} \leqslant d_k, \ k = 1, ..., r; \tag{18}$$

$$h_{kl} \geqslant 0, \ k = 1, ..., r, \ l = 1, ..., q. \tag{19}$$

Ограничение (17) можно получить следующим образом. Переменные x_{ikl} просуммируем по индексам i и k. Полученная сумма соответствует всему объему l-й номенклатуры, функционирующему в исследуемой системе. В то же время должно выполняться условие

$$\sum_i \sum_k x_{ikl} = \sum_j a_{il}, \ l = 1, ..., q. \tag{20}$$

Из соотношения (20) и ограничения (10) следует равенство (17). Ограничение (18) вытекает из выражений (5) и (13). Условие (19) очевидно.

Предположим, что на начальном шаге $s=0$ вектор $h=\bar{h}(0)$, а $\Phi(h)$ в общем случае не принимает наименьшего значения. Пусть на s-м шаге $h=h(s)$. Обозначим через $g_\Phi(h)$ субградиент функции $\Phi(h)$ и решим задачу

$$\min_{h \in H} (g_\Phi(\bar{h}(s)), h), \tag{21}$$

где $(g_\Phi(\bar{h}(s)), h)$ — скалярное произведение векторов. Субградиент $g_\Phi(h(s))$ выражается через двойственные оценки локальных транспортных задач (8)—(11) и (12)—(15). Тогда задачу (21) можно переписать в таком виде: найти

$$\min_{h_{kl} \in H} \sum_k \sum_l v_{kl}(s) + \hat{u}_{kl}(s)) h_{kl}, \tag{22}$$

где $v_{kl}(s)$, $\hat{u}_{kl}(s)$ — оптимальные двойственные оценки соответственно ограничений (10) задачи (8)—(11) и ограничений (13) задачи (12)—(15), полученные на s-м шаге.

Очевидно, что оптимальное значение вектора переменных $h(s+1) = \{\{h_{kl}(s+1), k=1,\dots, r\}, l=1,\dots, q\}$ задачи (21) на s-м шаге, т. е. $\bar{h}(s+1) = \{\{\bar{h}_{kl}(s+1), k=1,\dots, r\}, l=1,\dots,q\}$ определяет значение вектора переменных задачи (16) на s-м шаге. Если последнее таково, что выполняется соотношение

$$\Phi(\bar{h}(s+1)) \leqslant \Phi(\bar{h}(s)),\ s=0, 1, 2,\dots, \tag{23}$$

то условия (23) указывают на возможность децентрализованного планирования.

В статье предложен новый подход к построению последовательности точек $\bar{h}(s)$, обеспечивающих сходимость рассматриваемого процесса децентрализованного планирования. Введем в рассмотрение множество

$$G = \{h(s) | h(s) \in H,\ h(s+1) \geqslant (1-\varepsilon(s))\bar{h}(s), \tag{24}$$

где $\varepsilon(s)$ — величина s-го шага. Из выражения (24) следует, что ограничения (19) задач (16) и (22) принимают вид

$$h_{kl}(s+1) \geqslant (1-\varepsilon(s))\,\bar{h}_{kl}(s),\ k=1,\dots, r,\ l=1,\dots, q.$$

Таким образом, задача (16) преобразуется в следующую: найти

$$\min_{h(s)\in G} \Phi(h(s)),$$

а задача (21): найти

$$\min_{h(s+1)\in G} (g_{\Phi}(\bar{h}(s)), h(s+1))$$

или в рассматриваемом случае

$$\min_{h(s+1)\in G} \sum_k \sum_l (v_{kl}(s) + \hat{u}_{kl}(s))\, h_{kl}(s+1). \tag{25}$$

Алгоритм решения исходной задачи (1)—(6) включает такие операции. 1. Определение вектора $h(s)$, $s=0$ произвольным способом. 2. Вычисление $\Phi(h(s))$ и $g_{\Phi}(\bar{h}(s))$ при $\bar{h}(s) = \bar{h}(0)$ путем решения $2q$ независимых транспортных задач (8)—(11) и (12)—(15). Последние решаются любым методом, позволяющим получить двойственные оценки, с дальнейшим суммированием транспортных расходов всех задач. На этом завершается нулевая итерация 3. Решение задачи (25) при $\bar{h}(s) = \bar{h}(0)$ и $\varepsilon(s) = \varepsilon(1)$, т. е. определение $\bar{h}(1)$. 4. Возращение к п. 2, что завершает первую итерацию и т. д.

Ввиду ограниченного объема статьи осветить вопрос, связанный с выбором величины s-го шага $\varepsilon(s)$, который существенно влияет на скорость сходимости вычислительного процесса, нет возможности. Численное исследование задачи (1)—(6), проведенное в условиях большой размерности, позволяет сделать вывод об эффективности рассматриваемого подхода.

Поступила в редколлегию 15.11.81.

УДК 629.734

М. Д. ГОДЛЕВСКИЙ, канд. техн. наук

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОПТИМИЗАЦИИ ОБЛИКОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ ПАРКА ПАССАЖИРСКИХ МАГИСТРАЛЬНЫХ САМОЛЕТОВ

Вопросам оптимального проектирования больших систем в народном хозяйстве уделяется значительное внимание. Одна из них — комплекс технических средств гражданской авиации. Первый этап его проектирования [1] — синтез модели парка пассажирских магистральных самолетов на конкретной сети авиалиний и оптимизация ее параметров. Эту проблему можно представить в виде задачи оптимального покрытия множества X на основе метода интегральных стоимостных характеристик [1, 2]. Задачу оптимизации парка самолетов на подмножестве $X^{(l)}$ будем называть L-задачей, если

$$\bigcup_{l=1}^{Q} X^{(l)} = X,\ X^{(l)} \cap X^{(s)} = \varnothing,\ \forall l, s = \overline{1,Q},\ s \neq l \tag{1}$$

и каждое множество $X^{(l)}$ обслуживается одним, двумя или тремя типами самолетов (ближние, средние, дальние магистральные), которые перекрывают весь диапазон дальности и эксплуатируются на авиалиниях протяженностью $L_j < L_{\text{пр}_i}$ независимо от потока пассажиров. Решение ряда L-задач уменьшает общее количество степеней свободы при определении оптимальной конфигурации фиксированного количества областей $Д_i$ множества X.

Модель L-задачи для трех типов самолетов в общем виде можно записать как

$$S_{L_{\text{пр}}}(X^{(l)}, Y) \quad \sum_{i=1}^{3} F_i (V_{\text{кр эк}_i};\ n_{\text{пас. о}_i},\ L_{\text{пр}_i},\ L_{\text{пр}_{i-1}}); \tag{2}$$

$$a_1^{(1)} < L_{\text{пр}_1} \leqslant b_1^{(1)} = a_1^{(2)} < L_{\text{пр}_2} \leqslant b_1^{(2)} = a_1^{(3)} < L_{\text{пр}_3};\ L_{\text{пр}_0} = 0; \tag{3}$$

$$a_2^{(i)} \leqslant V_{\text{кр эк}_i} \leqslant b_2^{(i)};\ a_3^{(i)} \leqslant n_{\text{пас о}_i} \leqslant b_3^{(i)},\ i = \overline{1,3} \tag{4}$$

при условии

$$F_i = S_{L_{\text{пр}}}^{(i)} (V_{\text{кр эк}_i},\ n_{\text{пас о}_i},\ L_{\text{пр}_i}) - \overline{S}_{L_{\text{пр}}}^{(i)}(V_{\text{кр эк}_i},\ n_{\text{пас о}_i},\ L_{\text{пр}_i},\ L_{\text{пр}_{i-1}}; \tag{5}$$

$$\overline{S}_{L_{\text{пр}}}^{(1)} (V_{\text{кр эк}_i},\ n_{\text{пас о}_1},\ L_{\text{пр}_1},\ L_{\text{пр}_0}) = 0,$$