МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Л.М. Любчик, О.А. Геляровська, О.А. Галуза,
С.М. Решетнікова, І.В. Сердюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА.

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

(Практичний курс для студентів технічних спеціальностей
заочної та дистанційної форм навчання)

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Затверджено
редакціоно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 04.06.14 р.

Харьків
НТУ «ХПІ»

2016

УДК 517.1

ББК 22.161

В 93

Рецензенти:

Г. Н. Жолткевич, д-р техн. наук, проф.,
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

В 93 Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія: навч. посіб. / Геляровська О.А., Галуза О.А., Решетнікова С.М., Сердюк І.В.; за ред. проф. Любчик Л.М. – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – 169 с.

ISBN 978-617-578-259-0

Посібник входить до серії «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання» і є першою частиною збірника. Містить мінімально необхідну кількість теорії та велику кількість розібраних зразків за темами «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія», що відповідає особливостям самостійного навчання.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Іл. 30 Бібліогр. 15

УДК 517.1

ББК 22.161

ISBN 978-617-578-259-0

© Л.М. Любчик, О.А.Геляровська,
О.А. Галуза, С.М. Решетнікова,
І.В. Сердюк, 2016 р.

ЗМІСТ

ВСТУП ... 5

ГЛАВА 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ... 6

§1. Матриці та дії над матрицями ... 6

§2. Перестановки. Визначники та їх властивості ... 16

§3. Обернена матриця ... 27

§4. Ранг матриці ... 32

§5. Системи лінійних рівнянь. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь ... 35

Запитання для самоперевірки ... 50

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ... 52

§1. Вектори. Лінійні операції над векторами ... 52

§2. Розкладання вектора на компоненти ... 55

§3. Поняття про лінійну залежність між векторами ... 56

§4. Розкладання вектора по базисній системі векторів ... 57

§5. Координати вектора на площині та у просторі ... 60

§6. Скалярний добуток двох векторів ... 64

§7. Векторний та мішаний добутки векторів ... 70

§8. Прямокутні координати ... 76

Запитання для самоперевірки ... 77

ГЛАВА 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ... 79

§1. Площина у просторі ... 79

1.1. Різновиди рівнянь площин у просторі ... 79

1.2. Відстань від точки до площини ... 86

1.3. Кут між двома площинами. Умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох площин ... 87

§2. Пряма у просторі ... 91

2.1. Різновиди рівнянь прямої у просторі ... 91

2.2. Взаємне розміщення двох прямих ... 97

§3. Пряма і площина у просторі ... 105

§4. Метод координат на площині ... 111

§5. Рівняння лінії на площині ... 115

§6. Пряма на площині ... 119

§7. Рівняння прямої на площині ... 121

§8. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох прямих 126
§9. Відстань від точки до прямої 138
§10. Криві другого порядку 140
10.1. Коло 140
10.2. Еліпс 144
10.3. Гіпербола 149
10.4. Парабола 156
10.5. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду 160
Запитання для самоперевірки 166

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 168

ВСТУП

Останні роки в технічних університетах відбуваються зрушення у методиці викладання вищої математики, яку намагаються наблизити до інженерних дисциплін та ліквідувати відстань між абстрактними математичними теоріями і приладними задачами через тлумачення формальних теорій в категоріях реальних завдань. Особливо гострою є проблема актуалізації складу заочної та дистанційної математичної освіти, де відсутній постійний контакт студента з викладачем. Тому актуальним стало створення нового методичного забезпечення, яке б відповідало цим трендам.

Навчальний посібник входить до складу серії посібників «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання».

Пропонований посібник містить теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач. Теоретична частина містить необхідні визначення, формулювання теорем, формули. Вона ілюструється розібраними задачами та прикладами, виконання яких сприяє засвоєнню фундаментальних понять вищої математики. Мінімально необхідна кількість теорії та велика кількість прикладів відповідає особливостям самостійного навчання. Досить дрібне розбиття на теми дозволяє використовувати його з різними навчальними програмами та при побудові індивідуальних траєкторій навчання.

ГЛАВА 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

§1. Матриці та дії над матрицями

Означення 1.1. *Матрицею* розміру m на n називають прямокутну таблицю $m \times n$ чисел, що складається з m рядків і n стовпців. Позначення матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij} \right).$$

Числа a_{ij} називають *елементами матриці*, де i – номер *рядка*, а j – номер *стовпця*, на перетині яких міститься елемент a_{ij}.

Означення 1.2. Матрицю, що складається лише з одного рядка, називають *матрицею – рядком* і позначають

$$\left(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \right),$$

а матрицю лише з одним стовпцем – *матрицею – стовпцем* і позначають

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Означення 1.3. Дві матриці вважаються *рівними*, якщо в них однакові кількості рядків і стовпців, а також рівні між собою відповідні елементи.

Означення 1.4. Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою*.

Означення 1.5. *Квадратною* називають матрицю, в якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто $m = n$. Її позначають так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right).$$

Число n називають *порядком матриці*. Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють її *головну діагональ*, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побічну діагональ*.

Означення 1.6. *Діагональною* називають квадратну матрицю, в якої всі елементи, що розміщені не на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Її позначають так:

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\operatorname{diag}\left(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\right).$$

Означення 1.7. *Одиничною* називають діагональну матрицю, в якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Лінійними операціями над матрицями називають операції (дії) додавання, віднімання матриць (лише однакового розміру) та множення їх на число.

Означення 1.8. *Сумою (різницею) двох матриць* $A=\left(a_{ij}\right)$ і $B=\left(b_{ij}\right)$ розміру $m\times n$ називають таку матрицю $C=\left(c_{ij}\right)$ розміру $m\times n$, елементи якої визначаються рівністю $C=\left(c_{ij}\right)$ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\left(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\right)$. Позначення суми (різниці):

$$C=A+B\left(C=A-B\right).$$

Приклад 1.1. Обчислити суму й різницю матриць

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&5&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&8&-3\\2&-4&9\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Маємо

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2&8&-1\\5&1&8\end{pmatrix};$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix}0&-8&5\\1&9&-10\end{pmatrix}.$$

Означення 1.9. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ *на дійсне число* α називають матрицю $B=(b_{ij})$, елементи якої визначаються рівністю $b_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Означення 1.10. Матрицю $(-1)A$ називають *протилежною* матриці A й позначають $-A$.

<u>Властивості лінійних операцій над матрицями:</u>

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $A+(-A)=O$;
5. $1A=A$;
6. $0A=O$;
7. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$;
8. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
9. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

Приклад 1.2.

Задані матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C=-5A+2B$.

Розв'язання.

Оскільки множення матриці на число є операція, яка полягає в тому, що кожний елемент матриці помножується на це число, то

$$-5A=-5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\cdot 1 & -5\cdot 0\\ -5\cdot 2 & -5\cdot 1\\ -5\cdot 3 & -5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -10 & -5\\ -15 & -10\end{pmatrix},$$

$$2B=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 0 & 2\cdot 1\\ 2\cdot 5 & 2\cdot 6\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 10 & 12\\ 0 & 6\end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що при додаванні матриць додаються відповідні елементи, маємо

$$C=-5A+2B=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -10 & -5\\ -15 & -10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 10 & 12\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+0 & 0+2\\ -10+10 & -5+12\\ -15+0 & -10+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 0 & 7\\ -15 & -4\end{pmatrix}.$$

Означення 1.11. *Добутком матриці A на матрицю B* називають матрицю $C=\left(c_{ij}\right)$, елементи якої визначаються рівністю

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Добуток AB має зміст тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Властивості операції множення матриць:

1. $AE = EA = A$;
2. $A \cdot O = O \cdot A = O$;
3. $A(BC) = (AB)C$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$;
5. $A(B+C) = AB + AC$;
6. $(B+C)A = BA + CA$;
7. $AB \neq BA$.

Означення 1.12. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називають *комутативними*.

Приклад 1.3.

Задані матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислити $AB - BA$.

Розв'язання.

Дістаємо

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2+1\cdot 0 & 0\cdot 3+1\cdot 1 \\ 2\cdot 2+3\cdot 0 & 2\cdot 3+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0+3\cdot 2 & 2\cdot 1+3\cdot 3 \\ 0\cdot 0+1\cdot 2 & 0\cdot 1+1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & 1-11 \\ 4-2 & 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4.

Знайти AB, BA, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Оскільки матриця A має розміри 3×3, а матриця B – розміри 3×2, то число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B, отже, AB існує.

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 2\\ 1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 2\\ 0\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 3+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Число стовпців матриці B не дорівнює числу рядків матриці A, тому добуток BA не існує.

Операція піднесення до степеня визначена тільки для квадратних матриць.

Означення 1.13. *Цілим додатним степенем* A^n $(n>1)$ *квадратної матриці* A називають добуток n матриць, рівних A, тобто

$$A^n=\underbrace{AA\ldots A}_{n\ разів}.$$

<u>Властивості операції піднесення до степеня:</u>

1. $A^kA^p=A^{k+p}$;
2. $\left(A^p\right)^k=A^{pk}$;
3. $A^0=E$;
4. $A^1=A$.

Зазначимо, що з рівності $A^n=O$ не випливає, що A – нульова матриця.

Означення 1.14. Якщо A – квадратна матриця порядку n і $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$ – многочлен від змінної x, то вираз

$$P(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_nA^n$$

називається *многочленом від матиці* A.

Приклад 1.5.

Обчислити A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35 & 20\\ 20 & 15\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.6.

Обчислити $p(A)$, якщо $p(x)=x^2-2x+1,\ A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$p(A)=A^2-2A+1E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O,$$

де O – нульова матриця.

Для кожної матриці $A=(a_{ij})$ розміру $m\times n$ можна побудувати матрицю $A^T=(a_{ij}^T)$ розміру $m\times n$, елементи визначаються рівністю $a_{ij}^T=a_{ji}$. Матрицю A^T називають *транспонованою до матриці* A. Її можна дістати, якщо в матриці рядки й стовпці поміняти місцями.

<u>Властивості операції транспонування матриць:</u>

1. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
2. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$;
3. $(AB)^T=B^T A^T$;
4. $(A^T)^T=A$.

Приклад 1.7.

Задані матриці:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 7 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Знайти $C = A^T - 2B$.

Розв'язання.

$$C = A^T - 2B = \begin{pmatrix}-3 & 6\\ 7 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}^T - 2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 7 & -2\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot(-2) & 2\cdot 1 & 2\cdot 4\\ 2\cdot(-3) & 2\cdot 2 & 2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 7 & -2\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 2 & 8\\ -6 & 4 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3-(-4) & 7-2 & -2-8\\ 6-(-6) & 1-4 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -10\\ 12 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями матриці називають такі перетворення:

1. множення всіх елементів рядка (стовпця) матриці на число, яке не дорівнює нулю;
2. переставлення рядків (стовпців) матриці;
3. додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на будь-яке число;
4. відкидання нульового рядка(стовпця);
5. транспонування матриці.

Теорема 1.1. За допомогою елементарних перетворень рядків будь-яку матрицю можна привести до ступеневого виду.

Приклад 1.8.

Привести матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ до ступеневого виду.

Розв'язання.

Приведемо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ до ступеневого виду за допомогою елементарних перетворень рядків:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} II - 2I \to II \\ III - 4I \to III \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left| III - 3II \to III \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

а) До другого додамо елементи першого рядка помноженого на (-2), до третього додамо елементи першого рядка помноженого на (-4). Дістанемо $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

б) До третього додамо елементи другого рядка помноженого на -3. Дістанемо $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

1. Для матриць

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

обчислити а) AB; б) $A\left(B+B^T\right)$; в) $(AC)^T A$; г) BA^T; д) $C^T B$; е) $A^T AB$; ж) $C^T BA^T + 2C^T A^T$; з) $3ABC - AC$.

2. Обчислити а) $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}^5, \alpha \in \mathbb{R}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^3$; в) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^2$.

3. Знайти $p(A)$ від матриці A, якщо $p(x) = -4x^2 + 2x + 3$ та

а) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

4. За допомогою елементарних перетворень привести до ступеневого вигляду наступні матриці:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & -3 & -1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

§2. Перестановки. Визначники та їх властивості

Розглянемо деякий набір із n предметів $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для вивчення їх взаємного розміщення можна обмежитись розглядом лише номерів $1, 2, \ldots, n$. Тому будемо розглядати всі можливі перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ цих номерів. Число всіх таких перестановок дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Означення 2.1. Пара чисел α_i, α_k із перестановок $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ утворює *інверсію*, якщо попереднє число з цієї пари більше наступного числа.

Число всіх інверсій в перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ позначимо через $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$.

Означення 2.2. Перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ натуральних чисел $1, 2, \ldots, n$ називається *парною*, якщо число $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$ її інверсій – парне, і *непарною*, якщо $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$ – непарне.

Приклад 2.1.

З'ясувати парність перестановки $2,5,1,4,7,3,6$.

Розв'язання.

$$t = [2,5,1,4,7,3,6] = 2 + 0 + 3 + 1 + 1 = 7 .$$

Перестановка має 7 інверсій, тому вона являється непарною.

Означення 2.3. З двох перестановок $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ і $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ одних і ті ж самих чисел можна скласти новий об'єкт

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix},$$

який називають *підстановкою n –го степеня.*

Означення 2.4. Підстановку називають парною, якщо перестановки, які входять до її складу, мають однакову парність, і непарною в протилежному випадку.

Парність підстановки співпадає з парністю $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n] + [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n]$ – загальної кількості інверсій в рядках підстановки.

Запишемо квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 2.5. *Визначником (детермінантом)* $n-$ *го порядку матриці* A називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків виду

$$(-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n},$$

де $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, a_{3\alpha_3}, a_{n\alpha_n}$ – відповідно елементи першого , другого, третього, n –го рядків матриці A ; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ – перестановка чисел $1, 2, \dots, n$; t – число інверсій цієї перестановки. Підсумовування здійснюється за всіма можливими перестановками $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ других індексів.

Подамо цю суму у вигляді

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n}.$$

Число її доданків становить $n!$.

Визначник матриці A позначається так:

$$\det A \equiv |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

Якщо $n = 1$, тоді $\det A = a_{11}$.

Згідно з означенням *детермінант другого порядку* дорівнює:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Детермінант третього порядку обчислюється за формулою (*правило трикутників*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} .$$

Приклад 2.2.

Обчислити визначники:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

а) Оскільки визначник другого порядку дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі, то

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot 5 = -17 .$$

б) Використовуючи правило трикутників, отримуємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 0\cdot2\cdot2 + 0\cdot5\cdot3 - 0\cdot1\cdot0 - 1\cdot2\cdot3 - 1\cdot2\cdot5 = -15 .$$

Розглянемо <u>властивості визначників</u>.

1. Визначники транспонованих матриць рівні:

$$\det A = \det A^T .$$

Із умови цієї властивості випливає твердження: всі властивості визначника, які доведені для його рядків, зберігають силу і для його стовпців.

2. При перестановці місцями двох будь-яких рядків (стовпців) визначник змінює свій знак на протилежний.

Наступні дві властивості означають лінійність визначника відносно елементів будь-якого його рядка (стовпця).

3. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) подаються у вигляді суми двох доданків, тоді визначник дорівнює сумі двох визначників, в першому з яких елементи відміченого рядка (стовпця) дорівнюють першим доданкам, в другому – другим.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогічне твердження зберігає силу, якщо елементи деякого рядка (стовпця) подаються у вигляді суми m доданків.

4. Якщо всі елементи деякого фіксованого рядка (стовпця) визначника Δ помножити на елемент λ основного кільця K, то дістанемо новий визначник Δ_1, причому $\Delta_1 = \lambda\Delta$.

5. Визначник Δ дорівнює нулю, якщо він має:
   1) нульовий рядок (стовпець);
   2) принаймні два однакові рядки (стовпця) (з різними номерами);
   3) принаймні два рядки (стовпця), елементи яких пропорційні;
   4) принаймні один рядок (стовпець), елементи якого є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців).
6. Визначник не зміниться, якщо до деякого його рядка (стовпця) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців).

Означення 2.6. Виділимо у визначнику

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i -й рядок і k -й стовпець та викреслимо елементи цього рядка і стовпця. Дістанемо визначник $(n-1)$ -го порядку

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Він називається *мінором* елемента a_{ik} , який міститься в Δ на перетині i -го рядка і k -го стовпця.

Означення 2.7. Добуток $A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik}$ називається *алгебричним доповненням елемента* a_{ik} .

7. Визначник Δ дорівнює сумі добутків елементів будь-якого виділеного рядка на їх алгебричні доповнення:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} .$$

Аналогічний розклад має місце і для стовпців:

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} .$$

Ця властивість носить назву *теорема розкладання визначника* за елементами рядка або стовпця.

8. Визначник верхнього (нижнього) трикутного виду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

9. Сума добутків елементів деякого рядка визначника Δ на відповідні алгебраїчні доповнення елементів будь-якого іншого рядка дорівнює нулю:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j.$$

Аналогічна властивість має місце і для стовпців:

$$a_{1k}A_{1l}+a_{2k}A_{2l}+\ldots+a_{nk}A_{nl}=0,\ n\neq l.$$

Приклад 2.3.

Обчислити визначники: $\begin{vmatrix}1&2&0\\5&1&2\\0&3&1\end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Застосовуючи теорему розкладання визначника за елементами другого стовпця, отримаємо

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\5&1&2\\0&3&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}5&2\\0&1\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}1\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}3\begin{vmatrix}1&0\\5&2\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot5+1\cdot1-3\cdot2=-15.$$

Елементарні перетворення визначників

При обчисленні визначника (з елементами з поля дійсних чисел) виникають певні труднощі, якщо при цьому обчисленні використовувати лише означення. Визначник n-го порядку містить $n!$ доданків – добуток його n елементів. Тому треба знаходити інші методи, що базуються на властивостях визначників.

Означення 2.8. *Елементарними перетвореннями визначника* Δ (з елементами a_{ik} з поля P)

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

називаються такі перетворення:

1. Множення всіх елементів деякого фіксованого рядка визначника на будь – який скаляр $\lambda \neq 0$ (тобто на елемент $\lambda \neq 0$ основного поля P).
2. Додавання до елементів деякого рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на скаляр λ.
3. Перестановка місцями двох будь – яких рядків.

Аналогічні перетворення 1, 2, 3 для стовпців також називаються елементарними.

Теорема 2.1. При елементарних перетвореннях (з рядками або стовпцями) визначника Δ одержується новий визначник Δ_1:

1) при елементарному перетворенні типу 1 $\Delta_1 = \lambda\Delta$;
2) при елементарному перетворенні типу 2 $\Delta_1 = \Delta$;
3) при елементарному перетворенні типу 3 $\Delta_1 = -\Delta$.

Основні методи обчислення визначників:

1. Метод пониження порядку.
2. Метод зведення до трикутного вигляду.
3. Метод рекурентних співвідношень.

Приклад 2.4.

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Спосіб 1.

Використаємо метод пониження порядку, оснований на застосуванні теореми розкладання визначника за елементами деякого рядка або стовпця.

Фіксуємо стовпець з номером $j = 3$ і ведучим елементом $a_{33} = 1$. Проведемо елементарні перетворення:

1) винесемо спільний множник з четвертого стовпця;
2) додамо до першого рядка третій рядок;
3) додамо до другого рядка третій рядок, помножений на -3.

Матимемо

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&-1&4\\-1&2&3&2\\2&5&1&8\\1&2&0&6\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2&4&-1&2\\-1&2&3&1\\2&5&\boxed{1}&4\\1&2&0&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}4&9&0&6\\-7&-13&0&-11\\2&5&\boxed{1}&4\\1&2&0&3\end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник розкладемо за елементами третього стовпця:

$$\Delta=2\cdot(-1)^{3+3}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}4&9&6\\-7&-13&-11\\1&2&3\end{vmatrix}.$$

Аналогічно зводимо обчислення визначника третього порядку до обчислення визначника другого порядку. Для цього виділимо в ньому елемент $a_{31}=1$, що міститься в третьому рядку і першому стовпці. Виконаємо наступні перетворення:

1) додамо до другого стовпця перший стовпець, помножений на -2;
2) додамо до третього стовпця перший стовпець, помножений на -3.

Матимемо

$$\Delta=2\cdot\begin{vmatrix}4&1&-6\\-7&1&10\\\boxed{1}&0&0\end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник розкладемо за елементами третього рядка, і після цього обчислюємо визначник третього порядку:

$$\Delta=2\cdot(-1)^{3+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&-6\\1&10\end{vmatrix}=2\cdot(1\cdot10-1\cdot(-6))=2\cdot(10+6)=2\cdot16=32.$$

Спосіб 2.

Обчислимо визначник методом зведення до трикутного вигляду.

Виконаємо наступні перетворення:

1) винесемо спільний множник 2 з четвертого стовпця;

2) поміняємо місцями перший та четвертий рядки – знак визначника зміниться на протилежний;

3) додамо до другого рядка перший рядок;

4) додамо до третього рядка перший рядок, помножений на -2;

5) додамо до четвертого рядка перший рядок, помножений на -2.

Дістанемо визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&-1&4\\-1&2&3&2\\2&5&1&8\\1&2&0&6\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2&4&-1&2\\-1&2&3&1\\2&5&1&4\\1&2&0&3\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}1&2&0&3\\-1&2&3&1\\2&5&1&4\\2&4&-1&2\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}1&2&0&3\\0&4&3&4\\0&1&1&-2\\0&0&-1&-4\end{vmatrix}.$$

Проведемо серію елементарних перетворень:

1) поміняємо місцями другий та третій рядки;
2) додамо до третього рядка другий рядок, помножений на -4;
3) віднімемо від четвертого рядка третій рядок.

$$\Delta=2\cdot\begin{vmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&-2\\0&0&-1&12\\0&0&-1&-4\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&-2\\0&0&-1&12\\0&0&0&-16\end{vmatrix}.$$

Визначник верхнього трикутного виду дорівнює добутку елементів головної діагоналі. Маємо

$$\Delta=2\cdot1\cdot1\cdot(-1)\cdot(-16)=32.$$

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

Обчислити визначник:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = -28$.)

2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = 13$.)

3. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = 8$.)

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = 35$.)

5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = -6$.)

6. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = \sin(\alpha - \beta)$.)

7. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)$.)

8. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -12 & 15 \\ 1 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & -12 & 25 \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = 5$.)

9. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = -9$.)

10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$. (Відповідь: $\Delta = 24$.)

§3. Обернена матриця

Означення 3.1. *Оберненою матрицею до квадратної матриці* A називають таку матрицю A^{-1}, для якої $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Означення 3.2. Квадратну матрицю називають *не виродженою*, або *неособливою*, якщо її визначник не дорівнює нулю $(\det A \neq 0)$, в противному разі $(\det A = 0)$ матрицю називають *виродженою*, або *особливою*.

Теорема 2.1 (необхідна й достатня умова існування оберненої матриці). Обернена матриця A^{-1} існує й єдина тоді і лише тоді, коли матриця A не вироджена.

<u>Методи обчислення оберненої матриці:</u>

1 Застосування формули:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}; Δ – визначник матриці A.

2 Метод елементарних перетворень:

1) до даної матриці A справа дописати одиничну матрицю E;

2) елементарними перетвореннями над рядками матриці $(A|E)$ матрицю A звести до одиничної матриці. У результаті на місці дописаної одиничної матриці знаходитиметься обернена матриця, тобто

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn} \end{array}\right) = (E|A^{-1}). \quad (3.2)$$

Властивості невироджених матриць:

1 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$;

2 $\left(A^{n}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{n}$;

3 $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

4 $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$;

5 $\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$.

Приклад 2.1.

З'ясувати, чи існує матриця, обернена матриці $A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$, і якщо існує, знайти її. Виконати перевірку: $AA^{-1}=E$.

Розв'язання.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\left(A^{S}\right)^{T},$$

де $\det A-$ визначник матриці A,

$A^{S}-$ союзна матриця, що отримана з даної матриці A заміною всіх її елементів відповідними їм алгебраїчними доповненнями.

Визначник матриці

$$\det A=\begin{vmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{vmatrix}=-3\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A за формулою

$$A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\cdot M_{ij},$$

де $M_{ij}-$ мінор елемента a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7\,,\; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\,,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6\,,\; A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6\,,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\,,\; A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3\,,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1\,,\; A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3\,.$$

Складемо союзну матрицю

$$A^S = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^S\right)^T,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знаходження оберненої матриці шляхом перевірки виконання рівності $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 7 \cdot 7 - 6 \cdot 9 + 1 \cdot 5 & 7 \cdot 3 - 6 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ -5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -5 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 5 & -5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 & 6 \cdot 7 - 3 \cdot 9 - 3 \cdot 5 & 6 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Приклад 2.2.

Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim |II - I \to I| \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} II - 3I \to II \\ III - I \to III \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim |III - II \to III| \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} I - III \to I \\ II - III \to II \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} I - \frac{2}{3} II \to I \\ \frac{1}{3} II \to II \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(E|A^{-1}\right).$$

Перевірка показує, що $AA^{-1} = E$, тобто матриця A^{-1} знайдена вірно.

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A:

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. (Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2/3\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$.)

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. (Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}2/7 & -4/7 & 5/7\\ 1/7 & -2/7 & -1/7\\ 3/7 & 1/7 & -3/7\end{pmatrix}$.)

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 4\end{pmatrix}$. (Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 7 & -6\\ -8 & -15 & 13\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.)

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. (Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$.)

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$. (Відповідь: $\nexists\, A^{-1}$.)

6. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 3\\ 7 & 9 & 5 & 6\\ 5 & 7 & 4 & 3\\ 3 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$.(Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-10 & 5 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -2 & 3\\ 3 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.)

§4. Ранг матриці

Для дослідження й розв’язування багатьох задач важливе значення має поняття рангу матриці.

Якщо в матриці A розміру $m \times n$ викреслити будь-які k рядків і k стовпців, то можна виокремити квадратні підматриці k-го порядку, де $k \le \min(m; n)$.

Визначники таких під матриць називають *мінорами* k*-го порядку матриці* A.

Означення 4.1. *Рангом матриці* A називають найвищий порядок ненульових мінорів цієї матриці й позначають так: $rangA$, або $r(A)$.

Зазначимо:

- для рангу матриці A розміру $m \times n$ виконується співвідношення $r(A) \le \min(m; n)$;
- $r(A) = 0$ тоді і лише тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю;
- для квадратної матриці n-го порядку $r(A) = n$ тоді й лише тоді, коли матриця A невироджена.

Означення 4.2. Будь-який відмінний від нуля мінор матриці A, порядок якого $r = rangA$, називається *базисним мінором.*

Якщо порядок базисного мінору рівний r, то всі мінори порядків вищих за r рівні нулю.

Базисний мінор визначений неоднозначно.

Стовпці і рядки матриці A, які входять в базисний мінор, називаються *базисними.*

Теорема 4.1 (про базисний мінор). Базисні рядки (стовпці) матриці A лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) матриці A може бути представлений у вигляді лінійної комбінації базисних рядків (стовпців).

Максимальна кількість лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці дорівнює її рангу.

Теорема 4.2. Унаслідок елементарних перетворень матриці її ранг не змінюється.

Дана теорема дає наступний метод обчислення рангу довільної матриці – треба виконувати допустимі елементарні перет-

ворення над рядками або стовпчиками матриці до ступеневого вигляду, що дозволяє явним чином визначити базисний мінор, а отже, і ранг матриці. Проілюструємо цей метод на прикладі.

Приклад 4.1.

Обчислити ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ -1 & 7 & 2 & 18\\ 2 & -5 & -3 & -14\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ -1 & 7 & 2 & 18\\ 2 & -5 & -3 & -14\end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix}II-4I\to II\\ III+I\to III\\ IV-2I\to IV\end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & -1 & -22\\ 0 & 9 & 1 & 22\\ 0 & -9 & -1 & -22\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix}III+II\to III\\ IV-II\to IV\end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & -1 & -22\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$rang\,A = rang\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & -1 & -22\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & -1 & 22\end{pmatrix} = 2\,.$$

Базисним мінором є, наприклад, мінор $M_{1,2}^{1,2}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -9\end{vmatrix}=-9\neq 0$.

Будь-який мінор третього або четвертого порядку буде рівним нулю.

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

Обчислити ранг матриці:

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. (Відповідь: $rgA=3$.)

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. (Відповідь: $rgA=3$.)

Визначити максимальну кількість лінійно незалежних рядків матриці:

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (Відповідь: 3.)

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. (Відповідь: 2.)

§5. Системи лінійних рівнянь. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Означення 5.1. *Системою m лінійних рівнянь із n невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, або *лінійною системою*, називають систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа a_{ij} називають *коефіцієнтами*, а числа b_i – *вільними членами* системи.

Означення 5.2. Лінійну систему називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю. Якщо ж серед вільних членів є ненульові, то лінійну систему називають *неоднорідною*.

Означення 5.3. *Розв'язком системи лінійних рівнянь* називають упорядковану сукупність чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, підставлення яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює кожне з рівнянь системи на тотожність.

Означення 5.4. Систему називають *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок. Якщо система не має розв'язків, то її називають *несумісною*. Сумісну систему, яка має тільки один розв'язок, називають *визначеною*. Якщо сумісна система має нескінченну кількість розв'язків, її називають *невизначеною*.

Означення 5.5. Дві системи вважають *еквівалентними*, якщо множини їхніх розв'язків однакові.

Дві несумісні системи еквівалентні.

Подамо систему у матричному вигляді.

Матрицю $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називають *основною матрицею системи*, а матрицю $\left(A|b\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$ – *розширеною матрицею системи*. Позначимо через $\vec{x}$ та $\vec{b}$ матриці – стовпці $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$. Тоді система набере вигляду $A\vec{x}=\vec{b}$.

Теорема 5.1 (Кронекера – Капелли).

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб збігалися ранги її основної та розширеної матриць.

Теорема 5.2 (про визначеність системи лінійних рівнянь).

Для того, щоб система лінійних рівнянь мала лише один розв’язок, необхідно і достатньо, щоб ранг її матриці збігався з числом її невідомих.

Якщо ранг сумісної системи менший від числа невідомих, тобто $rg<n$, то *система невизначена* й має нескінченну кількість розв’язків.

Методи розв’язування систем лінійних рівнянь

Нехай кількість рівнянь системи дорівнює числу невідомих, тобто $m=n$. Тоді матриця системи буде квадратною, а її визначник $\Delta=\det A$ називають *основним визначником системи*.

1. *Матричний метод.* Припустимо, що матриця A невироджена, тобто її визначник $\Delta=\det A\neq 0 \Rightarrow$ обернена матриця A^{-1} існує. Запишемо систему в матричному вигляді

$$A\vec{x}=\vec{b}.$$

Помножимо зліва обидві частини матричної рівності на матрицю A^{-1}

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{b},$$

$$E\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{b},$$

$$\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{b}. \qquad (5.1)$$

2. *За формулами Крамера.*

Теорема 5.3 (Крамера).

Нехай Δ – основний визначник системи, а Δ_j $\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ – визначник, який дістають із Δ заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів $\vec{b}$. Тоді, якщо $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (5.2)$$

1) Якщо $\Delta=0,\ \Delta_j\neq 0\Rightarrow$ система не має розв'язків;

2) У разі однорідної системи і $\Delta\neq 0$ вона має лише нульовий розв'язок; якщо ж $\Delta=0$, то система має безліч розв'язків.

3. *Метод Жордана - Гаусса – метод послідовного виключення невідомих* – полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної системи, з якої знаходять змінні.

Приклад 5.1.

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) трьома методами:

1) за формулами Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
3) методом Жордана - Гаусса.

Виконати перевірку правильності розв'язку.

$$\begin{cases}x+y+z=3;\\2x-y+z=2;\\-3x+2y+z=0.\end{cases}$$

Розв'язання.

1) Якщо визначник Δ СЛАР відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

де $\Delta-$ визначник системи,

$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ – допоміжні визначники, що одержуються з визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів відповідно при x, y, z на стовпець вільних членів.

Визначник системи дорівнює

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\-3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-3&-1\\0&5&4\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-3&-1\\5&4\end{vmatrix}=-3\cdot4-5\cdot(-1)=-7.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}3&1&1\\2&-1&1\\0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&0\\2&-3&0\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3&-1\\2&-3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-2\cdot(-1)=-7;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&1\\-3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&0\\5&2&0\\-3&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}4&3\\5&2\end{vmatrix}=4\cdot2-5\cdot3=-7;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&-1&2\\-3&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\3&0&5\\-5&0&-6\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3&5\\-5&-6\end{vmatrix}=-(3\cdot(-6)-(-5)\cdot5)=-7.$$

За формулами Крамера знайдемо:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1;$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1;$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1.$$

2) Запишемо СЛАР у матричній формі:

$$A\vec{x}=\vec{b},$$

де $A-$ матриця системи; $\vec{x}-$ стовпець невідомих; $\vec{b}-$ стовпець вільних членів.

Якщо матриця A невироджена, то розв'язок системи можна знайти за допомогою оберненої матриці у вигляді:

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b},$$

де A^{-1} – обернена матриця.

Для заданої системи

$$\begin{cases} x + y + z = 3; \\ 2x - y + z = 2; \\ -3x + 2y + z = 0, \end{cases}$$

стовпець невідомих $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, стовпець вільних членів $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^S \right)^T,$$

де $\det A$ – визначник матриці A,

A^S – союзна матриця, що отримана з даної матриці A заміною всіх її елементів відповідними їм алгебраїчними доповненнями.

Визначник матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

Складемо союзну матрицю

$$A^S=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 1\\ 1 & 4 & -5\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\left(A^S\right)^T,$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -5 & 1\\ 1 & 4 & -5\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}^T=\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -5 & 4 & 1\\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знаходження оберненої матриці шляхом перевірки виконання рівності $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -5 & 4 & 1\\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}-3+2-6 & -3-1+4 & -3+1+2\\ -5+8-3 & -5-4+2 & -5+4+1\\ 1-10+9 & 1+5-6 & 1-5-3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Тепер знаходимо розв'язок системи:

$$\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b} = \frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix} -9+2 \\ -15+8 \\ 3-10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = y = z = 1.$$

3) Метод Жордана – Гаусса (метод повного виключення).

Нехай задано СЛАВ $A\vec{x} = \vec{b}$. Запишемо її розширену матрицю $\left(A\middle|\vec{b}\right)$. Кожному елементарному перетворенню над рядками розширеної матриці відповідає аналогічне перетворення рівнянь початкової СЛАР.

Елементарні перетворення над рядками розширеної матриці:

1. перестановка місцями двох будь-яких рядків;
2. множення всіх елементів деякого рядка на будь-який скаляр $\lambda \neq 0$;
3. додавання до елементів деякого рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на скаляр λ;
4. вилучення рядка з членами, пропорційними, зокрема рівними, членам будь-якого рядка матриці;
5. вилучення рядка, складеного з нулів.

Ці перетворення не змінюють множину розв'язків системи.

За допомогою елементарних перетворень над рядками розширеної матриці системи $\left(A\middle|\vec{b}\right)$ зводиться до матриці $\left(E\middle|\vec{b}'\right)$, стовпець $\vec{b}'$ є розв'язком СЛАР $A\vec{x} = \vec{b}\,(\det A \neq 0)$.

Складемо розширену матрицю $\left(A\middle|\vec{b}\right)$ та виконаємо необхідні елементарні перетворення:

$$\left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} II-2I\to II \\ III+3I\to III \end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} I+II\to I \\ -1\cdot II\to II \\ III+4II\to III \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \sim \left|\frac{-1}{7}\cdot III\to III\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}\right) \sim \left|II \leftrightarrow III\right| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 4\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}I+2II\to I\\ III-3II\to III\end{array}\right|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)=\left(E\left|\vec{b}'\right.\right).$$

$$\vec{b}'=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Перевірка.

Підставимо отриманий розв’язок у систему.

$$\begin{cases}1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1=3;\\ 2\cdot1-1\cdot1+1\cdot1=2;\\ -3\cdot1+2\cdot1+1\cdot1=0.\end{cases}$$

Система розв’язана вірно.

Однорідні системи лінійних рівнянь

Система рівнянь називається *однорідною*, якщо $\vec{b}=\vec{0}$, тобто система має вигляд $A\vec{x}=\vec{0}$.

Однорідна система завжди сумісна. Вона має принаймні один розв’язок $\vec{x}=\vec{0}$, який називається *тривіальним*.

Однорідна система має нетривіальні розв’язки, якщо $rgA<n$, де n - число невідомих. У цьому випадку система має безліч розв’язків.

Однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний (тривіальний) розв’язок, тоді і тільки тоді, коли $\det A\neq 0$. Отже, для існування нетривіальних розв’язків необхідно і достатньо, щоб $\det A=0$.

Теорема 5.4. Для заданої однорідної СЛАР $A\vec{x}=\vec{0}$, для якої $rgA=r<n$, існує $n-r$ лінійно незалежних розв’язків $E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$ і будь-який розв’язок системи представляється у вигляді лінійної комбінації цих розв’язків.

$E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$ - *фундаментальна система розв’язків* (Ф.С.Р) однорідної системи рівнянь. Загальний розв’язок однорід-

ної СЛАР $A\vec{x}=\vec{0}$ є лінійною комбінацією векторів фундаментальної системи розв'язків:

$$\vec{x}_{З.О.}=c_1E_1+c_2E_2+\ldots+c_{n-r}E_{n-r}=\sum_{k=1}^{n-r}c_kE_k,\quad \forall c_k\in\mathbb{R}\left(k=\overline{1,n-r}\right).$$

Приклад 5.2.

Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=0;\\x_1+x_2+2x_3+3x_4=0;\\2x_1+4x_2+5x_3+10x_4=0.\end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо матрицю A однорідної СЛАВ і за допомогою елементарних перетворень, що виконуються над рядками матриці, зведемо її до ступеневого вигляду:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&2&3\\2&4&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{vmatrix}II-I\to II\\III-2I\to III\end{vmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&2&1&4\\0&6&3&12\end{pmatrix}\sim\begin{vmatrix}\frac{1}{2}II\to II\\III-3II\to III\end{vmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&\frac{1}{2}&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\left|I+II\to I\right|\sim\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}&\begin{matrix}\frac{3}{2}&1\\\frac{1}{2}&2\end{matrix}\end{pmatrix}.$$

$Rg=2<n=4$, де $n-$число змінних. Система має нетривіальні розв'язки. Базисний мінор $M=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Число вільних змінних $n-Rg=2$. Нехай x_1,x_2- базисні змінні, x_3,x_4- вільні змінні.

Отже, система, рівносильна заданій, матиме вигляд

$$\begin{cases}x_1+\frac{3}{2}x_3+x_4=0;\\x_2+\frac{1}{2}x_3+x_4=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2}x_3-x_4;\\x_2=-\frac{1}{2}x_3-x_4.\end{cases}$$

Загальний розв'язок:

Загальний розв'язок:

$$\vec{x}\left(x_3, x_4\right)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x_3-x_4 \\ -\frac{1}{2}x_3-x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Якщо вільним змінним послідовно надати значень $x_3=1, x_4=0$, а потім $x_3=0, x_4=1$, дістанемо фундаментальну систему розв'язків (Ф.С.Р.):

$$E_1=\vec{x}\left(1,0\right)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad E_2=\vec{x}\left(0,1\right)=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$\vec{x}_{З.О.}=c_1E_1+c_2E_2=c_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 5.3.

Дослідити систему на сумісність та знайти її загальний розв'язок методом Жордана – Гаусса (повного виключення) та один частинний розв'язок системи. Виконати перевірку правильності частинного розв'язку.

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=4; \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=8; \\ 2x_1+4x_2+5x_3+10x_4=20. \end{cases}$$

Розв'язання.

Використаємо метод Жордана – Гаусса (метод повного виключення). Запишемо розширену матрицю $\left(A\middle|\vec{b}\right)$ неоднорідної СЛАР та проведемо необхідні елементарні перетворення над рядками:

$$\left(A\middle|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&4\\1&1&2&3&8\\2&4&5&10&20\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}II-I\to II\\III-2I\to III\end{array}\right|\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&4\\0&2&1&4&4\\0&6&3&12&12\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot II\to II\\III-3II\to III\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&4\\0&1&\frac{1}{2}&2&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left|I+II\to I\right|\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{3}{2}&1&6\\0&1&\frac{1}{2}&2&2\end{array}\right).$$

$Rg=2<n=4$, де $n-$число змінних. Система сумісна, має безліч розв'язків. Базисний мінор $M=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Число вільних змінних $n-Rg=2$. Нехай x_1, x_2- базисні змінні, x_3, x_4- вільні змінні.

Отже, система, рівносильна заданій, матиме вигляд

$$\begin{cases}x_1+\frac{3}{2}x_3+x_4=6;\\x_2+\frac{1}{2}x_3+x_4=2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=6-\frac{3}{2}x_3-x_4;\\x_2=2-\frac{1}{2}x_3-x_4.\end{cases}$$

Загальний розв'язок неоднорідної СЛАВ представиться так:

$$\vec{x}_{З.Н.}=\vec{x}\left(x_3, x_4\right)=\begin{pmatrix}6-\frac{3}{2}x_3-x_4\\2-\frac{1}{2}x_3-x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad x_3, x_4\in\mathbb{R}.$$

Поклавши, наприклад, $x_3=x_4=0$, отримаємо частинний розв'язок:

$$\vec{x}_{ч.н.} = \vec{x}(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Безпосередньою підстановкою в систему частинного розв'язку, впевнюємося в його правильності:

$$\begin{cases} 1 \cdot 6 - 1 \cdot 2 + 0 - 0 = 4; \\ 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 8; \\ 2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 20. \end{cases}$$

Приклад 5.4.

Дослідити систему на сумісність та знайти її загальний розв'язок методом Жордана – Гаусса (повного виключення) та один частинний розв'язок системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1; \\ 5x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

Розв'язання.

Використаємо метод Жордана – Гаусса (метод повного виключення). Запишемо розширену матрицю $\left(A\middle|\vec{b}\right)$ неоднорідної СЛАР та проведемо необхідні елементарні перетворення над рядками:

$$\left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left|I - II \to I\right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} II - 2I \to II \\ III - 5I \to III \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -1 \end{array}\right) \sim \left|III - II \to III\right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Оскільки, $rg(A) = 2, rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3 \Rightarrow rg(A) \neq rg\left(A\middle|\vec{b}\right) \Rightarrow$ система не має розв'язків.

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) трьома методами:

1) за формулами Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
3) методом Жордана - Гаусса.

Виконати перевірку правильності розв'язку.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ (Відповідь: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$ (Відповідь: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ (Відповідь: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.)

Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

(Відповідь: $\vec{x}_{З.О.} = c_1 E_1 + c_2 E_2 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.)

5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

(Відповідь: $\vec{x}_{З.О.} = c_1E_1 + c_2E_2 = c_1\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$)

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

(Відповідь: $\vec{x}_{З.О.} = c_1E_1 + c_2E_2 = c_1\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$)

Дослідити систему на сумісність та знайти її загальний розв'язок методом Жордана – Гаусса (повного виключення) та один частинний розв'язок системи. Виконати перевірку правильності частинного розв'язку.

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 10. \end{cases}$

(Відповідь: $\vec{x}_{З.Н.} = \vec{x}(x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -8 - 5x_3 - 5x_4 \\ -6 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$)

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2; \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 3; \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 4x_5 = 3; \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 5x_5 = -3. \end{cases}$

(Відповідь: $\vec{x}_{З.Н.} = \vec{x}(x_3, x_5) = \begin{pmatrix} 12 - 2x_3 - 35x_5 \\ -13 + x_3 + 36x_5 \\ x_3 \\ -2 + 7x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $x_3, x_5 \in \mathbb{R}$.)

9. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 = -3; \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 9x_4 = -7. \end{cases}$ (Відповідь: $\varnothing$.)

10. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -6; \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 9; \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7; \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ (Відповідь: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.)

Запитання для самоперевірки з теми

«Лінійна алгебра»

1. Що таке матриця?
2. Які є види матриць?
3. Які операції над матрицями називають лінійними?
4. Яку матрицю називають сумою (різницею) матриць?
5. Яку матрицю називають добутком матриці на число?
6. Перечисліть властивості лінійних операцій?
7. Яку матрицю називають добутком матриць?
8. Які властивості матриць?
9. Як обчислюють визначник матриці другого, третього,…, -го порядку?
10. Перечисліть властивості визначників.
11. Запишіть розклад визначника –го порядку за елементами будь-якого рядка (стовпця).
12. Що називають рангом матриці?
13. Які перетворення матриці називають елементарними?
14. Що називається базисним мінором матриці?
15. Сформулюйте теорему про базисний мінор.
16. Чому дорівнює максимальне число лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці?
17. Що таке обернена матриця?
18. Які існують методи обчислення оберненої матриці?
19. Перечисліть властивості оберненої матриці.
20. Що називають розв’язком системи лінійних рівнянь?
21. Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною?
22. Яку систему лінійних рівнянь називають несумісною?
23. Яку систему лінійних рівнянь називають невизначеною?
24. Як формулюється теорема Кронекера – Капелли?
25. В якому випадку СЛАР має єдиний розв’язок, безліч розв’язків, не має розв’язків?
26. У чому полягає основна ідея методу Жордана – Гаусса (метод повного виключення)?
27. В якому випадкові можна користуватися матричним методом розв’язування СЛАР?

28. Як можна застосовувати формули Крамера для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь? В якому випадку можна користуватися цими формулами?

29. За якої умови система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?

30. Що можна сказати про систему лінійних рівнянь, якщо основний визначник дорівнює нулю?

31. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?

32. Сформулюйте критерій нетривіальної розв'язності однорідної СЛАР.

33. Що називається фундаментальною системою розв'язків лінійної системи однорідних рівнянь?

34. Запишіть структуру загального розв'язку однорідної СЛАР; неоднорідної.

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

§1. Вектори. Лінійні операції над векторами

Означення 1.1. *Скалярними* величинами називаються величини, що їх цілком можна охарактеризувати числами (наприклад, довжина, площа, об’єм, маса, енергія, робота та ін.).

Означення 1.2. *Векторними* величинами називаються величини, для повної характеристики яких потрібно зазначення числа і напрямку у просторі (наприклад, швидкість, прискорення, сила, напруженість поля та ін.).

Означення 1.3. *Вектором* (геометричним вектором) називається напрямлений відрізок. Довжину вектора позначають знаком абсолютної величини (модуля).

Означення 1.4. Вектор, початок якого суміщається з його кінцем, називається *нульовим* вектором. Довжина нульового вектора дорівнює нулю.

Означення 1.5. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні одній і тій самій прямій.

Означення 1.6. Вектори називаються *компланарними*, якщо вони паралельні одній і тій самій площині. Два вектори завжди компланарні.

Означення 1.7. *Одиничним* вектором називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

Означення 1.8. *Ортом* даного вектора $\vec{a}$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора $\vec{a}$. Орт вектора $\vec{a}$ позначають $\vec{a}_0$, причому $|\vec{a}_0| = 1$ і $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$.

Означення 1.9. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *рівними*, якщо вони мають однакові довжину й напрям. Два вектори рівні тоді і тільки тоді, якщо існує паралельний перенос, за допомогою якого ці два вектори можна сумістити.

Лінійними операціями над векторами є операції їх додавання та множення дійсного числа на вектор.

Означення 1.10. *Сумою двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, за неодмінної умо-

ви, що кінець вектора $\vec{a}$ суміщається з початком вектора $\vec{b}$ (*правило трикутника*).

Додавання двох неколінеарних векторів можна також визначити за допомогою *правила паралелограма*:

якщо ці вектори – доданки звести до спільного початку, то вектор – сума, що виходить з цього початку, суміщається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах – доданках.

Означення 1.11. *Сумою векторів* $\vec{a}_i \left(i=\overline{1,n}\right)$ називається вектор, який позначається $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i$, початок якого суміщається з початком першого вектора $\vec{a}_1$, а кінець – з кінцем останнього вектора $\vec{a}_n$.

Властивості дії додавання векторів:

1. (комутативна властивість додавання)
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$
2. (асоціативна властивість додавання)
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$
3. Для довільного вектора $\vec{a}$ існує нульовий вектор $\vec{0}$ такий, що
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$
4. Для довільного вектора існує протилежний вектор $\left(-\vec{a}\right)$ такий, що
$$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}.$$

Означення 1.12. *Вектором, протилежним вектору* $\vec{a}\neq 0$, називається вектор, колінеарний з вектором $\vec{a}$, рівний йому за довжиною і напрямлений в бік, протилежний вектору $\vec{a}$.

Користуючись поняттям протилежного вектора, віднімання векторів виконується за правилом:

щоб відняти вектор $\vec{b}$ від вектора $\vec{a}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний векторові $\vec{b}$.

Означення 1.13. *Добутком числа* α *на вектор* $\vec{a}$ називають вектор $\alpha\vec{a}$, що має довжину $|\alpha\vec{a}|$, і напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$.

При множенні вектора $\vec{a}$ на $\alpha = -1$ дістаємо протилежний вектор.

Ділення вектора $\vec{a}$ а число $m \neq 0$ можна замінити множенням того самого вектора на число $\dfrac{1}{m}$.

Теорема 1.1 (необхідна й достатня умова колінеарності векторів).

Два ненульових вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, де α – деяке дійсне число.

Введені дії додавання векторів і множення числа на вектор пов'язані між собою дистрибутивними властивостями для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ та дійсних чисел α, β.

5. $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
7. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a},\ 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Множину $n-$вимірних векторів із дійсними компонентами, в якій визначені операції додавання векторів та множення числа на вектор, що мають властивості 1-8, називають *векторним простором*. Позначатимемо його $\mathbb{R}^n$. Елементи простору $\mathbb{R}^n$ можна розглядати не лише як вектори, а й як елементи довільної природи. В цьому разі відповідну множину елементів називають *лінійним простором*.

§2. Розкладання вектора на компоненти

Два колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ завжди пов'язані співвідношенням

$$\vec{a} = \alpha\vec{b}, \qquad (2.1)$$

де α – число, абсолютна величина якого визначає відношення довжини вектора $\vec{a}$ до довжини вектора $\vec{b}$. Знак α однаково (при $\alpha > 0$) чи протилежно (при $\alpha < 0$) напрямлені вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Будь-який вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0, \qquad (2.2)$$

якщо ввести так званий одиничний вектор $\vec{a}^0$, тобто вектор, що його модуль дорівнює одиниці ($|\vec{a}^0| = 1$) і який колінеарний з даним вектором $\vec{a}$.

Будь-який вектор $\vec{c}$ можна подати у вигляді векторної суми, складеної з двох компланарних йому векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, помножених на деякі числа α і β:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (2.3)$$

В результаті ми розклали вектор $\vec{c}$ за його компонентами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. В тому разі, коли один з векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ колінеарний з вектором $\vec{c}$, коефіцієнт при другому векторі слід обрати рівним нулю.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то зазначене зображення вектора $\vec{c}$ можливо здійснити лише єдиним способом.

Аналогічно, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ й $\vec{c}$ попарно не колінеарні, то будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом розкладається по трьох компонентах:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \qquad (2.4)$$

§3. Поняття про лінійну залежність між векторами

Означення 3.1. *Лінійною комбінацією векторів* $\overline{a_i}\left(i=\overline{1,n}\right)$ називають вектор $\overline{a}$, який визначається за формулою $\overline{a}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{a_i}$, де λ_i – деякі числа.

Означення 3.2. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо можна підібрати числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ не всі рівні нулю, при яких виконується рівність $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i=0$. У противному разі вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називають *лінійно незалежними*.

Теорема 3.1. Система векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один із них є лінійною комбінацією інших.

Допускаємо, що жодний з векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ не є нуль – вектором. Деякі властивості лінійно залежних векторів:

1. Якщо два вектори лінійно залежні, то вони колінеарні (й навпаки).
2. Якщо три вектори лінійно залежні, то вони компланарні (й навпаки).
3. Чотири довільні вектори завжди лінійно залежні.

§4. Розкладання вектора по базисній системі векторів

Означення 4.1. *Базисом векторного простору* $\mathbb{R}^n$ називають довільну систему n лінійно незалежних векторів й будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$ є лінійною комбінацією векторів даної системи.

Означення 4.2. Векторний простір $\mathbb{R}^n$ називають $n-$*вимірним*, якщо в ньому існує система n лінійно незалежних векторів, а будь-які з $(n+1)$ векторів є лінійно залежними. Число n називають *вимірністю простору* $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1 (про розклад вектора за базисом). Будь-який вектор $\vec{a}$ векторного простору $\mathbb{R}^n$ можна подати, й причому єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$ – *розклад вектора* $\vec{a}$ *в базисі* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – *координатами вектора* $\vec{a}$ в цьому базисі.

Орт осі Ox позначається через $\vec{i}$, орт осі $Oy-$ через $\vec{j}$, орт осі $Oz-$ через $\vec{k}$.

Означення 4.2. *Ортонормований базис* називають базис, вектори якого взаємно перпендикулярні мають довжину 1.

Нехай $\{\vec{i}; \vec{j}\}-$ такий базис в $\mathbb{R}^2$. Базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}-$ ортонормований базис в $\mathbb{R}^3$. Координати вектора в ортонормованому базисі називають його *прямокутними координатами*.

Для будь-якого вектора $\vec{a}(x; y)$, розташованого в площині xOy, справедлива рівність

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{4.1}$$

Для будь-яких векторів, розташованих у просторі $\vec{a}(x; y; z)$ розкладання по ортах має вигляд:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{4.2}$$

Між векторами та їх координатами існує взаємно однозначна відповідність; отже, розкладання векторів по ортах може бути виконано єдиним способом.

Приклад 4.1.

У базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ простору $\mathbb{R}^3$ задано вектори: $\vec{d} = (2,-1,8), \vec{a} = (1,2,3), \vec{b} = (1,-1,-2), \vec{c} = (1,-6,0)$. Покажемо, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ також утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$. Знайдемо координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Розв'язання.

Оскільки визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -31 \neq 0,$$

то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні. Отже, вони утворюють базис.

Знайдемо координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Запишемо

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{d}, \text{ або } \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ця векторна рівність рівносильна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2, \\ 2\alpha - \beta - 6\gamma = -1, \\ 3\alpha - 2\beta = 8. \end{cases}$$

Методом Жордана – Гаусса розв'яжемо систему:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 8 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} II - 2I \to II \\ III - 3I \to III \end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim |III - 2II \to III| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -8 & -5\\ 0 & 1 & 13 & 12\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}I-III\to I\\ III\leftrightarrow II\\ II+3III\to III\end{array}\right|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -12 & -10\\ 0 & 1 & 13 & 12\\ 0 & 0 & 31 & 31\end{array}\right)\sim\left|\frac{1}{31}III\to III\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -12 & -10\\ 0 & 1 & 13 & 12\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}I+12III\to I\\ II-13III\to II\end{array}\right|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Отже, $\alpha=2,\beta=-1,\gamma=1$. Таким чином, $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

§5. Координати вектора на площині та у просторі

Означення 5.1. *Координатами вектора* $\vec{a}$ називають його проекції на осі координат Ox, Oy, Oz. Вони позначаються відповідно буквами x, y, z.

$$x = Пр_{Ox}\vec{a},\ y = Пр_{Oy}\vec{a},\ z = Пр_{Oz}\vec{a}. \qquad (5.1)$$

Вектор з координатами x, y, z позначається символом $\vec{a}(x; y; z)$, наприклад, $\vec{a}(3; -2; 5)$.

Означення 5.2. Вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого суміщається з точкою O (початком системи координат) називається *радіус – вектором точки* M.

За відомими координатами двох векторів можна легко визначити координати результуючого вектора. Також можна легко визначити координати добутку заданого вектора на число.

Якщо в системі координат xOy вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають відповідно координати $(a_1; a_2), (b_1; b_2)$, то вектор – сума в тій самій системі xOy має координати

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2). \qquad (5.2)$$

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $\alpha\vec{a}$ в тій самій системі має координати

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1; \alpha a_2). \qquad (5.3)$$

Аналогічно у тривимірному просторі для суми векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ дістанемо

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2; a_3 + b_3), \qquad (5.4)$$

а для добутку вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число α одержимо

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1; \alpha \cdot a_2; \alpha \cdot a_3). \qquad (5.5)$$

Означення 5.2. $n-$*Вимірним вектором* називають упорядковану сукупність n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і позначають вектор – стовпцем

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

або вектор – рядком $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Числа $a_i, i = \overline{1, n}$ називають *компонентами вектора*, або його *координатами*.

Означення 5.3. *Сумою двох* $n-$*вимірних векторів* називають вектор, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент векторів доданків, тобто

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n). \qquad (5.6)$$

Означення 5.4. *Добутком дійсного числа* α *на вектор* $\vec{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називається вектор $\alpha\vec{a}$, компоненти якого дорівнюють добуткам числа α на відповідні компоненти вектора $\vec{a}$:

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n). \qquad (5.7)$$

Нехай у прямокутній системі координат дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Тоді координати вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \qquad (5.8)$$

Аналогічно у тривимірному просторі вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ з початком $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і кінцем $M_2(x_2, y_2, z_2)$ записується у вигляді

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \qquad (5.9)$$

Довжина вектора визначається за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \ \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (5.10)$$

Приклад 5.1.

Дано: $Пр_l\vec{a} = -3, Пр_l\vec{b} = 5$. Обчислити проекцію вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ на вісь l.

Розв'язання.

Згідно з умовою задачі, маємо

$$Пр_l\vec{c} = Пр_l\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = Пр_l\vec{a} + 2Пр_l\vec{b} = -3 + 2\cdot 5 = 7 .$$

Приклад 5.2.

В трикутнику ABC точка D ділить сторону AB у відношенні $AD : DB = 2 : 7$. Розкласти вектор $\overrightarrow{CD}$ по векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{b}, \overrightarrow{CB} = \vec{a}$.

Розв'язання.

За означенням суми й різниці двох векторів маємо:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{b} .$$

Отже,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{9}\left(\vec{a} - \vec{b}\right);$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{2}{9}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b} .$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{CD} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b} .$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв'язання:</u>

1. Визначити координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та побудувати його на площині, якщо $A(1; 5), B(6; 8)$. (Відповідь: $\overrightarrow{AB} = (5; 3)$.)

2. Дано $\overrightarrow{AB}(-4, 9)$. Знайти координати кінця вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо координати його початку $A(4; -3)$. (Відповідь: $B(0; 6)$.)

3. Дано $\overrightarrow{AB}(-3; 5; 0)$. Знайти координати початку вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо координати його кінця $B(5; -3; -2)$. (Відповідь: $A(8; -8; -2)$.)

4. Розкласти вектор $\vec{c} = (4; -5)$ за векторами $\vec{a} = (2; -3)$ і $\vec{b} = (-1; 2)$. (Відповідь: $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.)

5. Розкласти вектор $\vec{p} = (1; -8; 2)$ за векторами $\vec{a} = (1; -2; 2), \vec{b} = (2; 3; -1), \vec{c} = (-1; 1; 3)$. (Відповідь: $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.)

6. З'ясуємо, чи будуть лінійно залежними вектори $\vec{a} = (1; 1; 1), \vec{b} = (1; -2; 1), \vec{c} = (1; 0; -1)$. (Відповідь: лінійно незалежні.)

7. Підібрати параметр p так, щоб вектори були компланарні:

$$\vec{a} = (1,\ 1,\ 1);$$
$$\vec{b} = (2,\ 3,\ 1);$$
$$\vec{c} = (1,\ 0,\ p).$$

(Відповідь: $p = 2$.)

8. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно залежні и знайти співвідношення компланарності, якщо $\vec{a} = (1,\ 2,\ 1), \vec{b} = (2,\ 1, -3), \vec{c} = (-3, -3,\ 2)$.

(Відповідь: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.)

9. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{f}$ задані координатами в деякому базисі. Розкласти вектор $\vec{f}$ по векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{a} = (1,\ 2,\ 3);$$
$$\vec{b} = (3, -1,\ 1);$$
$$\vec{c} = (2,\ 1,\ 1);$$
$$\vec{f} = (13,\ 3,\ 8).$$

(Відповідь: $\vec{f} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$.)

§6. Скалярний добуток двох векторів

Означення 6.1. *Скалярним добутком* двох векторів називається число (скаляр), яке дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними. Такий добуток позначається символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$, а також символом $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi . \qquad (6.1)$$

Означення 6.2. *Скалярним добутком* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається добуток довжини вектора $\vec{a}$ і проекції на нього вектора $\vec{b}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right| Пр_{\vec{a}}\vec{b}. \qquad (6.2)$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих їх координатами $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right), \vec{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$, обчислюється за формулою:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z . \qquad (6.3)$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right), \lambda\in\mathbb{R}$;
3. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
4. $\forall\vec{a}:\ \vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2\geq 0$;
5. $\forall\vec{a}\neq\vec{0}:\ \vec{a}\cdot\vec{a}>0$.

Якщо $\varphi-$ гострий кут, то скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ додатний; якщо $\varphi-$ прямий кут, то скалярний добуток векторів дорівнює нулю; якщо $\varphi-$ тупий кут, то скалярний добуток від'ємний.

При множенні двох рівних векторів їх скалярний добуток набирає виду

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0=\left|\vec{a}\right|^2 .$$

Теорема 6.1 (необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів).

Ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні тоді й лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

Формула для знаходження кута між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у $n-$вимірному просторі $\mathbb{R}^n$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \text{ або } \cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}}. \quad (6.4)$$

Означення 6.3. Два вектори називають *ортогональними*, якщо їх добуток дорівнює нулю.

Робота A дорівнює скалярному добутку вектора сили $\overline{F}$ на вектор переміщення $\overline{s}$:

$$A=\overline{F}\cdot\overline{s}.$$

Приклад 6.1.

Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх довжини відповідно дорівнюють 3 і 7, а кут між їх напрямами становить 30^0.

Розв'язання.

Оскільки $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=7, \varphi=30^0$, то

$$\vec{a}\vec{b}=3\cdot7\cdot\cos30^0=21\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10,5\sqrt{3}.$$

Приклад 6.2.

Обчислити роботу рівнодіючої $\overline{F}$ сил, приложених до матеріальної точки, яка під їх дією переміщається прямолінійно з точки $M_1(4,2,-3)$ в точку $M_2(7,4,1)$.

Розв'язання.

Так як $\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}=(4,3,3), \overline{M_1M_2}=\overline{s}=(3,2,4)$, то $A=\overline{F}\cdot\overline{s}=4\cdot3+3\cdot2+3\cdot4=30$.

Приклад 6.3.

Дано вектори $\bar{a} = -\bar{m} + 6\bar{n}$ и $\bar{b} = 3\bar{m} + 4\bar{n}$, де $\left|\bar{m}\right| = 2, \left|\bar{n}\right| = 5, \angle\left(\bar{m}, \bar{n}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$. Знайти: а) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; б) $np_{\bar{b}}\left(4\bar{a} - 5\bar{b}\right)$; в) $\cos\left(2\bar{b} - \bar{a}, 4\bar{b}\right)$.

Розв'язання.

а) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \left(-\bar{m} + 6\bar{n}\right) \cdot \left(3\bar{m} + 4\bar{n}\right) = -3\bar{m}^2 - 4\overline{mn} + 18\overline{mn} + 24\bar{n}^2 =$

$$= -3\left|\bar{m}\right|^2 + 14\left|\bar{m}\right|\left|\bar{n}\right|\cos\angle\left(\bar{m}, \bar{n}\right) + 24\left|\bar{n}\right|^2 = -3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + 24 \cdot 5^2 = 518$$

.

б) Нехай $\bar{c} = 4\bar{a} - 5\bar{b} = -19\bar{m} + 4\bar{n}$. Тоді

$$np_{\bar{b}}\bar{c} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|},$$

$$\bar{c} \cdot \bar{b} = \left(-19\bar{m} + 4\bar{n}\right) \cdot \left(3\bar{m} + 4\bar{n}\right) = -57\bar{m}^2 - 64\left|\bar{m}\right| \cdot \left|\bar{n}\right|\cos\angle\left(\bar{m}, \bar{n}\right) + 16\bar{n}^2 = -148,$$

$$\left|\bar{b}\right| = \sqrt{\bar{b}^2} = \sqrt{\left(3\bar{m} + 4\bar{n}\right)^2} = \sqrt{9\bar{m}^2 + 24\left|\bar{m}\right| \cdot \left|\bar{n}\right|\cos\angle\left(\bar{m}, \bar{n}\right) + 16\bar{n}^2} = \sqrt{316}$$

.

Отримаємо

$$np_{\bar{b}}\left(4\bar{a} - 5\bar{b}\right) = -\frac{148}{\sqrt{316}}.$$

в) Нехай $\bar{d} = 2\bar{b} - \bar{a} = 7\bar{m} + 2\bar{n}, \bar{f} = 4\bar{b} = 12\bar{m} + 16\bar{n}$. Тоді

$$\cos\angle\left(\bar{d}, \bar{f}\right) = \frac{\bar{d} \cdot \bar{f}}{\left|\bar{d}\right| \cdot \left|\bar{f}\right|},$$

$$\bar{d} \cdot \bar{f} = \left(7\bar{m} + 2\bar{n}\right) \cdot \left(12\bar{m} + 16\bar{n}\right) = 84\left|\bar{m}\right|^2 + 136\left|\bar{m}\right| \cdot \left|\bar{n}\right|\cos\angle\left(\bar{m}, \bar{n}\right) + 32\left|\bar{n}\right|^2 = 456,$$

$$\left|\bar{d}\right| = \sqrt{\left(7\bar{m} + 2\bar{n}\right)^2} = \sqrt{49\left|\bar{m}\right|^2 + 28\left|\bar{m}\right| \cdot \left|\bar{n}\right|\cos\angle\left(\bar{m}, \bar{n}\right) + 4\left|\bar{n}\right|^2} = \sqrt{156},$$

$$\left|\bar{f}\right| = \sqrt{\left(12\bar{m} + 16\bar{n}\right)^2} = \sqrt{144\left|\bar{m}\right|^2 + 384\left|\bar{m}\right| \cdot \left|\bar{n}\right|\cos\angle\left(\bar{m}, \bar{n}\right) + 256\left|\bar{n}\right|^2} = \sqrt{5056}.$$

Маємо:

$$\cos\left(2\overline{b}-\overline{a},4\overline{b}\right)=\frac{456}{\sqrt{788736}}\approx 0,5.$$

Приклад 6.4.

За координатами точок $A(-5,1,6), B(1,4,3), C(6,3,9)$ знайти: а) модуль вектора $\overline{a}=4\overline{AB}+\overline{BC}$; б) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}=\overline{BC}$; в) проекцію вектора $\overline{BC}$ на вектор $\overline{AB}$; г) координати точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні $\frac{1}{3}$.

Розв'язання.

а) Послідовно знаходимо $\overline{AB}=(6,3,-3), \overline{BC}(5,-1,6)$, $4\overline{AB}+\overline{BC}=(29,11,-6)$, $\left|4\overline{AB}+\overline{BC}\right|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998}$.

б) Маємо $\overline{a}=(29,11,-6), \overline{b}=(5,-1,6)$. Тоді

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=29\cdot 5+11\cdot(-1)+(-6)\cdot 6=98.$$

в)
Маємо

$$np_{\overline{AB}}\overline{BC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{5\cdot 6+(-1)\cdot 3+6\cdot(-3)}{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{9}{\sqrt{54}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

г)
Маємо:

$$\lambda=\frac{1}{3}, x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}, y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}, z_M=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Тому,

$$x_M=\frac{-5+\frac{1}{3}\cdot 1}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{7}{2}, y_M=\frac{1+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}}=\frac{7}{4}, z_M=\frac{6+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}}=\frac{21}{4},$$

$$M\left(-\frac{7}{2},\frac{7}{4},\frac{21}{4}\right).$$

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

1. Кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює 60^0. Відшукати проекцію вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, якщо довжина вектора $\vec{b}$ становить $9,6$.
(Відповідь: $Пр_{\vec{a}}\vec{b} = 4,8$.)

2. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ дорівнює -8. Знайти кут між даними векторами, якщо довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює $8\sqrt{2}$.
(Відповідь: $\varphi = 135^\circ$.)

3. Обчислити довжину вектора $\vec{b}$, якщо його проекція на напрям вектора $\vec{a}$ дорівнює 10, а кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ становить 45^0.
(Відповідь: $\left|\vec{b}\right| = 10\sqrt{2}$.)

4. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{3}, \left|\vec{b}\right| = 1\frac{3}{4}$, а кут між ними дорівнює 135^0.
(Відповідь: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -\frac{7\sqrt{6}}{8}$.)

5. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.
(Відповідь: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.)

6. Знайти одиничні вектори, перпендикулярні до вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ і компланарні з векторами $\vec{i}, \vec{j}$.
(Відповідь: $\pm\frac{4}{5}\vec{i} \mp \frac{3}{5}\vec{j}$.)

7. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\lambda\vec{k}$ взаємно перпендикулярні?
(Відповідь: $\lambda = 8$.)

8. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, коли відомо, що $|\vec{p}|=2\sqrt{2}, |\vec{q}|=3$ і $\angle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{4}$.

(Відповідь: $|\vec{d}_1|=|\vec{a}+\vec{b}|=15, |\vec{d}_2|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{593}$.)

9. Обчислити довжини взаємно перпендикулярних $\bar{a}$ і $\bar{b}$, коли відомо, що вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ мають одиничну довжину та $\vec{a}=\vec{p}+6\vec{q}, \vec{b}=-4\vec{p}+3\vec{q}$.

(Відповідь: $|\vec{a}|=3\sqrt{5}, |\vec{b}|=3$.)

10. При якому значенні α вектори $\vec{a}=\alpha\vec{p}+17\vec{q}$ і $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$ взаємно перпендикулярні, якщо $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=5, \angle(\vec{p},\vec{q})=\frac{2\pi}{3}$?

(Відповідь: $\alpha=40$.)

11. Знайти кут між одиничними векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$, коли відомо, що вектори $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=5\vec{p}-\vec{q}$ взаємно перпендикулярні.

(Відповідь: $\varphi=60^{\circ}$.)

12. Вектор $\vec{x}$ задається рівністю: $\vec{x}=(\vec{a},\vec{b})\vec{i}+(\vec{b},\vec{c})\vec{j}+(\vec{c},\vec{a})\vec{k}$. Розкласти вектор $\vec{x}$ за векторами $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

(Відповідь: $\vec{x}=(1;-2;8)$, $\vec{x}=7\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$.)

13. Вектор $\vec{a}$, в якого перша координата (в ортонормованому базисі $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$) більша від другої, перпендикулярний до вектора $\vec{b}=(1;-3;-1)$ і утворює з вектором $\vec{k}$ кут 135°. Знайти його координати, якщо $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$.

(Відповідь: $\vec{a}=(4;3;-5)$.)

§7. Векторний та мішаний добутки векторів

Означення 7.1. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ зі спільним початком називається *правою*, якщо найменший поворот від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$ проти руху годинникової стрілки. В протилежному випадку трійка називається *лівою*.

Означення 7.2. *Векторним добутком векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, яки позначається символом $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]\left(\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\right)$ і задовольняє наступним умовам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута φ між ними, тобто

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогональний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b};$$

3) вектор $\vec{c}$ має напрямок такий, що трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою.

Основні властивості векторного добутку:

1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;
2. $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;
3. $\left[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{c},\vec{b}\right]$;
   $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$;
4. $\left[\vec{a},\vec{a}\right]=0$ для будь-якого вектора $\vec{a}$;
5. $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=0$;
6. Довжина (або модуль) векторного добутку $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ дорівнює площині S паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_{\square}=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

Якщо два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задані своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right), \vec{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$, то векторний добуток цих векторів має вигляд:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) . (7.1)$$

За допомогою векторного добутку можна обчислити момент M сили F, приложеної до точки B т приложеної до точки тіла, закріпленого в точці A : $\overline{M} = \left[\overline{AB}, \overline{F}\right]$.

Приклад 7.1.

Обчислити координати моменту $\overline{M}$ сили $\overline{F} = (3,2,1)$, приложеної до точки $A(-1,2,4)$, відносно початку координат.

Розв'язання.

Маємо

$$\overline{M} = \left[\overline{AB}, \overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, 13, -8).$$

Означення 7.3. Якщо два даних вектори перемножимо векторно, а потім результат $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ (вектор - добуток) помножимо на третій вектор $\vec{c}$ скалярно, то одержимо число. Такий добуток векторів називається *мішаним* добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Для позначення мішаного добутку векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вживається символ

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right).$$

<u>Основні властивості мішаного добутку векторів:</u>

1. $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{c},\vec{a}\right],\vec{b}\right)$ (від циклічної перестановки векторів – співмножників мішаний добуток не змінюється);

2. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (у мішаному добутку знаки скалярного і векторного множення можна міняти місцями);

3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ (від перестановки співмножників мішаний добуток змінює знак на протилежний);

4. геометричний зміст мішаного добутку: абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах – співмножниках

$$V_{паралелепіпеда}=\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right|, \tag{7.2}$$

$$V_{тетраедра}=\frac{1}{6}\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right|; \tag{7.3}$$

5. $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0\Leftrightarrow\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарні.

Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ задані своїми координатами $\vec{a}\left(a_x,a_y,a_z\right),\vec{b}\left(b_x,b_y,b_z\right),\vec{c}\left(c_x,c_y,c_z\right)$, то мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ визначається формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \tag{7.4}$$

Приклад 7.2.

Дані вектори $\bar{a}(1,3,1),\bar{b}(-2,4,-1),\bar{c}(2,4,-6)$. Встановіть компланарні чи дані вектори, у випадку їх некомпланарності з'ясувати яку трійку (праву чи ліву) вони утворюють, і обчислить об'єм, побудованого на них тетраедра.

Розв'язання.

Обчислимо

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & 4 & -1\\ 2 & 4 & -6\end{vmatrix}=-78<0\,.$$

Таким чином, вектори не компланарні і утворюють ліву трійку. Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$, обчислюється за формулою $V=\frac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|$: $V=\frac{1}{6}\left|-78\right|=13$ куб. од.

Приклад 7.3.

Обчислити площу S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ та $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, якщо $\left|\vec{p}\right|=5,\left|\vec{q}\right|=3,\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює

$$S_{\square}=\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|.$$

$$S_{\square}=\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=\left\|\left[\vec{p}+2\vec{q},\vec{p}-3\vec{q}\right]\right\|=\left\|\left[\vec{p},\vec{p}\right]-3\left[\vec{p},\vec{q}\right]+2\left[\vec{q},\vec{p}\right]-6\left[\vec{q},\vec{q}\right]\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\left[\vec{p},\vec{p}\right]=0;\\ \left[\vec{q},\vec{q}\right]=0;\\ \left[\vec{p},\vec{q}\right]=-\left[\vec{q},\vec{p}\right]\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left|5\left[\vec{p},\vec{q}\right]\right\|=5\cdot\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\sin\left(\vec{p},\vec{q}\right)=5\cdot5\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{6}=5\cdot5\cdot3\cdot\frac{1}{2}=\frac{75}{2}=37{,}5\,.$$

Приклад 7.4.

Обчислити $\left|\vec{c}\right|$, якщо $\vec{c}=5\vec{p}-2\vec{q},\left|\vec{p}\right|=3,\left|\vec{q}\right|=4,\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

$$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{\left(\vec{c},\vec{c}\right)}=\sqrt{\left(5\vec{p}-2\vec{q},5\vec{p}-2\vec{q}\right)}=\sqrt{25\left(\vec{p},\vec{p}\right)-20\left(\vec{p},\vec{q}\right)+4\left(\vec{q},\vec{q}\right)}=$$

$$=\sqrt{25\left|\vec{p}\right|^2-20\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\cos\left(\vec{p},\vec{q}\right)+4\left|\vec{q}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{25\cdot 3^2-20\cdot 3\cdot 4\cdot\cos\frac{\pi}{3}+4\cdot 4^2}=\sqrt{169}=13\,.$$

Приклад 7.5.

Знайти вектор $\vec{p}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\{3;1;2\}$ та $\vec{b}=\{1;3;2\}$ і задовольняє умові $\left(\vec{p},\vec{c}\right)=8, \vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{p}$ колінеарний векторному добутку $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, отже, $\vec{p}=\lambda\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Оскільки

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 3&1&2\\ 1&3&2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2-3\cdot 2\\ -(3\cdot 2-1\cdot 2)\\ 3\cdot 3-1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -4\\ 8\end{pmatrix},$$

то

$$\vec{p}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -4\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\lambda\\ -4\lambda\\ 8\lambda\end{pmatrix}.$$

Невідомий коефіцієнт λ знаходимо з умови $\left(\vec{p},\vec{c}\right)=8$. Маємо:

$$-4\lambda\cdot 1-4\lambda\cdot(-1)+8\lambda\cdot 2=8,$$

$$16\lambda=8,$$

$$\lambda=\frac{1}{2}.$$

Остаточно дістаємо координати вектора

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 4\end{pmatrix}.$$

Приклад 7.6.

Чи належать точки $A(1;-1;-2), B(6;5;5), C(7;6;7)$ і $D(5;4;3)$ однієї площині?

Розв'язання.

Точки A, B, C и D лежать в одній площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ й $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Знайдемо координати цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A;\, y_B-y_A;\, z_B-z_A\},$$

$$\overrightarrow{AB}=\{6-1;\, 5-(-1);\, 5-(-2)\}=\{5;\, 6;\, 7\};$$

$$\overrightarrow{AC}=\{x_C-x_A;\, y_C-y_A;\, z_C-z_A\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{7-1;\, 6-(-1);\, 7-(-2)\}=\{6;\, 7;\, 9\};$$

$$\overrightarrow{AD}=\{x_D-x_A;\, y_D-y_A;\, z_D-z_A\},$$

$$\overrightarrow{AD}=\{5-1;\, 4-(-1);\, 3-(-2)\}=\{4;\, 5;\, 5\}.$$

Перевіримо їх компланарність

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}} \\ x_{\overrightarrow{AC}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}} \\ x_{\overrightarrow{AD}} & y_{\overrightarrow{AD}} & z_{\overrightarrow{AD}} \end{vmatrix},$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}=175+216+210-196-225-180=0.$$

Точки A, B, C й D лежать в одній площині.

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

1. Знайти одиничні вектори, перпендикулярні до векторів $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ і $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

(Відповідь: $\pm\frac{1}{3}\vec{i}\mp\frac{2}{3}\vec{j}\mp\frac{2}{3}\vec{k}$.)

2. Знайти одиничний вектор $\vec{c}$, який утворює тупий кут з вектором $\vec{i}$ і перпендикулярний до векторів $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Який кут утворює цей вектор з вектором $\vec{j}$?

(Відповідь: $\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}, \angle\left(\vec{c}, \vec{j}\right) = \arccos\frac{2}{3}$.)

3. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; -2; -5)$ і утворює тупий кут з віссю Oy. Знайти його координати, якщо $|\vec{c}| = \sqrt{11}$.

(Відповідь: $\vec{c} = (1; -3; 1)$.)

4. Вектор $\vec{u}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4; 1; 3)$, $\vec{b} = (2; 2; 3)$ і утворює гострий кут з віссю Oz. Знайти координати вектора $\vec{u}$, якщо його довжина дорівнює 3.

(Відповідь: $\vec{u} = (-1; -2; 2)$.)

5. Обчислити площу трикутника, дві сторони якого співпадають з векторами $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 5$; $|\vec{n}| = 1$; $(\vec{m}, \vec{n}) = 3$.

(Відповідь: $S = 6$ кв.од.)

6. Об'єм тетраедра $V = 5$, а три його вершини знаходяться у точках $A(2,\ 1, -1)$, $B(3,\ 0,\ 1)$, $C(2, -1,\ 3)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі Oz.

(Відповідь: $D_1(0; 0; -14); D_2(0; 0; 16)$.)

7. Дві сили $\vec{P} = (1,\ 1, -1)$ и $\vec{Q} = (2, 1, 3)$ які прикладені до точок $A(1, 1, 1)$ і $B(3, 2, 1)$ відповідно. Визначити сумарний момент цих сил відносно точки $H(1, 2, 3)$.

(Відповідь: $\vec{M}(5; -12; 3), \vec{M}_1(3; -2; 1), \vec{M}_2(2; -10; 3)$.)

§8. Прямокутні координати

Нехай $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)-$ довільні точки, α і $\beta-$ додатні числа. Тоді точка M , яка ділить відрізок AB у відношенні $\alpha : \beta$ $(AM : MB = \alpha : \beta)$ має координати

$$x = \frac{\beta x_1 + \alpha x_2}{\alpha + \beta}, \quad y = \frac{\beta y_1 + \alpha y_2}{\alpha + \beta}, \quad z = \frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha + \beta} .(8.1)$$

Зокрема, координатами середньої точки відрізка AB будуть

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (8.2)$$

Відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ виражається формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} . \quad (8.3)$$

Запитання для самоперевірки з теми «Векторна алгебра»

1. Радіус-вектор точки.
2. Що таке модуль вектора?
3. Які вектори називаються колінеарними?
4. Які вектори називаються компланарними?
5. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів.
6. Що називається сумою двох векторів?
7. Добуток вектора на число.
8. Координати і проекції вектора.
9. Базис и вимірність простору напрямлених векторів.
10. Що називається скалярним добутком двох векторів? Фізичний зміст скалярного добутку.
11. Як виражається скалярний добуток двох векторів з використанням проекції одного вектора на другий?
12. Основні властивості скалярного добутку.
13. Як виражається скалярний добуток векторів, заданих їх координатами?
14. Кут між векторами.
15. Ортонормований базис.
16. Векторний добуток двох векторів. Фізичний зміст векторного добутку векторів.
17. Як виражається векторний добуток двох векторів через координати векторів у декартовій системі векторів?.
18. Перелічіть основні властивості векторного добутку.
19. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
20. Перелічіть основні властивості мішаного добутку.
21. Як виражається мішаний добуток трьох векторів через координати векторів у декартовій системі векторів?
22. Як визначають координати точки, що поділяє даний відрізок у заданому відношенні?
23. За якою формулою обчислюється довжина відрізка, заданого координатами його кінців?

ГЛАВА 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

§1. Площина у просторі

1.1. Різновиди рівнянь площини у просторі

Означення 1.1.1. Будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний площині, називається її *нормальним вектором,* або *нормаллю.*

Виведемо рівняння площини у тримірному просторі. Нехай на площині задано точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ і вибрано вектор $\vec{n}\left(A, B, C\right)$, перпендикулярний до неї (*вектор нормалі*). Візьмемо на площині довільну точку $M\left(x, y, z\right)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}=\left(x-x_0, y-y_0, z-z_0\right)$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}\left(A, B, C\right)$. Запишемо аналітично умову перпендикулярності цих векторів:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0.$$

Це *рівняння площини, що проходить через задану точку* $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ *перпендикулярно до заданого вектора* $\vec{n}\left(A, B, C\right)$.

Якщо позначити сталу величину $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, то отримане рівняння матиме вигляд

$Ax+By+Cz+D=0 \quad \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$ – *загальне рівняння площини.*

Дослідимо частинні випадки цього рівняння:

1) $D=0$, тоді рівняння

$$Ax+By+Cz=0,$$

визначає площину, яка проходить через початок координат;

2) $C=0$, тоді рівняння

$$Ax+By+D=0$$

визначає площину, яка паралельна осі Oz (або вісь Oz належить площині, якщо $D=0$);

3) $B=0$, тоді рівняння

$$Ax+Cz+D=0$$

визначає площину, яка паралельна осі Oy (або вісь Oy належить площині, якщо $D=0$);

1) $A=0$, тоді рівняння $By+Cz+D=0$ визначає площину, яка паралельна осі Ox (або вісь Ox належить площині, якщо $D=0$);

2) $A=B=0$, тоді рівняння $Cz+D=0, z=-\frac{D}{C}$ визначає площину, яка паралельна координатній площині xOy (якщо $D=0$, то маємо рівняння $z=0$, яке задає координатну площину xOy);

3) $A=C=0$, тоді рівняння $By+D=0, y=-\frac{D}{B}$ визначає площину, яка паралельна координатній площині xOz (якщо $D=0$, то маємо рівняння $y=0$, яке задає координатну площину xOz);

4) $B=C=0$, тоді рівняння $Ax+D=0, x=-\frac{D}{A}$ визначає площину, яка паралельна координатній площині yOz (якщо $D=0$, то маємо рівняння $x=0$, яке задає координатну площину yOz).

Якщо $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$, то рівняння (1) площини можна подати у вигляді: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-$ *рівняння площини у відрізках,*

де a, b, c - довжини напрямлених відрізків, що відтинаються площиною на координатних осях.

Нехай задано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0-$$

рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Приклад 1.1.

Як розташовані точки $A(3;-2;0), B(1;1;1), C(1;-2;1)$ відносно площини $3x+5y-2z+1=0$?

Розв'язання.

Підставляємо координати точок A, B, C в рівняння площини:

$$A(3;-2;0):\quad 3\cdot3+5\cdot(-2)-2\cdot0+1=0,$$

$$B(1;1;1):\quad 3\cdot1+5\cdot1-2\cdot1+1>0,$$

$$C(1;-2;1):\quad 3\cdot1+5\cdot(-2)-2\cdot1+1<0.$$

Таким чином, точка A належить площині, а точки B і C лежать в різних півпросторах відносно заданої площини.

Приклад 1.2.

Встановити особливості розташування наступних площин:

1) $3x-z=0$;
2) $3x+5y-5=0$;
3) $3x=0$.

Розв'язання.

1) В рівнянні відсутня змінна y і вільний член, таким чином, площина паралельна осі Oy та проходить через початок координат, отже, вона проходить через вісь Oy.
2) Нормальний вектор площини має координати $\vec{n}(3;5;0)$, таким чином, він перпендикулярний до осі Oz, отже, площина паралельна осі Oz.
3) $3x=0 \Rightarrow x=0$. Дане рівняння площини є рівнянням координатної площини yOz.

Приклад 1.3.

Знайти точки перетину площини $2x-y+3z-6=0$ з осями координат.

Розв'язання.

Загальне рівняння площини подамо у вигляді рівняння площини у відрізках:

$$2x-y+3z=6\,|:6\ ,$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{2}=1.$$

Тоді шукані точки мають координати: $(3;0;0),(0;-6;0),(0;0;2)$.

Приклад 1.4.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3;2;4)$ і відтинає на координатних осях відрізки рівної довжини.

Розв'язання.

Нехай площина перетинає вісь Ox в точці $(\pm a,0,0)$, тобто відтинає від неї відрізок, що дорівнює $|a|$. Оскільки площина відтинає на інших координатних осях відрізки тієї ж довжини, точки перетину її з осями координат Oy та Oz мають координати $(0,\pm a,0)$ та $(0,0,\pm a)$. Скористаємося рівнянням площини у відрізках і складемо рівняння усіх площин, що відтинають від осей координат відрізки довжиною $|a|$: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}+\frac{z}{-a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{-a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}+\frac{z}{a}=1$. Для кожного з цих рівнянь знайдемо відповідне значення a, підставляючи в них координати точки $M(3;2;4)$:

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{a}+\frac{4}{a}=1\Rightarrow a=9,$$

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{-a}+\frac{4}{-a}=1\Rightarrow a=-3,\quad \frac{3}{a}+\frac{2}{a}+\frac{4}{-a}=1\Rightarrow a=1,\quad \frac{3}{a}+\frac{2}{-a}+\frac{4}{a}=1\Rightarrow a=5$$

. Одержимо: $\frac{x}{9}+\frac{y}{9}+\frac{z}{9}=1$, $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$, $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-1}=1$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{5}=1$.

Приклад 1.5.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;2;-1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(1;1;2)$.

Розв'язання.

Заданий вектор $\vec{n}(1;1;2)$ є нормаллю даної площини. Таким чином, рівняння площини можна записати у вигляді:

$$A(x-x_M)+B(y-y_M)+C(z-z_M)=0,$$

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+2\cdot(z+1)=0,$$

$$x+y+2z-1=0.$$

Приклад 1.6.

Задано точки $M_1(1;2;-1), M_2(0;3;1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$: $\overrightarrow{M_1M_2}(-1;1;2)$. За нормальний вектор до площини візьмемо вектор $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}$. Скористаємося далі рівнянням площини, заданої точкою $M_1(1;2;-1)$ та нормаллю $\vec{n}(-1;1;2)$:

$$A(x-x_{M_1})+B(y-y_{M_1})+C(z-z_{M_1})=0,$$

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+2\cdot(z+1)=0,$$

$$x-y-2z-1=0.$$

Приклад 1.7.

Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;0;-1)$ паралельно векторам $\vec{a}=5\vec{i}+\vec{k}, \vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$.

Розв'язання.

1 спосіб.

Оскільки шукана площина паралельна векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то її нормаль $\vec{n}$ є перпендикулярною до обох векторів, а отже, колінеарна їх векторному добутку $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Знайдемо вектор $\vec{n}$ за формулою:

$$\vec{n}=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

$$\vec{n}=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\lambda(-1;5;5)=(-1;5;5).$$

Скористаємося далі рівнянням площини, заданої точкою $M_0(1;0;-1)$ та нормаллю $\vec{n}(-1;5;5)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

$$-1\cdot(x-1)+5\cdot(y-0)+5\cdot(z-(-1))=0,$$

$$x-5y-5z-6=0.$$

2 спосіб.

Щоб записати рівняння площини розглянемо довільну точку $M(x;y;z)$ цієї ж площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}(x-1;y;z+1)$, $\vec{a}(5;0;1)$, $\vec{b}(0;-1;1)$ компланарні, отже, їх мішаний добуток нульовий, тобто:

$$\left(\overrightarrow{M_0M},\vec{a},\vec{b}\right)=0,$$

$$\begin{vmatrix}x-1 & y & z+1\\ 5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(x-1)\cdot(0-1)-y\cdot(-5-0)+(z+1)\cdot(5-0)=-x+5y+5z+6=0,$$

шукане рівняння має вигляд

$$x-5y-5z-6=0.$$

Приклад 1.8.

Написати рівняння площини, що проходить через точки $A(1;-1;2)$, $B(3;0;-3)$ паралельно вектору $\vec{a}(2;1;-1)$.

Розв'язання.

Якщо $M(x;y;z)$ – довільна точка площини, тоді вектори $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{a}$ компланарні. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{(x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A)},$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{(x-1; y+1; z-2)},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(2; 1; -5)},$$

й запишемо умову компланарності векторів $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{a}$:

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{a}\right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4x - 8y - 12 = 0.$$

Шукане рівняння площини має вигляд

$$x - 2y - 3 = 0.$$

Приклад 1.9.

Скласти рівняння площини, що проходить через три дані точки $A(1;-3;2)$, $B(5;1;-4)$, $C(2;0;3)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння площини, заданої трьома точками:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 5-1 & 1+3 & -4-2 \\ 2-1 & 0+3 & 3-2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 4 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 22-(y+3)\cdot 10+(z-2)\cdot 8=0,$$

або, після очевидних перетворень, маємо

$$11x-5y+4z-34=0.$$

1.2. Відстань від точки до площини

Відстань $\rho(M_0, \alpha)$ від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою:

$$\rho(M_0, \alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Приклад 1.10.

Знайти відстань від точки $M_0(1; 2; -3)$ до площини $4x-3z-1=0$.

Розв'язання.

Для обчислення шуканої відстані скористаємося формулою:

$$\rho(M_0, \alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|4\cdot 1+0\cdot 2-3\cdot(-3)-1|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{12}{5}=2,4.$$

Приклад 1.11.

Обчислити відстань між паралельними площинами $\alpha_1: 2x-y+2z+9=0$ и $\alpha_2: 4x-2y+4z-21=0$.

Розв'язання.

Щоб знайти відстань між паралельними площинами, візьмемо на першій площині деяку точку, наприклад, $M_0(0; 9; 0)$, й за формулою знайдемо відстань від цієї точки до другої площини:

$$\rho(M_0, \alpha_2)=\frac{|4\cdot 0-2\cdot 9+4\cdot 0-21|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}=\left|\frac{-39}{6}\right|=\frac{13}{2}=6,5.$$

1.3. Кут між двома площинами. Умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох площин

Двогранний кут φ між двома площинами, заданими рівняннями $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можна визначити як кут між їх нормалями $\vec{n}_1\left(A_1, B_1, C_1\right)$ та $\vec{n}_2\left(A_2, B_2, C_2\right)$:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 : A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності двох площин:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} = \lambda \; .$$

Дві площини збігаються, якщо виконується рівність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Приклад 1.12.

Визначити кут між площинами $\alpha_1 : 3y - z = 0, \alpha_2 : 2y + z = 0$.

Розв'язання.

Нормалями до заданих площин є вектори $\vec{n_1}\left(3; -1\right), \vec{n_2}\left(2; 1\right)$. Скориставшись формулою, одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + \left(-1\right)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Приклад 1.13.

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A\left(-2; 7; 3\right)$ і паралельна площині $\alpha : x - 4y + 5z - 1 = 0$.

Розв'язання.

Оскільки шукана площина паралельна площині β з нормаллю $\vec{n}_\beta\overline{(1;-4;5)}$, то її нормальний вектор $\vec{n}_\alpha=\vec{n}_\beta=\overline{(1;-4;5)}$. Скористаємося рівнянням площини, заданої точкою A і нормальним вектором $\vec{n}_\alpha$:

$$A(x-x_A)+B(y-y_A)+C(z-z_A)=0,$$

$$1\cdot(x-2)-4\cdot(y-(-7))+5\cdot(z-(-3))=0,$$

$$x-4y+5z+15=0.$$

Приклад 1.14.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(3;4;0)$ перпендикулярно до площин $\alpha_1: x+y+5z-9=0, \alpha_2: 2x+y+2z+1=0$.

Розв'язання.

Нехай $M(x;y;z)-$ довільна точка шуканої площини. Тоді вектори $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ ($\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ - нормалі площин α_1,α_2) компланарні. Знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AM}(x-3;y-4;z),\overrightarrow{n_1}(1;1;5),\overrightarrow{n_2}(2;1;2)$. Запишемо умову їх компланарності:

$$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$-3(x-3)+8(y-4)-1z=0,$$

$$3x-8y+z+23=0.$$

Приклад 1.15.

Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-1;-2), M_2(3;1;1)$ перпендикулярно до площини $\alpha: x-2y-3z-5=0$.

Розв'язання.

Нормаль $\overrightarrow{n_\beta}$ шуканої площини є перпендикулярною до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ і до нормалі $\overrightarrow{n_\alpha}$ даної площини α, а отже, колінеарна

їх векторному добутку $\left[\overrightarrow{M_1M_2},\, \vec{n}_\alpha\right]$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M_2}(2;\,2;\,3)$, $\overrightarrow{n_\alpha}(1;\,-2;\,-3)$, то

$$\overrightarrow{n_\beta} = \lambda\left[\overrightarrow{M_1M_2},\, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = \lambda\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -6-(-6) \\ -(-6-3) \\ -4-2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, її рівняння:

$$A_\beta(x-x_1)+B_\beta(y-y_1)+C_\beta(z-z_1)=0,$$

$$0\cdot(x-1)+3\cdot(y-(-1))-2\cdot(z-(-2))=0,$$

$$3y-2z-1=0.$$

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

1. Визначити координати точки з абсцисою $x=1$, що належить площинам xOz та $\alpha: 2x-y+z-6=0$.

(Відповідь: $(1;\,0;\,4)$.)

2. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;\,2;\,-1)$ і паралельна координатній площині xOz.

(Відповідь: $z+1=0$.)

3. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;\,2;\,-4)$, $M_2(2;\,0;\,-3)$ і паралельна осі Oz.

(Відповідь: $2x+y-4=0$.)

4. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(2;\,1;\,-5)$ и вісь Oz.

(Відповідь: $x-2y=0$.)

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через ось абсцис і паралельна вектору $\vec{a}(1;\,-2;\,3)$.

(Відповідь: $3y+2z=0$.)

6. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1;\,0;\,0)$, $M_2(0;\,0;\,1)$ і паралельна вектору $\vec{p}(1;\,-2;\,3)$.

(Відповідь: $x-z+1=0$.)

7. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $B(2;-7;3)$ перпендикулярно: 1) орту $\vec{i}$; 2) вектору $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$.
(Відповідь: 1) $x-2=0$; 2) $4x+5y-z+30=0$.)

8. Знайти точки перетину площини $2x-3y+z+3=0$ з осями координат.
(Відповідь: $(-1,5;0;0),(0;1;0),(0;0;-3)$.)

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2;4;-3)$ паралельно орту $\vec{k}$ й вектору $\vec{a}=5\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$.
(Відповідь: $3x-5y+14=0$.)

10. Перевірити, чи можна провести площину через точки $(2;1;0),(1;-1;2),(0;4;-2),(3;1;2)$.
(Відповідь: так.)

11. Знайти кут між площиною $\alpha:\sqrt{15}x+3y+z+3=0$ та координатною площиною xOz.
(Відповідь: $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$.)

12. Визначити, при яких значеннях l, m площини паралельні, якщо $\alpha_1: mx+3y-2z-1=0, \alpha_2: 2x-5y-lz=0$.
(Відповідь: $m=-1\frac{1}{5}, l=-3\frac{1}{3}$.)

13. Визначити значення l, за яким площини $\alpha_1: 5x+y-3z-3=0, \alpha_2: 2x+ly-3z+1=0$ будуть перпендикулярні.
(Відповідь: $l=-19$.)

14. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $B(3;-5;1)$ паралельно площині $\alpha: x-2y+4z=0$.
(Відповідь: $x-2y+4z-17=0$.)

15. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно заданим площинам $\alpha_1: 2x-y+5z+3=0, \alpha_2: x+3y-z-7=0$.(Відповідь: $x-y-z=0$.)

16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1;-1;3), B(1;2;4)$ перпендикулярно до площини $2x-3y+z+1=0$.
(Відповідь: $3x+y-3z+7=0$.)

§2. Пряма у просторі

2.1. Різновиди рівнянь прямої у просторі

Будь-яку пряму у просторі можна розглядати як лінію перетину двох непаралельних площин. При цьому, якщо площини α_1, α_2 задані загальними рівняннями, то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

задає *загальні рівняння прямої у просторі*.

Означення 2.1.1. Будь-який ненульовий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{(m, n, p)}$, що паралельний прямій l або лежить на ній, називається *напрямним вектором* прямої.

Якщо відомі точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої та її напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{(m, n, p)}$, то пряма може бути визначена рівняннями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$ - *канонічні рівняння прямої.*

Пряму також можна задати, вказавши дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ на ній. Нехай $M(x, y, z)$ - довільна точка прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$ буде напрямним і можемо записати:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ - *канонічні рівняння прямої, заданої двома точками.*

Якщо покладемо $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$, то:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$ - *параметричні рівняння прямої.*

Щоб записати пряму, задану загальними рівняннями, у канонічному вигляді необхідно визначити напрямний вектор прямої та деяку точку на ній. Напрямний вектор $\vec{s}$, очевидно, має бути

перпендикулярним до нормалей $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ обох площин, тому можна вважати, що

$$\vec{s} = \lambda\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right].$$

Для того, щоб визначити точку на прямій, покладемо одну із змінних, наприклад z, рівною z_0 і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2 \end{cases}$$

відносно змінних x та y.

Приклад 2.1.

Пряма задана загальними рівняннями

$$l: \quad \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Записати її канонічні та параметричні рівняння.

Розв'язання.

Напрямний вектор $\vec{s}$ даної прямої визначимо як векторний добуток нормалей площин:

$$\vec{s} = \lambda\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \lambda\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -3-6 \\ -(2+3) \\ -4+3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ще точку A, що належить прямій l. З цією метою задаємо одну з координат, наприклад, $z = -3$, а дві інші отримаємо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0; \\ x - 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Маємо: $A(0;\ 0;\ -3) \in l,\ \vec{s}(9;\ 5;\ 1)$. Запишемо канонічні рівняння цієї прямої:

$$\frac{x - x_A}{m} = \frac{y - y_A}{n} = \frac{z - z_A}{p},$$

$$\frac{x - 0}{9} = \frac{y - 0}{5} = \frac{z - (-3)}{1},$$

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}.$$

Кожне відношення в останньому співвідношенні позначимо буквою t:

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}=t,$$

таким чином,

$$\begin{cases} x=9t, \\ y=5t, \\ z=t-3, \end{cases}$$ – параметричні рівняння прямої.

Приклад 2.2.

Написати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(1;-1;3), M_2(1;1;-1)$.

Розв'язання.

Запишемо канонічні рівняння прямої M_1M_2, заданої двома точками:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

$$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-3}{-1-3},$$

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-4},$$

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}.$$

Приклад 2.3.

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;-1;0)$ паралельно вектору $\vec{s}(3;-5;1)$.

Розв'язання.

Запишемо канонічні рівняння:

$$\frac{x-x_M}{m}=\frac{y-y_M}{n}=\frac{z-z_M}{p},$$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z}{1}.$$

Приклад 2.4.

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;0;1)$ паралельно прямій $\begin{cases} x=t-1, \\ y=2t+2, \\ z=-t. \end{cases}$

Розв'язання.

Напрямний вектор заданої прямої знайдемо із її параметричних рівнянь: $\vec{s}(1;\ 2;\ -1)$. Шукана пряма паралельна заданій, отже, вектор $\vec{s}$ буде напрямним і для неї.

Маємо: $M(2;\ 0;\ 1)$, $\vec{s}(1;\ 2;\ -1)$. Запишемо канонічні рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-x_M}{m}=\frac{y-y_M}{n}=\frac{z-z_M}{p},$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Приклад 2.5.

Задані вершини трикутника $A(3;-1;-1), B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$. Скласти рівняння бісектриси внутрішнього кута $\angle B$ трикутника ABC.

Розв'язання.

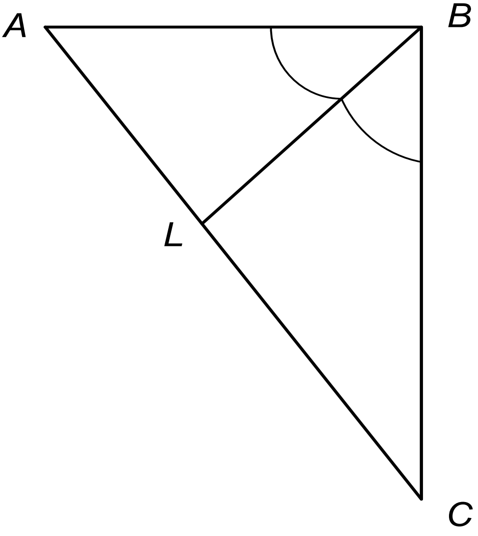

Рисунок 2.1

Передусім знайдемо точку L перетину бісектриси зі стороною AC. Бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону трикутника на частини, пропорційні прилеглим сторонам, тобто $\dfrac{AL}{LC}=\dfrac{AB}{BC}$. Знайдемо AB, BC, $\dfrac{AB}{BC}$:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(2+1)^2+(-7+1)^2}=7,$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}=\sqrt{(-5-1)^2+(14-2)^2+(-3+7)^2}=14,$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}.$$

Знайдемо координати точки L:

$$x_L = \frac{x_A + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot(-5)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$y_L = \frac{y_A + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{1}{2}\cdot 14}{1+\frac{1}{2}} = 4,$$

$$z_L = \frac{z_A + \lambda z_C}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{1}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{5}{3},$$

$$L\left(\frac{1}{3}; 4; \frac{-5}{3}\right).$$

Запишемо канонічні рівняння бісектриси, заданої двома точками $B(1; 2; -7)$ та $L\left(\frac{1}{3}; 4; \frac{-5}{3}\right)$:

$$\frac{x - x_B}{x_L - x_B} = \frac{y - y_B}{y_L - y_B} = \frac{z - z_B}{z_L - z_B},$$

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+7}{\frac{-5}{3}+7},$$

$$\frac{x-1}{\frac{-2}{3}} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+7}{\frac{16}{3}}.$$

2.2. Взаємне розміщення двох прямих

Кут між прямими можна визначити як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = \overrightarrow{(m_1, n_1, p_1)}$ та $\vec{s}_2 = \overrightarrow{(m_2, n_2, p_2)}$:

$$\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = \left(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2}\right) = \alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right)}{\left|\vec{s}_1\right|\left|\vec{s}_2\right|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 : m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Умова паралельності двох прямих:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \left[\vec{s}_1, \vec{s}_2\right] = 0, \vec{s}_1 = \lambda \vec{s}_2 : \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} = \lambda .$$

Приклад 2.6.

Знайти кут між прямими

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}, l_2 : \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо координати напрямного вектора $\overrightarrow{s_2}$ другої прямої:

$$\overrightarrow{s_2} = \lambda\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \lambda(7; 14; 7) = (1; 2; 1).$$

Враховуючи, що координати напрямного вектора $\overrightarrow{s_1}$ першої прямої відомі, $\overrightarrow{s_1}(1; -2; 3)$, визначимо косинус кута між прямими:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = 0,$$

звідки,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l_1 \perp l_2 .$$

Умова належності двох прямих

$$l_1: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2: \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

одній площині:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s_1},\vec{s_2}\right)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0,$$

де $M_1(x_1;y_1;z_1)\in l_1, M_2(x_2;y_2;z_2)\in l_2$; $\vec{s_1}(m_1;n_1;p_1)-$ напрямний вектор першої прямої; $\vec{s_2}(m_2;n_2;p_2)-$ напрямний вектор другої прямої.

Умова перетину двох непаралельних прямих еквівалентна умові компланарності векторів $\vec{s_1}(m_1;n_1;p_1)$, $\vec{s_2}(m_2;n_2;p_2)$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(x_1;y_1;z_1)\in l_1, M_2(x_2;y_2;z_2)\in l_2$.

Приклад 2.7.

Встановити взаємне розташування прямих:

$$l_1:\begin{cases} x=4t+2, \\ y=-6t, \\ z=-8t-1 \end{cases} \text{ та } l_2:\begin{cases} x=-6t+7, \\ y=9t+2, \\ z=12t. \end{cases}$$

Розв'язання.

Координати напрямних векторів $\vec{s_1}(4;-6;-8)$, $\vec{s_2}(-6;9;12)$ заданих прямих пропорційні:

$$\frac{4}{-6}=\frac{-6}{9}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}.$$

Таким чином, прямі або паралельні, або співпадають. Вони паралельні, якщо ніяка точка першої прямої не належить другої і співпадають, якщо будь-яка точка першої прямої належить другої. Візьмемо якунебудь точку першої прямої, наприклад $M_1(2;0;-1)$, й підставимо її координати в рівняння другої прямої:

$$\begin{cases} 2=-6t+7, \\ 0=9t+2, \\ -1=12t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{5}{6}, \\ t=\dfrac{-2}{9}, \\ t=\dfrac{-1}{12}, \end{cases}$$

звідки $M_1(2;0;-1)\notin l_2$. Отже, $l_1 \parallel l_2$.

Приклад 2.8.

Встановити взаємне розташування прямих:

$$l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4} \text{ и } l_2: \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}.$$

Розв'язання.

Координати напрямних векторів $\overrightarrow{s_1}(2;1;4)$ та $\overrightarrow{s_2}(3;-2;1)$ даних прямих не пропорційні, таким чином, прямі або перетинаються, або мимобіжні. Якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ компланарні ($\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)=0$), то прямі l_1 та l_2 перетинаються. Якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ некомпланарні ($\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\neq 0$), то прямі l_1 та l_2 мимобіжні.

За умовою $M_1(1;7;3)\in l_1$, $M_2(6;-1;-2)\in l_2$. Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1)}=\overrightarrow{(6-1;\,-1-7;\,-2-3)}=\overrightarrow{(5;\,-8;\,-5)}.$$

Обчислимо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)=\begin{vmatrix} 5 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Таким чином, то прямі l_1 та l_2 перетинаються.

Приклад 2.9.

Знайти точку перетину прямих

$$l_1:\begin{cases} x=2t+1, \\ y=t+7, \\ z=4t+3 \end{cases} \text{ та } l_2:\begin{cases} x=3t+6, \\ y=-2t-1, \\ z=t-2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $M_0(x_0;y_0;z_0)-$ точка перетину даних прямих. При якому значенні t_1 параметра t її координати будуть задовольнять рівнянням першої прямої, а при якому значенні t_2- рівнянням другої прямої, тобто

$$l_1:\begin{cases} x_0=2t_1+1, \\ y_0=t_1+7, \\ z_0=4t_1+3 \end{cases} \text{ та } l_2:\begin{cases} x_0=3t_2+6, \\ y_0=-2t_2-1, \\ z_0=t_2-2. \end{cases}$$

Прирівнявши отримані значення x_0, y_0, z_0, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2t_1+1=3t_2+6, \\ t_1+7=-2t_2-1, \\ 4t_1+3=t_2-2. \end{cases}$$

Якщо ця система має єдиний розв'язок, то дані прямі перетинаються ($l_1 \cap l_2$); якщо вона має безліч розв'язків, то прямі співпадають; якщо вона не має розв'язків, то прямі на мають спільних точок.

Розв'язавши отриману систему, маємо єдиний розв'язок

$$t_1=-2, t_2=-3.$$

Підставляючи $t_1=-2$ в рівняння першої прямої або $t_2=-3$ в рівняння другої прямої, знайдемо координати точки перетину цих прямих:

$$\begin{cases} x_0=-3, \\ y_0=5, \\ z_0=-5, \end{cases} \rightarrow M_0(-3;5;-5).$$

Відстань $\rho(M_1, l)$ *від точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *до прямої* l*,* де $l: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$, точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$, $\vec{s}(m, n, p)$, обчислюється за формулою

$$\rho(M_1, l) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}.$$

Цю ж формулу використовують для знаходження відстані між двома паралельними прямими.

Приклад 2.10.

Знайти відстань між паралельними прямими

$$l_1: \begin{cases} x = 3t+2, \\ y = 4t-1, \\ z = 2t \end{cases} \text{ та } l_2: \begin{cases} x = 3t+7, \\ y = 4t+1, \\ z = 2t+3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Враховуючи, що за умовою $M_1(2; -1; 0) \in l_1$, $M_2(7; 1; 3) \in l_2$, знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)} = \overrightarrow{(7-2; 1+1; 3-0)} = \overrightarrow{(5; 2; 3)}.$$

$\vec{s}(3; 4; 2)$ - напрямний вектор.

Відстань між паралельними прямими обчислюємо за формулою:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|},$$

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8; -1; 14),$$

$$\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right]\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + 14^2} = \sqrt{261},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29},$$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = 3.$$

Відстань між двома мимобіжними прямими

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},\ l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right]\right|}.$$

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

1. Записати параметричні рівняння прямої $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-y+1=0. \end{cases}$

(Відповідь: $\begin{cases} x=2t, \\ y=t+1, \\ z=-3t-1. \end{cases}$)

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(2;-3;2)$, $M_2(3;5;3)$.

(Відповідь: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-2}{1}$.)

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;5;1)$ паралельно вектору $\vec{s}(2;-3;4)$.

(Відповідь: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-1}{4}$.)

4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;2;3)$ перпендикулярно до площини $\alpha: 2x+y-1=0$.

(Відповідь: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0}$.)

5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1;2;-3)$ і паралельна двом площинам $\alpha_1: x+y-8z+1=0, \alpha_2: x-2y+5z=0$.

(Відповідь: $\frac{x+1}{11}=\frac{y-2}{13}=\frac{z+3}{3}$.)

6. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;0;0)$ перпендикулярно до прямих $l_1: \begin{cases} x=-t+1, \\ y=3t+2, \\ z=2t+5 \end{cases}$ та $l_2: \frac{x}{2}=\frac{y-6}{-5}=\frac{z+1}{3}$.

(Відповідь: $\frac{x}{19}=\frac{y-1}{7}=\frac{z}{-1}$.)

7. Перевірити, чи паралельні прямі $l_1:\begin{cases}x+y+z-1=0,\\ y+4z=0,\end{cases}$ $l_2:\begin{cases}2x+3y+6z-6=0,\\ 3x+4y+7z=0.\end{cases}$ Записати рівняння площини, в якій вони розташовані.

(Відповідь: $3x+4y+7z-3=0$.)

8. Показати, що прямі $a:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$, $b:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{1}$ перетинаються. Знайти точку їх перетину і записати рівняння площини, в якій вони розташовані.

(Відповідь: $(-3;1;-1)$, $y+z=0$.)

9. Знайти відстань від точки $A(1;2;1)$ до прямої $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$

(Відповідь: $\sqrt{22}$.)

10. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $C(0;3;-2)$ і перетинає прямі: $l_1:\begin{cases}x=5t+1,\\ y=2t-5,\\ z==-t\end{cases}$ та

$$l_2:\begin{cases}x=3t,\\ y=-2t+2,\\ z=-t-1.\end{cases}$$

(Відповідь: $\frac{x}{31}=\frac{y-3}{-38}=\frac{z+2}{7}$.)

§3. Пряма і площина в просторі

Нехай пряма задана параметричними рівняннями $l:\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ а площина – загальним рівнянням $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$.

Означення 3.1. *Кутом між прямою і площиною* називається гострий кут між цією прямою та її проекцією на дану площину.

Величина φ *кута між прямою і площиною* обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{\left(\vec{n}, \vec{s}\right)}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{s}\right|} = \frac{A\cdot m + B\cdot n + C\cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

де $\vec{s}(m; n; p)$ – напрямний вектор прямої; $\vec{n}(A; B; C)$ – нормальний вектор площини.

Умова паралельності прямої і площини:

$$\alpha \parallel l \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{s} \Rightarrow \left(\vec{n}, \vec{s}\right) = 0 \Rightarrow Am + Bn + Cp = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\alpha \perp l \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{s} \Rightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Приклад 3.1.

Визначити величину кута між прямою $l:\begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ і площиною $\alpha: 4x - 8y + z - 3 = 0$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо напрямний вектор заданої прямої

$$\vec{s} = \lambda\left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda(0; 2; -2) = (0; 1; -1).$$

Знаючи напрямний вектор $\vec{s}(0;1;-1)$ та нормаль $\vec{n}(4;-8;1)$, обчислимо за формулою величину φ кута між даними прямою і площиною:

$$\sin\varphi = \frac{(\vec{n},\vec{s})}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{4\cdot 0+(-8)\cdot 1+1\cdot(-1)}{\sqrt{4^2+(-8)^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{-8-1}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{4}.$$

Приклад 3.2.

З точки $M(1;0;-1)$ провести до площини $\alpha: 2x-y+5=0$ перпендикуляр.

Розв'язання.

Напрямним вектором перпендикуляра буде нормаль заданої площини $\vec{s}=\vec{n}$. Знаючи точку $M(1;0;-1)$ і напрямний вектор $\vec{s}(2;-1;0)$ прямої, запишемо її канонічні рівняння:

$$\frac{x-x_M}{m} = \frac{y-y_M}{n} = \frac{z-z_M}{p},$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}.$$

Приклад 3.3.

Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;2;3)$ перпендикулярно до прямої $l: \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$.

Розв'язання.

Напрямний вектор прямої $\vec{s}(-3;2;1)$ перпендикулярний до площини. Тому за нормальний вектор до площини візьмемо вектор $\vec{n} = \vec{s} = \overline{(-3;2;1)}$. Скористаємося рівнянням площини, заданої точкою $A(1;2;3)$ та нормаллю $\vec{n}(-3;2;1)$

$$A(x-x_A)+B(y-y_A)+C(z-z_A)=0,$$

$$-3(x-1)+2(y-2)+1(z-3)=0,$$

$$-3x+2y+z-4=0.$$

Щоб знайти *точку перетину прямої і площини*, слід розв'язати систему

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases}$$

де $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої;

$Ax+By+Cz+D=0$ – рівняння площини.

Приклад 3.4.

Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}$ з площиною $x+2y-3z-4=0$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої у параметричній формі та підставимо їх у рівняння площини:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}=t \Rightarrow \begin{cases} x = 4t+2, \\ y = 2t+3, \\ z = 5t-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4t+2, \\ y = 2t+3, \\ z = 5t-1, \\ x+2y-3z-4=0. \end{cases}$$

$$2+4t+2(3+2t)-3(-1+5t)-4=0.$$

Звідки $t=1$.

$$\begin{cases} x = 6, \\ y = 5, \\ z = 4. \end{cases}$$

Отже, $(6;\,5;\,4)-$ точка перетину прямої і площини.

Приклад 3.5.

Чи належить пряма $l:\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = -3-t, \\ z = -2+5t \end{cases}$ площині $\alpha: 4x+3y-z+3=0$?

Розв'язання.

Для того, щоб пряма лежала у площині необхідно і достатньо виконання двох умов: 1) ортогональність напрямного вектора прямої і нормалі площини; 2) хоча б одна точка прямої належить площині.

Якщо пряма задана параметричними рівняннями $l:\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ де $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0) \in l$, $\vec{s}(m;\, n;\, p)$; а площина – загальним рівнянням $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$, де $\vec{n}(A;\, B;\, C)$, тоді *умова належності прямої площині*:

$$l \in \alpha: \begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n}, \left(\vec{s}, \vec{n}\right) = m\cdot A + n\cdot B + p\cdot C = 0; \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Знаючи точку $M_0(1;-3;-2)$, напрямний вектор прямої $\vec{s}(2;-1;5)$, нормаль площини $\vec{n}(4;3;-1)$ перевіримо виконання цих умов:

$$\left(\vec{s}, \vec{n}\right) = 2\cdot 4 + (-1)\cdot 3 + 5\cdot(-1) = 0 \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n};$$

$$4\cdot 1 + 3\cdot(-3) - 1\cdot(-2) + 3 = 0 \Rightarrow M_0 \in \alpha.$$

Таким чином, $l \in \alpha$.

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

1. Знайти кут між прямою $l:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$ та площиною $\alpha: 4x+2y+2z-5=0$.

(Відповідь: $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.)

2. Знайти точку перетину прямої і площини, якщо

$$l:\begin{cases}x+5y-7z+16=0,\\ 2x-y+z-6=0\end{cases} \text{ та } \alpha: 5x-z-4=0.$$

(Відповідь: $(2;4;6)$.)

3. Знайти точку перетину прямої і площини

$$l:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1} \text{ та } \alpha: 3x+5y-z-2=0.$$

(Відповідь: $(-0{,}48;-0{,}36;-2{,}12)$.)

4. При якому значенні λ площина буде паралельна прямої, якщо

$$\alpha: \lambda x+3y-5z+1=0,\ l:\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}.$$

(Відповідь: $\lambda=-1$.)

5. Довести, що прямі l_1, l_2 належать одній площині, та написати рівняння цієї площини, якщо

$$l_1:\begin{cases}x=2+4t,\\ y=-6t,\\ z=-1-8t\end{cases} \text{ и } l_2:\begin{cases}x=7-6t,\\ y=2+9t,\\ z=12t.\end{cases}$$

(Відповідь: $5x-22y+19z+9=0$.)

6. Встановити взаємне розташування прямої $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z}{3}$ та площини $\alpha: 3x-3y+2z-5=0$.

(Відповідь: $l\perp\alpha$.)

7. Встановити взаємне розташування прямої $l:\begin{cases} x=-t+2, \\ y=2t-1, \\ z=3t \end{cases}$ та площини $\alpha: x-2y-3z+1=0$.

(Відповідь: $l \parallel \alpha$.)

8. Знайти проекцію точки $A(1;2;-3)$ на площину $\alpha: 6x-y+3z-41=0$.

(Відповідь: $(7;1;0)$.)

9. Знайти проекцію прямої $l: \frac{x}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{-2}$ на площину $\alpha: x-y+3z+8=0$.

(Відповідь: $\frac{x-12}{7}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+5}{-1}$.)

10. Знайти точку, симетричну точці $A(2;7;1)$ відносно площини $\alpha: x-4y+z+7=0$.

(Відповідь: $(4;-1;3)$.)

§4. Метод координат на площині

Метод координат полягає в установленні відповідності між точками прямої (площини, простору) та їх координатами – дійсними числами за допомогою системи координат.

Прямокутна система координат xOy на площині задається двома взаємно перпендикулярними прямими, на кожній з яких вибрано додатний напрямок і задано одиничний відрізок. Ці прямі називають *осями координат*. Одну з них називають *віссю абсцис* и позначають Ox, іншу – *віссю ординат* Oy.

Координати точки M записують як: $M(x;y)$; при цьому число x – *абсциса точки* M, а число y – *ордината точки* M. Координати точки повністю задають її положення на площині: кожній парі чисел x і y відповідає єдина точка M площини, і – навпаки.

Відстань між двома точками $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ на площині визначається за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Координати $(x;y)$ *точки* M*, яка ділить у заданому відношенні* λ *відрізок* AB, де $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ $\left(\lambda=\dfrac{AM}{MB}\right)$, знаходять за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,.$$

При $\lambda=1$ (точка M ділить відрізок AB навпіл) отримаємо формули *координат середини відрізка*:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\,.$$

Площа трикутника $\triangle ABC$ обчислюється за формулою:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

В точках $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ розміщені маси m_1, m_2. *Координати центра мас* цієї системи визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2},\ y=\frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2}.$$

Якщо дана система мас $m_1, m_2, \ldots, m_k$, розміщених у точках $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2), \ldots, M_k(x_k;y_k)$,то

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k},\ y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}.$$

Приклад 4.1.

Чи лежать на одній прямій точки $A(1;-5;3), B(5;-1;7), C(6;0;8)$?

Розв'язання.

Обчислимо відстань між точками A, B, C:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2},$$

$$AB=\sqrt{(5-1)^2+(-5+1)^2+(7-3)^2}=4\sqrt{3};$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2},$$

$$AC=\sqrt{(6-1)^2+(0+5)^2+(8-3)^2}=5\sqrt{3};$$

$$CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2+(z_B-z_C)^2},$$

$$CB=\sqrt{(5-6)^2+(-1-0)^2+(7-8)^2}=\sqrt{3}.$$

Оскільки $AC=AB+CB$, то точки A, B, C лежать на одній прямій.

Приклад 4.2.

Точки $A(-2;3), B(4;-5)$, $C(-3;1)$ - послідовні вершини паралелограма $ABCD$. Знайти координати D.

Розв'язання.

Шукана площа паралелограма $ABCD$ у два рази більша від площі трикутника ABC, тобто $S_{\square}=2S_{\triangle ABC}$. Отже,

$$S_{\square}=2S_{\triangle ABC}=2\cdot\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|,$$

$$S_{\square} = \left\| \begin{matrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = |10-9+4-15+2-12| = 20.$$

Оскільки діагоналі паралелограма в точці O перетину діляться пополам, знайдемо цю точку як середину відрізка AC:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2-3}{2} = \frac{-5}{2},$$

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

З іншої сторони, $O-$ середина відрізка BD:

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 2x_O - x_B,\ x_D = 2\cdot\left(\frac{-5}{2}\right) - 4 = -9;$$

$$y_O = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 2y_O - y_B,\ y_D = 2\cdot 2 - (-5) = 9.$$

Маємо $D(9;9)$.

Приклад 4.3.

У трикутнику з вершинами $A(2;3), B(6;3), C(6;-5)$ визначити довжину бісектриси його внутрішнього кута, проведеної з вершини B.

Розв'язання.

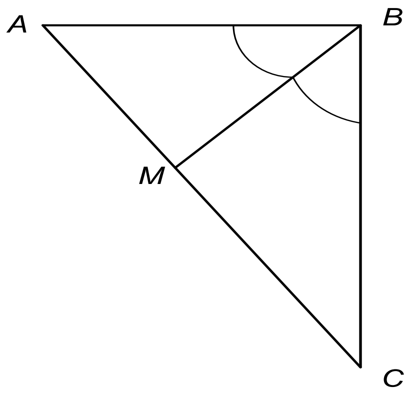

Рисунок 4.1

Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні довжинам прилеглих сторін $\frac{|CM|}{|MA|}=\frac{|BC|}{|BA|}$. Знайдемо довжини цих сторін BC и BA трикутника $\triangle ABC$: $|BC|=\sqrt{(6-6)^2+(-5-3)^2}=8, |BA|=\sqrt{(2-6)^2+(3-3)^2}=4$. Точка $M(x_M, y_M)$ ділить сторону CA у відношенні $\lambda=\frac{|CM|}{|MA|}=\frac{8}{4}=2$. Тепер знаходимо координати точки M: $x_M=\frac{6+2\cdot 2}{1+2}=\frac{10}{3}, y_M=\frac{-5+2\cdot 3}{1+2}=\frac{1}{3}$, тобто $M\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$. Довжина бісектриси BM: $BM=\sqrt{\left(\frac{10}{3}-6\right)^2+\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

§5. Рівняння лінії на площині

Рівняння лінії є найважливішим поняттям аналітичної геометрії. Нехай на площині задано деяку лінію (криву); координати x і y в кожній точці, що лежить на цій лінії, зв'язані між собою певним способом. Такий зв'язок аналітично записується у вигляді деякого рівняння.

Означення 5.1. *Рівняння лінії (кривої) на площині* називають рівнянням з двома змінними x та y, яке задовольняють координати довільної точки цієї лінії й не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії. У загальному випадку рівняння лінії записується $F(x,y)=0$.

Приклад 5.1.

Запишемо рівняння лінії точок, рівновіддалених від двох точок площини $A(-2;1)$ і $B(4;-1)$.

Розв'язання.

Відстань між двома точками $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$ на площині визначається за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка шуканої лінії. Тоді, підставляючи координати точок $M(x;y)$, $A(-2;1)$, $B(4;-1)$ у формулу і прирівнявши відстані, матимемо

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}\,.$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння. Після перетворень дістанемо

$$3x-y-3=0\,.$$

Задача щодо знаходження точок перетину двох ліній, заданих рівняннями $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, зводиться до розв'язання системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}F_1(x,y)=0;\\ F_2(x,y)=0.\end{cases}$$

Лінію на площині можна розглядати як траєкторію шляху, пройденого точкою, яка рухається за яким-небудь законом. Якщо абсциса точки $M(x;y)$ змінюється за законом $x=x(t)$, а ордината – за законом $y=y(t)$, де t – змінна, яку називають параметром, то рівняння лінії записується у вигляді

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[t_1,t_2].$$

Ці рівняння називають параметричними рівняннями лінії.

Приклад 5.2.

Стрижень AB ковзає своїми кінцями по координатних осях. Точка M ділить стрижень на дві частини $AM=a, BM=b$. Знайти параметричні рівняння траєкторії точки M, прийнявши за параметр кут $t=\angle OBA$.

Розв'язання.

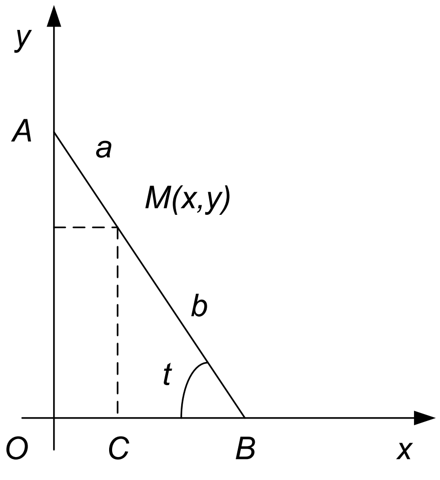

Рисунок 5.2

Розглянемо $\triangle MCB$ (рисунок 5.2): $CB = b\cos t, CM = b\sin t$. Очевидно, $OB = (a+b)\cos t$. Тому $x = OB - CB = (a+b)\cos t - b\cos t = a\cos t$, $y = MC = b\sin t$. Таким чином, отримуємо рівняння шуканої лінії

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Рівняння траєкторії точки M можна записати у вигляді $F(x, y) = 0$. Для цього перепишемо знайдені рівняння : $\frac{x}{a} = \cos t, \frac{y}{a} = \sin t$. Піднесемо до квадрата отримані рівності й додамо їх, тоді отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Лінія, яка задана цим рівнянням, називається еліпсом.

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

1. Задані вершини трикутника: $A(2;2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-5)$. Знайти площу трикутника.

(Відповідь: $S_{\vartriangle}=17,5$ кв.од.)

2. На координатних осях знайти точки, віддалених від точки $M(6;-8)$ на 10 одиниць.

(Відповідь: $(0;0),(12;0),(0;-16)$.)

3. Довести, що трикутник з вершинами $A(-4;3),B(4;7),C(5;-5)$ рівнобічний.

(Відповідь: $AB=AC$.)

4. Дві вершини трикутника знаходяться в точках $A(1;2),B(5;-1)$, а третя вершина $C-$ на осі Ox; площа трикутника дорівнює 4. Знайти координати вершини C.

(Відповідь: $C_1(1;0),C_2\left(3\frac{1}{3};0\right)$.)

5. Довести, що точки $A(-2;-1),B(-1;1),C(1;5)$ лежать на одній прямій. (Відповідь: $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.)

6. Задані дві суміжні вершини паралелограма $A(-3;5),B(1;7)$ і точка перетину його діагоналей $O(1;1)$. Визначити дві інші вершини.

(Відповідь: $C(5;-3),D(1;-5)$.)

§6. Пряма на площині

Найпростішою лінією на площині є пряма. Будь-яка пряма на площині xOy визначається лінійним рівнянням першого ступеня з двома невідомими.

Рівняння вигляду

$$Ax+By+C=0\,,A^2+B^2\neq 0 \qquad (6.1)$$

називається *загальним рівнянням прямої.*

Дослідимо частинні випадки цього рівняння

1) $C=0$, тоді рівняння $Ax+By=0$ визначає пряму, яка проходить через початок координат – точку $O(0;\,0)$;

2) $B=0, A\neq 0, C\neq 0$, тоді рівняння $Ax+C=0 \Rightarrow x=\frac{-C}{A},\ x=a$, визначає пряму, яка паралельна осі Oy та перетинає вісь Ox в точці $x=a$;

3) $B=0, A\neq 0, C=0$, тоді рівняння $Ax=0 \Rightarrow x=0$, визначає вісь Oy;

4) $A=0, B\neq 0, C\neq 0$, тоді рівняння $By+C=0 \Rightarrow y=\frac{-C}{B},\ y=b$, визначає пряма, яка паралельна осі Ox та перетинає ось Oy в точці $y=b$;

5) $A=0, B\neq 0, C=0$, тоді рівняння $By=0 \Rightarrow y=0$, визначає вісь Ox.

Пряма ділить площину на дві півплощини таким чином, що для координат точок однієї півплощини виконується

$$Ax+By+C>0\,,$$

а для координат точок другої півплощини – нерівність

$$Ax+By+C<0\,.$$

Приклад 6.1.

Чи перетинає пряма $3x+2y-6=0$ відрізок AB, якщо $A(1;1), B(2;2)$?

Розв'язання.

Підставимо координати кінців відрізка AB в ліву частину рівняння даної прямої:

для точки $A(1;1): 3\cdot 1+2\cdot 1-6<0$;

для точки $B(2;2): 3\cdot 2+2\cdot 2-6>0$.

Точки A, B лежать в різних півплощинах відносно прямої, отже, пряма перетинає відрізок AB.

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

1. Встановити положення прямої $3x+4y-12=0$ відносно трикутника ABC, якщо $A(-4;1), B(2;5), C(6;3)$.

(Відповідь: точка A лежить по одну сторону відносно прямої, B та $C-$ по іншу.)

2. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $A(3;-2)$ паралельно координатним осям.

(Відповідь: $x=3, y=-2$.)

3. Визначити, при якому значенні a пряма

$$(a+2)x+\left(a^2-9\right)y+3a^2-8a+5=0$$

1) паралельна осі абсцис; 2) паралельна осі ординат; 3) проходить через початок координат.

(Відповідь: 1) $a=-2$; 2) $a=\pm 3$; 3) $a=1, a=1\frac{2}{3}$.)

4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;2)$ і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини, рахуючи від початку координат.

(Відповідь: $x+y-5=0$.)

§7. Рівняння прямої на площині

1. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b, \qquad (7.1)$$

де k – *кутовий коефіцієнт* прямої (тобто тангенс кута α, який утворює пряма з додатним напрямом осі Ox, $k = \mathrm{tg}\alpha$), b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

2. *Загальне рівняння прямої*:

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0. \qquad (7.2)$$

Означення 7.1. Будь-який ненульовий вектор $\vec{n}$, перпендикулярний до прямої, називається *нормальним вектором* або *нормаллю* прямої.

3. *Рівняння прямої, заданої точкою* $M_0(x_0,\ y_0)$ *та нормаллю* $\vec{n}(A,\ B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (7.3)$$

4. *Рівняння прямої у відрізках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (7.4)$$

де $a \neq 0$ и $b \neq 0$ – задані відрізки, які відтинає пряма від осей (з урахуванням знака) Ox і Oy відповідно.

5. *Рівняння прямої, яка проходить через задану точку* $M_0(x_0,\ y_0)$ *і має кутовий коефіцієнт* k :

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (7.5)$$

6. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (7.6)$$

Кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через дві задані точки, визначається за формулою

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Означення 7.2. Будь-який ненульовий вектор $\vec{s}$, що паралельний прямій l або лежить на ній, називається *напрямним вектором* прямої.

7. *Канонічне рівняння прямої*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \qquad (7.7)$$

де $M_0(x_0,\ y_0)\in l, \vec{s}(m,\ n)\,||\,l$.

8. *Параметричні рівняння прямої:*

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases} \qquad (7.8)$$

9. *Нормальне рівняння прямої:*

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p=0, \qquad (7.9)$$

де p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, β – кут, який цей перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі Ox.

Загальне рівняння можна перетворити в нормальне рівняння шляхом множення на $\mu=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$; знак залежить від знаку вільного члена C (беруть протилежний).

Приклад 7.1.

Обчислити площу та периметр трикутника, утвореного координатними осями і прямою $3x-4y-12=0$.

Розв'язання.

Загальне рівняння прямої подамо у вигляді рівняння прямої у відрізках:

$$3x-4y-12=0,$$

$$3x-4y=12|:12,$$

$$\frac{3x}{12}-\frac{4y}{12}=1,$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1.$$

Пряма відтинає на координатних осях відрізки довжиною 4 та 3 одиниці відповідно, отже,

$$S_{\vartriangle} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6 \text{ (кв. од.)}.$$

Для знаходження периметра трикутника знайдемо довжину c його гіпотенузи. Гіпотенуза визначена точками $(4;0),(0;-3)$. Тоді

$$c = \sqrt{(0-4)^2 + (-3-0)^2} = 5 \text{ (лін. од.)}.$$

$$P_{\vartriangle} = a+b+c = 4+3+5 = 12 \text{ (лін. од.)}$$

Приклад 7.2.

Знайти кут між прямою $3x-3y+1=0$ і додатним напрямком осі абсцис.

Розв'язання.

Запишемо загальне рівняння прямої у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$3x-3y+1=0 \Rightarrow -3y=-3x-1 \Rightarrow y = x+\frac{1}{3}.$$

Звідки $k=1$, отже, $\mathrm{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Приклад 7.3.

Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $A(-1;-8)$.

Розв'язання.

Знаючи дві точки $O(0;0)$ та $A(-1;-8)$ шуканої прямої, запишемо її канонічне рівняння прямої, заданої двома точками:

$$\frac{x-x_O}{x_A-x_O} = \frac{y-y_O}{y_A-y_O},$$

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-0}{-8-0},$$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-8} \Rightarrow 8\cdot x = 1\cdot y,$$

$$8x-y=0.$$

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;5)$ і має кутовий коефіцієнт $k=3$.

(Відповідь: $3x-y-1=0$.)

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт $k=-4$.

(Відповідь: $y=-2x$.)

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат й утворює з віссю Ox кут 135°.

(Відповідь: $x+y=0$.)

4. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осі Oy відрізок довжиною 3 і має кутовий коефіцієнт $k=-5$.

(Відповідь: $5x+y\pm 3=0$.)

5. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осі Oy відрізок довжиною 5 й утворює з віссю Ox кут: 1) 120°; 2) 0°; 3) 60°.

(Відповідь: 1) $y=-\sqrt{3}x\pm 5$; 2) $y=\pm 5$; 3) $y=\sqrt{3}x\pm 5$.)

6. Визначити значення b, за яким пряма $y=5x+b$ відтинає на осі Ox відрізок довжиною 4.

(Відповідь: $y=5x\pm 20$.)

7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4;-6)$ паралельно бісектрисі першого координатного кута.

(Відповідь: $x-y-10=0$.)

8. Провести пряму через точки $M_1(-1;2), M_2(2;3)$. Визначити координати точок перетину цієї прямої з осями Ox, Oy та Oz.

(Відповідь: $(-7;0), \left(0;2\frac{1}{3}\right)$.)

9. Задані вершини трикутника $A(-1;4), B(2;3), C(5;8)$. Який кут утворює з віссю Ox пряма, що проходить через точку $D(1;3)$ і точку перетину медіан.

(Відповідь: $2x-y+1=0, \varphi=\mathrm{arctg}2$.)

10. Задані рівняння сторін чотирикутника $AB: x-4y+3=0$, $BC: 2x+y-12=0,$ $CD: x-y+6=0$, $AD: x+2y-3=0$. Скласти рівняння його діагоналей.

(Відповідь: $AC: 7x-y-6=0, BD: x+8y-21=0$.)

§8. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох прямих

Якщо прямі l_1, l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$, то кут φ між ними визначається за формулою

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \tag{8.1}$$

Якщо прямі l_1, l_2 задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то величина φ кута між ними визначається за формулою

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|. \tag{8.2}$$

1. $l_1 \parallel l_2 : \mathrm{tg}\alpha = 0 \Rightarrow k_1 = k_2, A_1 B_2 = A_2 B_1 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

2. $l_1 \perp l_2 : \alpha = \dfrac{\pi}{2}, \mathrm{tg}\alpha$ не існує $\Rightarrow$

   $\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_1},\ A_1 A_2 = -B_1 B_2$.

3. Якщо прямі збігаються:

   $$k_1 = k_2,\ b_1 = b_2 \text{ або } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Приклад 8.1.

Знайти кут між прямими:

1) $l_1 : y = 3x, l_2 : y = -2x + 5$;

2) $l_1 : y = 4x - 7, l_2 : y = \dfrac{-1}{4} x + 2$;

3) $l_1 : y = 5x - 3, l_2 : y = 5x + 8$.

Розв'язання.

1) $k_1 = 3, k_2 = -2$ и $\mathrm{tg}\varphi = \left| \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \dfrac{-2-3}{1-6} \right| = 1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $k_1 = 4, k_2 = \dfrac{-1}{4}$ и $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$;

3) $k_1=5, k_2=5$ и $k_1=k_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \varphi=0$.

Приклад 8.2.

Знайти кут між гіпотенузою $c: y=-\sqrt{3}x+1$ і катетом $a: y=\sqrt{3}x-5$ прямокутного трикутника.

Розв'язання.

Маємо $k_1=-\sqrt{3}, k_2=\sqrt{3}$, тоді за формулою

$$\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right|=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$$

Приклад 8.3.

Дослідити взаємне розташування заданих прямих. При цьому, якщо прямі перетинаються, знайти їх точку перетину.

1) $l_1: x+y-3=0, l_2: 2x+3y-8=0$;

2) $l_1: y=x+5, l_2: 2x-2y+3=0$;

3) $l_1: y=\frac{1}{2}x+2, l_2: \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1$.

Розв'язання.

1) Прямі задані загальними рівняннями, тому порівнюємо відношення їх коефіцієнтів: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{2}, \frac{B_1}{B_2}=\frac{1}{3}$. Оскільки $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, то прямі перетинаються. Розв'язавши систему рівнянь, дістаємо координати точки перетину

$$\begin{cases} x+y-3=0; \\ 2x+3y-8=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5; \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M(5;-2).$$

2) Запишемо загальне рівняння другої прямої у вигляді з кутовим коефіцієнтом:

$$l_2: 2x-2y+3=0 \Rightarrow y=x+\frac{3}{2}, k_2=1, b_2=\frac{3}{2}.$$

$$l_1: y=x+5, k_1=1, b_1=5.$$

Оскільки $k_1=k_2, b_1\neq b_2$, то $l_1 \parallel l_2$.

3) Запишемо рівняння другої прямої у вигляді з кутовим коефіцієнтом:

$$l_2 : \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2, k_2 = \frac{1}{2}, b_2 = 2 .$$

$$l_1 : y = \frac{1}{2}x + 2, k_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 2 .$$

Оскільки $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$ і $b_1 = b_2 = 2$, то прямі збігаються.

Приклад 8.4.

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-8;1)$ паралельно прямій $l : 2x - y + 7 = 0$.

Розв'язання.

Спосіб 1.

Запишемо загальне рівняння шуканої прямої: $Ax + By + C = 0$. Оскільки шукана пряма паралельна даній , то їх коефіцієнти при змінних x, y пропорційні, наприклад рівні. Тоді рівняння шуканої прямої можна переписати у вигляді $2x - y + C = 0$. Підставляючи в це рівняння координати відомої точки $M(-8;1)$, дістанемо

$$2 \cdot (-8) - 1 \cdot 1 + C = 0 \Rightarrow C = 17 .$$

Отже, шукане рівняння має вигляд $2x - y + 17 = 0$.

Спосіб 2.

Запишемо рівняння прямої, заданої точкою $M(-8;1)$ та нормаллю $\vec{n}(A, B)$: $A(x - x_M) + B(y - y_M) = 0$. Оскільки шукана пряма паралельна прямій $l : 2x - y + 7 = 0$, то можна вважати, що $A = 2, B = -1$. Тоді

$$2(x - x_M) - 1 \cdot (y - y_M) = 0 ,$$

$$2(x + 8) - 1 \cdot (y - 1) = 0 ,$$

$$2x - y + 17 = 0 .$$

Спосіб 3.

Запишемо загальне рівняння прямої у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$l: 2x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 2x - 7, k = 2.$$

Оскільки шукана пряма паралельна даній прямій l, то її кутовий коефіцієнт $k = k_l = 2$. Запишемо рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку $M(-8;1)$ з кутовим коефіцієнтом $k = 2$:

$$y - y_M = k(x - x_M),$$

$$y - 1 = 2(x + 8),$$

$$2x - y + 17 = 0.$$

Приклад 8.5.

Встановити, які із перерахованих пар прямих взаємно перпендикулярні:

1) $l_1: x - y = 0, l_2: x + y = 0$;
2) $l_1: x - 2y + 3 = 0, l_2: y = 2x + 3$;
3) $l_1: x + 2 = 0, l_2: y - 2 = 0$;
4) $l_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1, l_2: y = \frac{3}{2}x - 1$.

Розв'язання.

1) Прямі задані загальними рівняннями. Перевіримо умову перпендикулярності двох прямих:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \rightarrow 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow l_1 \perp l_2.$$

2) Запишемо загальне рівняння першої прямої у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$l_1: x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, k_1 = \frac{1}{2}.$$

$$l_2: y = 2x + 3, k_2 = 2.$$

Перевіримо умову перпендикулярності двох прямих:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \neq -1 \Rightarrow l_1 \not\perp l_2.$$

3) Прямі перпендикулярні, оскільки одна з них паралельна осі ординат, інша – осі абсцис:

$$l_1 : x+2=0 \Rightarrow l_1 \parallel Oy;$$
$$l_2 : y-2=0 \Rightarrow l_2 \parallel Ox.$$

4) Запишемо перше рівняння прямої у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$l_1 : \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+2,\; k_1=-\frac{2}{3}.$$
$$l_2 : y=\frac{3}{2}x-1,\; k_2=\frac{3}{2}.$$

Оскільки $k_1 \cdot k_2 = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=-1$, то $l_1 \perp l_2$.

Приклад 8.6.

З точки перетину прямих $l_1 : 4x+3y-5=0,\, l_2 : 8x-5y+23=0$ опустимо перпендикуляр до першої прямої. Скласти рівняння цього перпендикуляра.

Розв'язання.

Знайдемо координати точки M як точки перетину прямих l_1, l_2. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x+3y-5=0; \;\big|\cdot(-2) \\ 8x-5y+23=0 \end{cases}$$
$$\overline{\quad -11y+33=0, \qquad\qquad \Rightarrow M(-1;3).}$$
$$y=3 \Rightarrow x=-1.$$

Визначимо кутовий коефіцієнт першої прямої:

$$l_1 : 4x+3y-5=0,\; k_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{4}{3}.$$

Оскільки шукана пряма перпендикулярна до першої прямої l_1, то її кутовий коефіцієнт $k=-\frac{1}{k_1}=\frac{3}{4}$.

Запишемо рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку $M(-1;3)$ з кутовим коефіцієнтом $k=\frac{3}{4}$:

$$y-y_M=k(x-x_M),$$

$$y-3=\frac{3}{4}(x+1),$$
$$3x-4y+15=0.$$

Приклад 8.7.

Знайти точку P, симетричну точці $M(-2;9)$ відносно прямої $l: 2x-3y+18=0$.

Розв'язання.

Якщо $P-$ точка, симетрична точці M відносно прямої l, то точки P, M лежать на прямій, перпендикулярній l, і рівновіддалені від цієї прямої l, тобто $OP=OM$, де $O-$ проекція точки M на дану пряму.

Знайдемо рівняння прямої PM такої, що $M \in PM, PM \perp l$.

Оскільки $PM \perp l \Rightarrow k_{PM}=-\frac{1}{k_l}=-\frac{3}{2}$ ($l: 2x-3y+18=0, k_l=-\frac{A_l}{B_l}=\frac{2}{3}$).

Знаючи, що $k_{PM}=-\frac{3}{2}$ та $M(-2;9)$, запишемо її пряму:

$$y-y_M=k_{PM}(x-x_M),$$
$$y-9=-\frac{3}{2}(x+2),$$
$$3x+2y-12=0.$$

Точка O перетину прямих l, PM і буде проекцією точки M на пряму l. Знайдемо цю точку:

$$\begin{cases} 2x-3y+18=0; \,|\cdot 2 \\ 3x+2y-12=0, \,|\cdot 3 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 13x=0, \quad} \qquad \Rightarrow O(0;6).$$
$$x=0 \Rightarrow y=6.$$

Точка $O-$ середина відрізка PM. Для знаходження координат точки $P(x_P;y_P)$, симетричної відносно прямої l, скористаємося формулами:

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_P + x_M}{2}; \\ y_O = \dfrac{y_P + y_M}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2x_O - x_M; \\ y_P = 2y_O - y_M, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2\cdot 0 + 2; \\ y_P = 2\cdot 6 - 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2; \\ y_P = 3. \end{cases}$$

Отже, $P(2;3)$.

Приклад 8.8.

Записати рівняння прямих, на яких лежать сторони трикутника, знаючи одну його вершину $A(2,-7)$, а також рівняння прямих, на яких лежать висота $3x+y+11=0$ і медіана $x+2y+7=0$, проведених з різних вершин.

Розв'язання.

Перевіримо, чи проходять висота і медіана через точку A. Для цього підставимо координати точки в рівняння прямих:

$$3\cdot 2+(-7)+11=10\neq 0,\ 2+2\cdot 2+7=13\neq 0.$$

Отже, висота проведена з точки B, а медіана – з точки C.

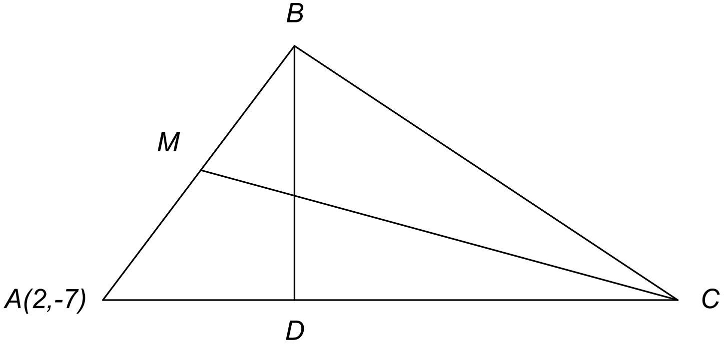

Рисунок 8.1

$BD \perp AC$. Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих, запишемо рівняння прямої AC:

$$1(x-x_A)-3(y-y_A)=0,$$

$$(x-2)-3(y+7)=0,$$

$$x-3y-23=0.$$

CM – медіана, яка проведена до AB. Отже, M – середина AB. За формулами координат середини відрізка

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

$M\left(\frac{2+x_B}{2}, \frac{-7+y_B}{2}\right) \in CM \Rightarrow$ координати точки M задовольняють рівнянню прямої CM: $x_M + 2y_M + 7 = 0,\ \frac{2+x_B}{2} + 2\cdot\frac{-7+y_B}{2} + 7 = 0$.

$B \in BD \Rightarrow$ координати точки B задовольняють рівнянню прямої BD: $3x_B + y_B + 11 = 0$.

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_B + y_B + 11 = 0, \\ \frac{1}{2}x_B + y_B + 1 = 0, \end{cases}$$

дістаємо координати точки $B(-4,1)$.

Рівняння прямої, що проходить через точки A і B,

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},\ \frac{x-2}{-4-2} = \frac{y+7}{1+7} \Rightarrow x + y + 5 = 0.$$

Знайдемо координати точки C як точки перетину прямих AC, BC. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0, \\ x + 2y + 7 = 0. \end{cases}$$

Точка C має координати $C(5,-6)$.

Рівняння прямої BC

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},\ \frac{x+4}{5+4} = \frac{y-1}{-6-1} \Rightarrow 7x + 9y + 19 = 0.$$

Отже, $x - 3y - 23 = 0$, $x + y + 5 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$ – шукані рівняння.

Приклад 8.9.

Рівняння однієї із сторін кута є $4x-3y+9=0$, рівняння його бісектриси $x-7y+21=0$. Записати рівняння прямої, на якій лежить інша сторона кута.

Розв'язання.

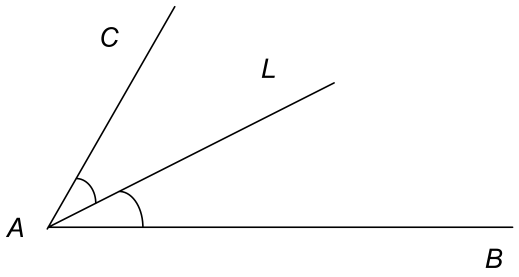

Рисунок 8.2

Нехай $\angle CAB$ – даний кут, AL – бісектриса кута. Отже, $\Rightarrow \text{tg}\angle CAL = \text{tg}\angle BAL \Rightarrow \text{tg}\left|\frac{k_{AC}-k_{AL}}{1+k_{AC}k_{AL}}\right| = \text{tg}\left|\frac{k_{AB}-k_{AL}}{1+k_{AB}k_{AL}}\right|$ (*). Знайдемо кутові коефіцієнти прямих AB, AL: $k_{AB}=\frac{4}{3}, k_{AL}=\frac{1}{7}$. Нехай k – поки що незнайдений кутовий коефіцієнт прямої AC. Підставимо дані у співвідношення (*).

$$\left|\frac{k-\frac{1}{7}}{1+k\cdot\frac{1}{7}}\right| = \left|\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}}\right| \Rightarrow \left|\frac{k-\frac{1}{7}}{1+k\cdot\frac{1}{7}}\right| = 1 \Rightarrow ,$$

$$\angle CAL = \angle BAL = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle CAB = \frac{\pi}{2}.$$

Використовуючи умову перпендикулярності: $k_{AB}\cdot k_{AC}=-1, k_{AC}=\frac{-1}{k_{AB}}=\frac{-3}{4}$, знайдемо координати точки A як точки перетину прямої AB та бісектриси AL

$$\begin{cases} x-7y+21=0, \\ 4x-3y+9=0, \end{cases} \Rightarrow A(0,3).$$

Запишемо рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку $A(0,3)$ з кутовим коефіцієнтом $k=\frac{-3}{4}$:

$$y-y_A=k_{AC}\left(x-x_A\right),$$

$$y-3=\frac{-3}{4}x,$$

$$3x+4y-12.$$

Приклад 8.10.

Скласти рівняння катетів рівнобічного прямокутного трикутника, якщо задано координати вершини прямого кута $C(4;-1)$ і рівняння гіпотенузи $c:3x-y+5=0$.

Розв'язання.

Оскільки трикутник прямокутний і рівнобічний, то величина його гострих кутів дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Кутовий коефіцієнт гіпотенузи $k_c=\frac{-A_c}{B_c}=\frac{-3}{-1}=3$. Позначимо k_a- кутовий коефіцієнт катета. Тоді

$$\operatorname{tg}(c,a)=\left|\frac{k_c-k_a}{1+k_c\cdot k_a}\right|\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\left|\frac{3-k_a}{1+3\cdot k_a}\right|,$$

$$1=\left|\frac{3-k_a}{1+3\cdot k_a}\right|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3-k_a}{1+3\cdot k_a}=1;\\ \frac{3-k_a}{1+3\cdot k_a}=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k_a=\frac{1}{2};\\ k_a=-2.\end{array}\right.$$

Оскільки прямі, на яких лежать катети, перпендикулярні, то $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$. Таким чином, $k_{AC}=-2$, $k_{BC}=\frac{1}{2}$. Знаючи кутові коефіцієнти катетів і точку $C(4;-1)$, запишемо рівняння AC, BC:

$$AC:\quad y-y_C=k_{AC}\left(x-x_C\right),$$

$$y+1=-2(x-4),$$

$$2x+y-7=0;$$

$$BC:\quad y-y_C=k_{BC}\left(x-x_C\right),$$

$$y+1=\frac{1}{2}(x-4),$$
$$x+2y-6=0.$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв’язання:</u>

1. З точок $M_1(1;2), M_2(3;1)$ проведені прямі через початок координат. Знайти кут між прямими.

(Відповідь: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.)

2. Сторони трикутника ABC лежать на прямих $AB: 3x-y=0$, $BC: x+4y-2=0, AC: 2x+7y=0$. Знайти величину кута між стороною AB і висотою, проведеною із вершини B.

(Відповідь: $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{23}$.)

3. З’ясувати, за яких значень λ та μ прямі $l_1: 3x-2y+1=0, l_2: \lambda x+\mu y-3=0$ збігаються?

(Відповідь: $\lambda=-9, \mu=6$.)

4. Переконатися в тому, що точки $A(-2;-2), B(-3;1), C(7;7), D(3;1)$ є вершинами трапеції. Скласти рівняння її середньої лінії та діагоналей.

(Відповідь: $BC \parallel AD, BD: y-1=0, AC: x-y=0,$
$3x-5y+5=0-$ рівняння середньої лінії трапеції.)

5. Знайти рівняння прямої, яка перетинає вісь ординат в точці $A(0;-3)$ перпендикулярно до прямої $l: 2x-5y-1=0$.

(Відповідь: $5x+2y+6=0$.)

6. Задані вершини трикутника $ABC: A(3;3)$, $B(5;-3)$, $C(0;-1)$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини, яка лежить на осі ординат.

(Відповідь: $x-3y-3=0$.)

7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $l_1: x-y-5=0,\quad l_2: 2x-3y-1=0$ перпендикулярно до прямої $l_3: x+2y=0$.

(Відповідь: $2x-y-19=0$.)

8. Точки $A(1;1), B(-2;4)$ є вершинами трикутника ABC. Записати рівняння сторін трикутника, якщо його висоти перетинаються в точці $H(-1;1)$.

(Відповідь: $AB: x+y-2=0, BC: x+2=0, CA: x-3y+2=0$.)

9. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, якщо задано координати однієї з його вершин $A(1;1)$ і рівняння прямих, на яких лежать дві його висоти $2x+y-13=0, x+3y-19=0$.

(Відповідь: $AB: 3x-y-2=0, BC: 3x++4y-37=0, CA: x-2y+1=0$.)

§9. Відстань від точки до прямої

Приклад 9.1.

Знайти відстань від точки $P(-1;5)$ до прямої $l: 4x+3y-5=0$.

Розв'язання.

Використовуючи формулу для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо

$$\rho(P,l)=\frac{|Ax_P+By_P+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\rho(P,l)=\frac{|4x_P+3y_P-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot 5-5|}{\sqrt{16+9}}=\frac{6}{5}=1,2.$$

Приклад 9.2.

Знайти відстань між паралельними прямими $l_1: 3x+4y-18=0, l_2: 3x+4y+43=0$.

Розв'язання.

Щоб знайти відстань між паралельними прямими, візьмемо на одній із прямих деяку точку, наприклад, $(x_0;y_0)=(6;0)$, і знайдемо відстань від неї до іншої прямої. Використовуючи формулу для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо:

$$\rho(P,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\rho(M_0,l_2)=\frac{|3x_0+4y_0+43|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3\cdot 6+4\cdot 0+43|}{\sqrt{25}}=\frac{61}{5}=12,2.$$

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

1. Знайти відстань між прямими $l_1 : -x+3y+5=0, l_2 : x-3y+2=0$.

(Відповідь: $\rho = \frac{7}{\sqrt{34}}$.)

2. Знайти відстань від точки $A(1;1)$ до прямої BC, якщо $B(5;2), C(7;0)$.

(Відповідь: $\rho = \frac{5}{\sqrt{2}}$.)

3. Центр кола знаходиться в точці $O(6;-3)$. Записати рівняння кола, яке дотикається до прямої $l : 3x-4y-15=0$.

(Відповідь: $(x-6)^2+(y+3)^2=9$.)

4. Через точку $M(-1;4)$ проведена пряма на відстані 5 лін.од. від точки $P(-2;-1)$. Скласти її рівняння.

(Відповідь: $l_1 : y-4=0, l_2 : 5x+12y-43=0$.)

§10. Криві другого порядку

10.1. Коло

Означення 10.1.1. *Колом* називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки – центра кола – на задану відстань – радіус кола.

Загальне рівняння другого порядку з двома змінними

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (10.1.1)$$

в прямокутній системі координат описує коло, якщо $A=C\neq 0$ и $B=0$:

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0.$$

Якщо в даному рівнянні поділити обидві його частини на $A\neq 0$ і виділити повні квадрати, то отримаємо:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \qquad (10.1.2)$$

– *коло з центром у точці* $(\alpha;\beta)$ *і радіусом* R (якщо центр кола знаходиться в початку координат, то рівняння має вигляд: $x^2+y^2=R^2$);

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$ – *вироджене коло* (точку $M(\alpha;\beta)$);

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=-R^2$ – *уявне коло* (порожня множина точок – немає геометричного образу).

Приклад 10.1.

Записати рівняння кола, що проходить через точки $A(3,1), B(-2,6), C(-5,-3)$.

Розв'язання.

Нехай $O(\alpha,\beta)$ – центр шуканого кола. Тоді $OA=OB=OC$ як радіуси одного кола. Маємо

$$OA=\sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-1)^2},$$

$$OB=\sqrt{(\alpha+2)^2+(\beta-6)^2},$$

$$OC=\sqrt{(\alpha+5)^2+(\beta+3)^2}.$$

Складемо систему рівнянь відносно невідомих α,β і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} \sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-1)^2}=\sqrt{(\alpha+2)^2+(\beta-6)^2}, \\ \sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-1)^2}=\sqrt{(\alpha+5)^2+(\beta+3)^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta+3=0, \\ 2\alpha+\beta+3=0. \end{cases}$$

Розв'язок системи $\alpha=-2, \beta=1$. Отже, точка $O(-2,1)$ є центром кола. Знаходимо радіус кола:

$$R=\sqrt{(-2-3)^2+(1-1)^2}=5.$$

Отже, шукане рівняння кола має вигляд

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25.$$

Приклад 10.2.

Записати рівняння кола, діаметр якого відрізок AB, де $A(2;-3), B(-6;3)$.

Розв'язання.

Центр кола $O(\alpha;\beta)$ - середина діаметра AB:

$$\alpha=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2-6}{2}=-2,$$

$$\beta=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-3+3}{2}=0.$$

Знаходимо радіус кола:

$$R=OA=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=\sqrt{(-2-2)^2+(-3-0)^2}=5.$$

Тоді $(x+2)^2+y^2=25-$ шукане рівняння кола.

Приклад 10.3.

Звести рівняння кола $x^2+y^2+2x-10y+1=0$ до канонічного вигляду.

Розв'язання.

Групуємо в лівій частині рівняння члени зі змінними x, y і виділяємо повні квадрати із цими змінними:

$x^2+y^2+2x-10y+1=0$,

$$\left(\underbrace{x^2+2x+1}-1\right)+\left(\underbrace{y^2-10y+25}-25\right)+1=0,$$

$$(x+1)^2-1+(y-5)^2-25+1=0,$$

$$(x+1)^2+(y-5)^2=25.$$

Це рівняння визначає коло з центром у точці $O(-1;5)$ і радіусом $R=5$.

Приклад 10.4.

Яка лінія визначається рівнянням

$$x^2+y^2+10x-4y+29=0?$$

Розв'язання.

Перетворимо задане рівняння так:

$$x^2+y^2+10x-4y+29=0,$$

$$\left(\underbrace{x^2+10x+5^2}-25\right)+\left(\underbrace{y^2-4y+2^2}-4\right)+29=0,$$

$$(x+5)^2-25+(y-2)^2-4+29=0,$$

$$(x+5)^2+(y-2)^2=0.$$

Таким чином, рівняння визначає вироджене коло, тобто точку $(-5;2)$.

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

1. Скласти рівняння кола з центром в точці $\left(-3;4\right)$, що проходить через початок координат.

(Відповідь: $\left(x+3\right)^2+\left(y-4\right)^2=25$.)

2. Знайти координати центра та радіус кола:

1) $x^2+y^2+6x-8y-11=0$; 2) $x^2+y^2-6x-7=0$.

(Відповідь: 1) $O\left(-3;4\right)$, $R=6$; 2) $O\left(3;0\right)$, $R=4$.)

3. Яка лінія визначається рівнянням:

1) $x^2+y^2-4x+6y+14=0$; 2) $x^2+y^2+2x-4y+5=0$?

(Відповідь: 1) уявне коло – порожня множина точок 2) вироджене коло – точка $\left(-1;2\right)$.)

10.2. Еліпс

Означення 10.2.1. *Еліпсом* називають геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до заданих точок (фокусів) є величиною сталою й більшою за відстань між фокусами.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \ 0<b\le a\ \ -\textit{канонічне рівняння еліпса},$$

фокуси якого лежать на осі Ox.

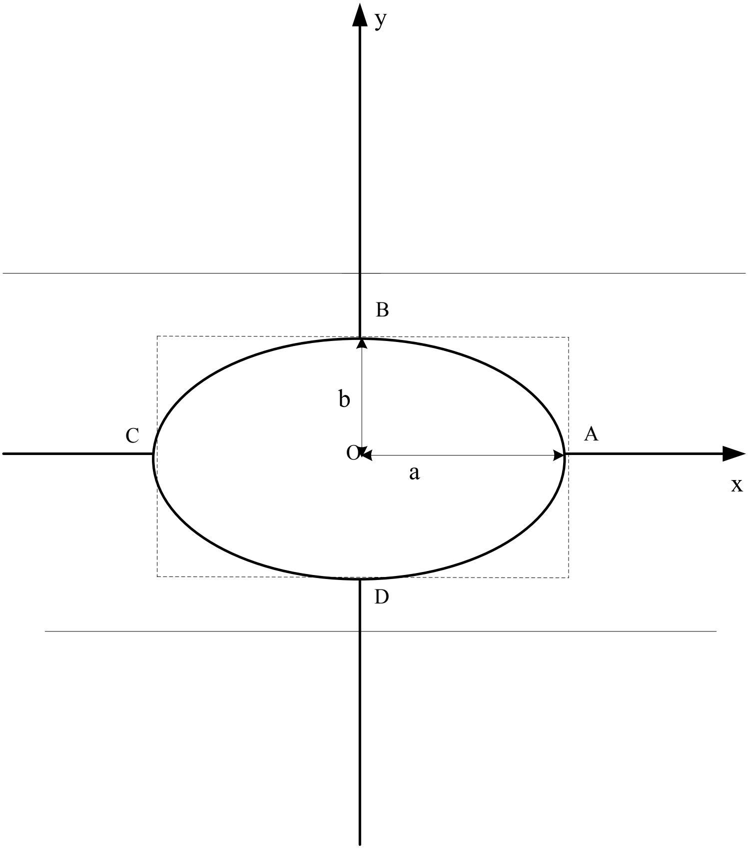

Рисунок 10.1

Параметри a і b є довжинами півосей еліпса, які розташовані на осях координат. *Вершинами еліпса* є точки $A(a,0), B(b,0), C(-a,0), D(-b,0)$. Відрізки $AC=2a, BD=2b$ утворюють відповідно велику й малу *осі еліпса*. Вони зв'язані між собою рівністю

$$c^2=a^2-b^2 \quad (a>b).$$

Фокусами цього еліпса є точки $F_1(-c,0), F_2(c,0)$. $F_1F_2=2c$ - відстань між фокусами. $MF_1=r_1, MF_2=r_2$ - *фокальні радіуси точки* M еліпса. За означенням еліпса: $r_1+r_2=2a$.

Означення 10.2.2. *Ексцентриситетом еліпса* називають відношення відстані між фокусами до великої осі: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ $(a>b)$. Оскільки за означенням еліпса $a>c$, то $0\le\varepsilon<1$. Ураховуючи співвідношення між параметрами $c^2=a^2-b^2$, маємо

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

З останнього рівняння випливає *геометрична інтерпретація ексцентриситету*. При малому ε числа a і b майже рівні, тому еліпс близький до кола, причому для кола $\varepsilon=0$. Якщо ε близький до 1, то число b дуже мале порівняно з числом a і еліпс сильно «витягнутий» уздовж великої осі. Таким чином*, ексцентриситет еліпса характеризує його форму*.

Означення 10.2.3. *Директрисами еліпса* називаються прямі, перпендикулярні великій осі та симетрично розташовані на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від центру кривої (випадок кола, коли $\varepsilon=0$, не розглядається). Рівняння директрис: $d_1: x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ та $d_2: x=\dfrac{a}{\varepsilon}$. Для еліпса $\varepsilon<1\Rightarrow\dfrac{a}{\varepsilon}>a$, тобто директриси розташовані зовні його.

Приклад 10.5.

Звести рівняння еліпса $25x^2+169y^2=4225$ до канонічного вигляду. Знайти координати центра, півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис і відстань між ними.

Розв'язання.

Розділивши обидві частини даного рівняння на 4225, одержимо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$$

Звідки знаходимо $O(0;\,0)$ - центр еліпса; $a=13, b=5$. Оскільки $c^2=a^2-b^2$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{169-25}=12$. Тоді координати фокусів: $F_1(-12;\,0), F_2(12;\,0)$. За формулою знаходимо ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$. Запишемо рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{169}{12}$. Відстань між ними $d=2\cdot\frac{a}{\varepsilon}=\frac{169}{6}$.

Приклад 10.6.

Звести рівняння $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ до канонічного вигляду. Визначити координати центра, півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис. Побудувати графік кривої.

Розв'язання.

Оскільки $A\cdot B=4\cdot 3>0$, то рівняння описує криву еліптичного типу.

Групуємо в лівій частині рівняння члени зі змінними x, y і виділяємо повні квадрати із цими змінними:

$$\left(4x^2-8x\right)+\left(3y^2+12y\right)-32=0,$$

$$4\left(\underbrace{x^2-2x+1}-1\right)+3\left(\underbrace{y^2+4y+4}-4\right)-32=0,$$

$$4(x-1)^2-4+3(y+2)^2-12-32=0,$$

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48,$$

$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1.$$

Точка $O(1;-2)-$ центр еліпса. $a=2\sqrt{3}-$ мала півось, $b=4-$ велика півось еліпса. Оскільки $a<b$, то фокуси лежать на вертикальній осі симетрії. Тоді $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=\sqrt{4}=2$, а ексцентриситет (відношення відстані між фокусами до великої осі) $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Координати фокусів: $F_1(x_O;y_O-c)\to F_1(1;0)$; $F_2(x_O;y_O+c)\to F_2(1;-4)$. Рівняння директрис: $d_1,d_2:y-y_O=\mp\frac{b}{\varepsilon},$; для даного еліпса: $y+2=\mp\frac{4}{1/2}=\mp 8\Rightarrow d_1:y=-10,d_2:y=6$.

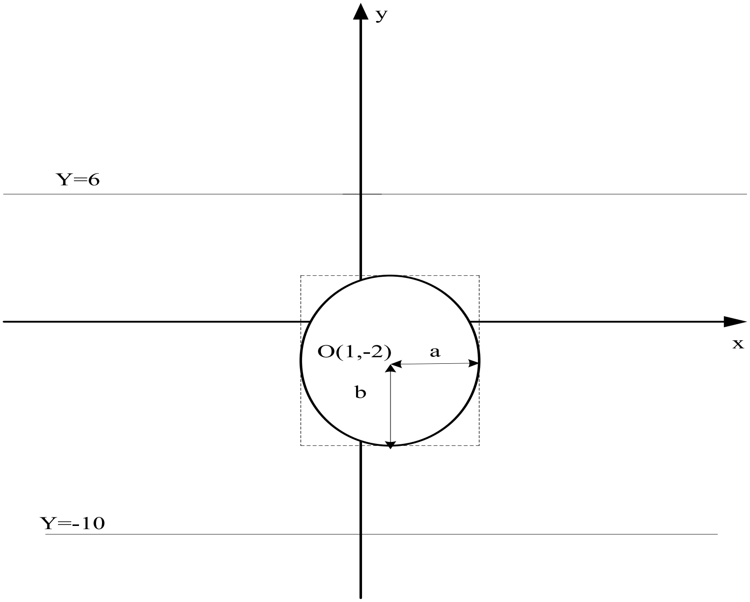

Рисунок 10.2

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

1. Задано рівняння еліпса $9x^2+5y^2=45$. Знайти координати центра, півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис.

(Відповідь: $a=\sqrt{5}, b=3; F(\pm 2;0); \varepsilon=\dfrac{2}{\sqrt{5}}; d_{1,2}=\pm 2,5$.)

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо додатково відомо, що відстань між його фокусами рівна 6, а його велика вісь рівна 10.

(Відповідь: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.)

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його малая півось рівна 3, а ексцентриситет – $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(Відповідь: $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$.)

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його велика півось рівна 10, а ексцентриситет – $\dfrac{4}{5}$.

(Відповідь: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$.)

5. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо сума півосей дорівнює 8, а відстань між фокусами – 8.

(Відповідь: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.)

6. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами дорівнює 18, а велика півось – 6.

(Відповідь: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.)

10.3. Гіпербола

Означення 10.3.1. *Гіперболою* називається геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою й меншою, ніж відстань між фокусами.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ – } \textit{канонічне рівняння гіперболи},$$

фокуси якого лежать на осі Ox.

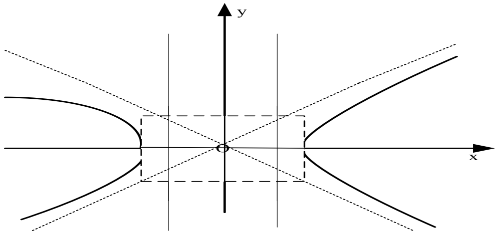

Рисунок 10.3

Параметри a і b є довжинами півосей еліпса, які розташовані на осях координат. *Вершинами гіперболи* є точки $A(a,0), C(-a,0)$. Відрізок $AC=2a$ утворює *дійсну вісь* гіперболи, а відрізок $BD=2b$ – її *уявну вісь*. Вони зв'язані між собою рівністю: $c^2=a^2+b^2$.

Фокусами цього еліпса є точки $F_1(-c,0), F_2(c,0)$. $F_1F_2=2c$ - відстань між фокусами. $MF_1=r_1, MF_2=r_2$ - *фокальні радіуси точки* M гіперболи. За означенням гіперболи: $|r_1-r_2|=2a \quad (a>0)$.

Означення 10.3.2. *Ексцентриситетом гіперболи* називають відношення відстані між фокусами до дійсної осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Для гіперболи $\varepsilon \in (1, +\infty)$.

Означення 10.3.3. Прямі $d_1: \ y = -\frac{a}{\varepsilon}$ та $d_2: \ y = \frac{a}{\varepsilon}$, що перпендикулярні дійсній осі, називаються *директрисами гіперболи*. Для гіперболи $\varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} < a$, тобто директриси розміщені між гілками гіперболи.

Асимптоти гіперболи описуються рівняннями: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Гіпербола, яка задається рівнянням

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

має за дійсну вісь відрізок $2b$, а за уявну - $2a$.

Фокуси гіперболи лежать на осі $Oy\left(F_1(0, -c), F_2(0, c)\right)$.

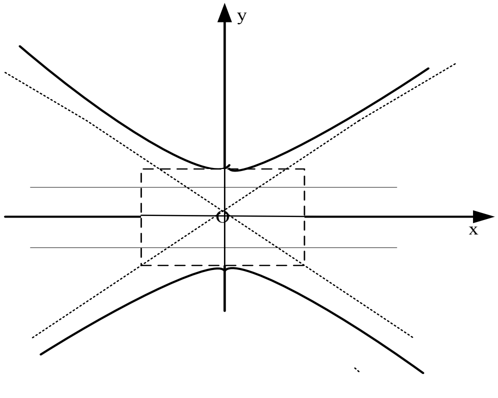

Рисунок 10.4

Ексцентриситет цієї гіперболи дорівнює

$$\varepsilon = \frac{c}{b},$$

асимптоти описуються рівняннями

$$y = \pm \frac{a}{b} x,$$

а директриси:

$$d_1: \ y = -\frac{b}{\varepsilon}; \quad d_2: \ y = \frac{b}{\varepsilon}.$$

Означення 10.3.4. Дві гіперболи, що описуються рівняннями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ та $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, називаються *взаємно спряженими*.

Означення 10.3.5. Якщо дійсна та уявна осі гіперболи рівні, то гіперболу називають *рівносторонньою*.

Приклад 10.7.

Задано рівняння гіперболи $7x^2 - 9y^2 = 63$. Знайти координати центра, півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис та асимптот.

Розв'язання.

Розділивши обидві частини даного рівняння на 63, одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = 1.$$

Звідки знаходимо $O(0;\,0)$ - центр гіперболи; $a = 3$ - дійсна півось, $b = \sqrt{7}$ - уявна півось. Оскільки $c^2 = a^2 + b^2$, то $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 7} = 4$. Тоді координати фокусів: $F_1(-4;\,0)$, $F_2(4;\,0)$.

За формулою знаходимо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$. Запишемо

рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{9}{4}=\pm 2,25$. Рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$.

Приклад 10.8.

Написати рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами рівна 8, а ексцентриситет гіперболи – $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Розв'язання.

Оскільки фокуси гіперболи лежать на осі Oy, то рівняння директрис $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ та ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}$. Відстань між директрисами $d=2\cdot\frac{b}{\varepsilon}=8$. Отже, $b=4\varepsilon=2\sqrt{5}$. Звідки $\varepsilon=\frac{c}{b}=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\Rightarrow a^2=b^2\cdot\left(\varepsilon^2-1\right)=\left(2\sqrt{5}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1\right)=5$. Тоді рівняння гіперболи має вигляд $-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$.

Приклад 10.9.

Знайти відстань від фокусів гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ до її асимптот і кут між асимптотами.

Розв'язання.

Виходячи з канонічного рівняння гіперболи, знайдемо довжини її півосей: $a=4, b=3$. Відомо, що гіпербола має фокуси в точках F_1, F_2 з координатами $\left(-\sqrt{a^2+b^2},0\right),\left(\sqrt{a^2+b^2},0\right)$, а рівняння асимптот мають вигляд $y=\pm\frac{b}{a}x$. Підставляючи відомі значення a, b,

дістанемо координати фокусів $F_1(-5,0), F_2(5,0)$ та рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Оскільки гіпербола складається з двох віток, симетричних відносно координатних осей, то з міркувань симетрії випливає, що відстані d_1, d_2, d_3, d_4 від будь-якого фокуса до асимптот однакові. Для визначення шуканої відстані скористаємося формулою для обчислення відстані від точки F_2 до прямої $y = \pm\frac{3}{4}x$:

$$d = \frac{\left|\frac{3}{4}\cdot 5\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + (-1)^2}} = 3.$$

Кут φ між асимптотами обчислимо за формулою $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$ для кута між двома прямими $y = \frac{3}{4}x,\ y = -\frac{3}{4}x$:

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}\right| = \frac{24}{7}.$$

Звідки $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{24}{7}\right)$.

Приклад 10.10.

Задано рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться у фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(4,6)$.

Розв'язання.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$. З нього знаходимо $a^2 = b^2 = 8, c^2 = a^2 + b^2 = 16$. Отже, $F_1(-4,0), F_2(4,0)$.

Позначимо через a_1, b_1 довжини відповідно великої та малої півосей шуканого еліпса. Оскільки, з одного боку, відстань між фокусами еліпса $2c = 8$, а з іншого – $2\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, то для невідомих параметрів еліпса дістаємо перше співвідношення

$$8 = 2\sqrt{a_1^2 - b_1^2} \Rightarrow a_1^2 - b_1^2 = 16 .$$

Оскільки за умовою точка A належить еліпсу, то її координати $(4, 6)$ мають задовольняти його рівняння $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$. Дістаємо друге співвідношення

$$\frac{16}{a_1^2} + \frac{36}{b_1^2} = 1 .$$

Для визначення параметрів a_1^2, b_1^2 одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = 16, \\ \dfrac{16}{a_1^2} + \dfrac{36}{b_1^2} = 1. \end{cases}$$

Розв’язавши її, матимемо $a_1^2 = 64, b_1^2 = 48$. Отже,

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 .$$

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

1. Написати рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо її уявна вісь $4\sqrt{3}$, гіпербола проходить через точку $(6;-4)$.

(Відповідь: $-\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{\frac{192}{21}}=1$.)

2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо відомо, що відстань між вершинами рівна 48, а асимптотами є прямі $y=\pm\frac{12}{5}x$.

(Відповідь: $-\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{576}=1$.)

3. Написати рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами дорівнює $\frac{50}{7}$, ексцентриситет - $\frac{7}{5}$.

(Відповідь: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{\frac{625}{6}}=1$.)

10.4. Парабола

Означення 10.4.1. *Параболою* називають геометричне місце точок площини, відстані від яких до заданої точки (фокуса) й заданої прямої (директриси) рівні.

$$y^2 = 2px,\ p > 0$$ *– канонічне рівняння параболи,*

симетричної відносно осі Ox, із вершиною в початку координат, вітки якої напрямлені вправо.

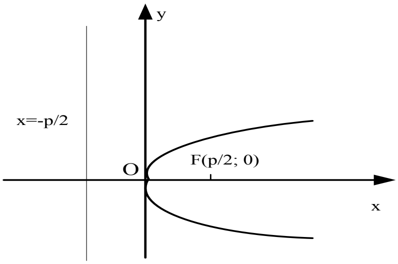

Рисунок 10.5

Фокус параболи позначається буквою F, а директрису – буквою l.

Означення 10.4.2. Число p – відстань від фокуса до директриси – називають *параметром* параболи.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox і вітки якої напрямлені вліво:

$$y^2 = -2px,\ p > 0.$$

Координати її фокуса $F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$, а рівняння директриси $x = \frac{p}{2}$.

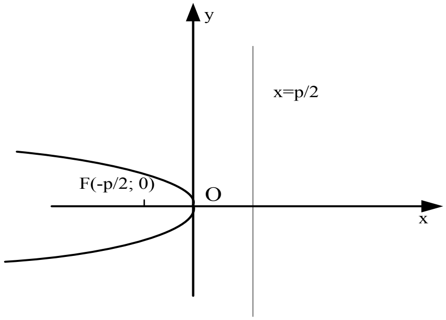

Рисунок 10.6

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy і вітки якої напрямлені вгору,

$$x^2 = 2py,\ p > 0\ .$$

Координати її фокусів $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, а рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$.

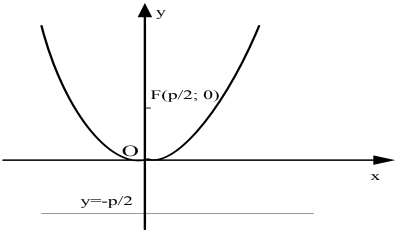

Рисунок 10.7

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy і вітки якої напрямлені вниз,

$$x^2 = -2py,\ p > 0\ .$$

Координати її фокусів $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, а рівняння директриси $y = \frac{p}{2}$.

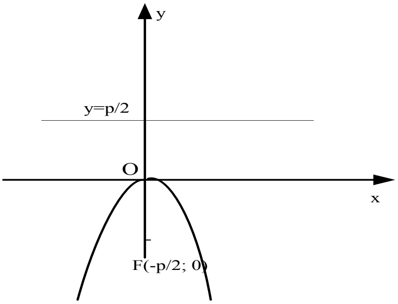

Рисунок 10.8

Означення 10.4.3. Відстань r від точки M параболи до її фокуса F називається *фокальним радіусом* цієї точки.

Означення 10.4.4. Відношення довжини фокального радіуса r кожної точки параболи до відстані d цієї точки до директриси називається її *ексцентриситетом*, і він дорівнює $1, \varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Приклад 10.11.

Записати рівняння параболи, вершиною якої є точка $(0, 0)$ і яка проходить: а) через точку $(-1, 2)$ симетрично відносно осі Ox; б) через точку $(2, 4)$ симетрично відносно осі Oy.

Розв'язання.

а) Оскільки парабола проходить через початок координат і через точку $(-1, 2)$ з від'ємною абсцисою, а її віссю симетрії є вісь Ox, то рівняння параболи слід шукати у вигляді $y^2 = -2px$. Підставляючи

в це рівняння координати відомої точки, дістанемо $4 = -2p(-1)$, $p = 2$. Шукане рівняння має вигляд $y^2 = -4x$.

б) Рівняння параболи шукатимемо у вигляді $x^2 = 2py$. Підставляючи в це рівняння координати точки $(2, 4)$, дістанемо $4 = 2p \cdot 4$, $p = \frac{1}{2}$. Отже, шуканим рівнянням параболи є $x^2 = y$.

Приклад 10.12.

Знайти координати фокуса та рівняння директриси параболи $y^2 = 8x$.

Розв'язання.

Парабола визначена канонічним рівнянням $y^2 = 2px$. Отже, $p = 4$. Тоді координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \to F(2; 0)$, рівняння директриси: $x = -\frac{p}{2} \to x = -2$.

Приклад 10.13.

Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(1; -2)$.

Розв'язання.

Оскільки парабола симетрична відносно осі Oy і проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$. Враховуючи, що парабола проходить через точку $A(1; -2)$, маємо $1 = 2 \cdot p \cdot (-2) \Rightarrow p = -\frac{1}{4}$. $x^2 = -\frac{1}{2}y -$ рівняння шуканої параболи.

<u>Задачі та вправи для самостійного розв'язання:</u>

1. Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, якщо відстань від фокуса, розташованого на осі Ox, до вершини дорівнює 4.

(Відповідь: $y^2 = 16x$.)

2. Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, якщо відстань від фокуса, розташованого на осі Oy, до директриси дорівнює 6.

(Відповідь: $x^2 = 12y$.)

3. Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $A(1;2)$.

(Відповідь: $y^2 = 4x$.)

4. Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі ординат і проходить через точку $B(5;1)$.

(Відповідь: $x^2 = 25y$.)

10.5. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

Загальне рівняння кривої другого порядку:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де $A^2 + C^2 \neq 0$.

Якщо $4AC - B^2 > 0$, то рівняння визначає криву еліптичного типу і зводиться до одного із видів:

1) при $A \neq C$

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 -$ еліпс;

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0 -$ вироджений еліпс (точка з координатами $x' = 0,\ y' = 0$);

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1 -$ уявний еліпс (порожня множина точок).

2) при $A = C$

$x'^2 + y'^2 = R^2 -$ коло;

$x'^2 + y'^2 = 0 -$ вироджене коло (точка з координатами $x' = 0,\ y' = 0$);

$x'^2 + y'^2 = -R^2 -$ уявне коло (порожня множина точок).

Якщо $4AC - B^2 < 0$, то рівняння визначає криву гіперболічного типу і зводиться до одного із видів:

$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 -$ гіпербола;

$-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 -$ спряжена гіпербола;

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0 -$ пара прямих, що перетинаються $y' = \frac{b}{a}x',\ y' = -\frac{b}{a}x'$, де точка з координатами $x' = 0,\ y' = 0 -$ точка перетину прямих.

Якщо $4AC - B^2 = 0$, то рівняння визначає криву параболічного типу і зводиться до одного із видів:

3) при $C = 0$

$x'^2 = 2py' -$ парабола;

$x'^2 = a^2 -$ пара паралельних прямих $x' = a,\ x' = -a$;

$x'^2 = -a^2 -$ пара уявних прямих, тобто порожня множина точок;

$x'^2 = 0 -$ пара збіжних прямих $x' = 0$;

4) при $A = 0$

$y'^2 = 2px' -$ парабола;

$y'^2 = b^2 -$ пара паралельних прямих $y' = b,\ y' = -b$;

$y'^2 = -b^2 -$ пара уявних прямих, тобто порожня множина точок;

$y'^2 = 0 -$ пара збіжних прямих $y' = 0$;

Приклад 10.14.

З’ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню:

1) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;

2) $4x^2 - 25y^2 + 50y - 24x + 89 = 0$;

3) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0$;

4) $4y^2 - 8y - 2x - 1 = 0$.

Розв'язання.

1) Оскільки $4AC-B^2=4\cdot 4\cdot 9>0$, то рівняння визначає фігуру еліптичного типу.

Згрупуємо члени зі змінними $x,\ y$:

$$\left(4x^2-40x\right)+\left(9y^2+36y\right)+100=0,$$

$$4\left(x^2-10x\right)+9\left(y^2+4y\right)+100=0.$$

Доповнивши до повних квадратів вирази у дужках, отримуємо:

$$4\left(\underbrace{x^2-10x+5^2}-25\right)+9\left(\underbrace{y^2+4y+2^2}-4\right)+100=0,$$

$$4\left(x-5\right)^2-100+9\left(y+2\right)^2-36+100=0,$$

$$4\left(x-5\right)^2+9\left(y+2\right)^2=36,$$

$$\frac{\left(x-5\right)^2}{9}+\frac{\left(y+2\right)^2}{4}=1.$$

Це рівняння еліпса з центром у точці $O\left(5;-2\right)$ і півосями $a=3, b=2$.

2) Оскільки $4AC-B^2=4\cdot 4\cdot\left(-25\right)<0$, то рівняння визначає фігуру гіперболічного типу.

Згрупуємо члени зі змінними $x,\ y$:

$$\left(4x^2-24x\right)+\left(-25y^2+50y\right)+89=0,$$

$$4\left(x^2-6x\right)-25\left(y^2-2y\right)+89=0.$$

Доповнимо до повних квадратів вирази у дужках:

$$4\left(\underbrace{x^2-6x+3^2}-9\right)-25\left(\underbrace{y^2-2y+1^2}-1\right)+89=0,$$

$$4\left(x-3\right)^2-36-25\left(y-1\right)^2+25+89=0,$$

$$4\left(x-3\right)^2-25\left(y-1\right)^2=100,$$

$$\frac{\left(x-3\right)^2}{25}-\frac{\left(y-1\right)^2}{4}=1.$$

Це рівняння гіперболи з центром у точці $O\left(3;1\right)$ і півосями $a=5, b=2$.

3) Оскільки $4AC-B^2=4\cdot 9\cdot(-16)<0$, то рівняння визначає фігуру гіперболічного типу.

Перетворимо задане рівняння так:

$9x^2-16y^2-36x+32y+20=0$,

$(9x^2-36x)+(-16y^2+32y)+20=0$,

$9(x^2-4x)-16(y^2-2y)+20=0$,

$9\left(\underbrace{x^2-4x+2^2}-4\right)-16\left(\underbrace{y^2-2y+1^2}-1\right)+20=0$,

$9(x-2)^2-36-16(y-1)^2+16+20=0$,

$9(x-2)^2-16(y-1)^2=0$,

$(3(x-2)-4(y-1))(3(x-2)+4(y-1))=0$,

$(3x-4y-2)(3x-4y-10)=0$.

Дане рівняння розпадається на два:

$3x-4y-2=0$ та $3x-4y-10=0$,

і визначає дві прямі, що перетинаються в точці $O(2;1)$.

4) Оскільки $4AC-B^2=4\cdot 0\cdot 4=0$, то рівняння визначає фігуру параболічного типу.

Перетворимо задане рівняння так:

$4y^2-8y-2x-1=0$,

$(4y^2-8y)-2x-1=0$,

$4\left(\underbrace{y^2-2y+1^2}-1\right)-2x-1=0$,

$4(y-1)^2-4-2x-1=0$,

$4(y-1)^2=2x+5$,

$(y-1)^2=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)$.

Це рівняння визначає параболу з вершиною у точці $O\left(-\frac{5}{2},1\right)$ і параметром $p=\frac{1}{4}$.

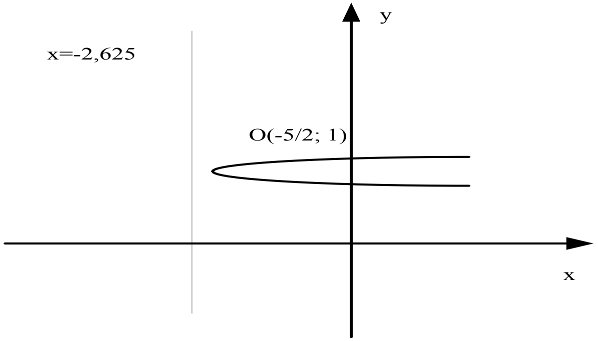

Рисунок 10.9

<u>Задачі та вправи для самостійного розв'язання:</u>

З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню:

1. $x^2+2y^2+4x-4y=0$;

(Відповідь: $\frac{(x+2)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{3}=1-$ еліпс з центром $O(-2;1)$ і півосями $a=\sqrt{6}, b=\sqrt{3}$.)

2. $4x^2-y^2-8x-6y-4=0$;

(Відповідь: $-\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(y+3)^2}{1}=1-$ спряжена гіпербола з центром $O(1;-3)$ і півосями $a=\frac{1}{2}, b=1$.)

3. $4x^2+4x+2y-1=0$;

(Відповідь: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}(y-1)$ – парабола з вершиною $O\left(-\frac{1}{2};1\right)$ і параметром $p=\frac{1}{4}$.)

4. $6x^2+8y^2+3x-4y+1=0$;

(Відповідь: $\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{48}}+\frac{\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{64}}=-1$ – уявний еліпс.)

5. $x^2+3x-3=0$;

(Відповідь: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$ – пара паралельних прямих $x=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$, $x=\frac{-\sqrt{21}-3}{2}$.)

6. $4y^2+4x-2y+1=0$.

(Відповідь: $\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{8}\right)$ – парабола з вершиною $O\left(\frac{3}{8};\frac{1}{4}\right)$ і параметром $p=\frac{1}{4}$.)

Запитання для самоперевірки з теми

«Аналітична геометрія»

1. Записати загальне рівняння площини.
2. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}(A, B, C)$.
3. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки.
4. Записати рівняння площини у відрізках.
5. Записати формулу, за якою знаходиться кут між площинами.
6. Записати умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох площин.
7. Записати формулу для обчислення відстані від точки до площини.
8. Записати канонічні рівняння прямої у просторі.
9. Записати параметричні рівняння прямої у просторі.
10. Записати рівняння прямої, що проходить через дві точки.
11. Записати загальні рівняння прямої у просторі.
12. Як здійснюється перехід від загальних рівнянь прямої до її канонічних рівнянь?
13. Записати формулу, за якою знаходиться кут між прямими у просторі.
14. Записати умови перпендикулярності, паралельності прямих у просторі.
15. Записати формулу для обчислення відстані від точки до прямої у просторі.
16. Записати формулу для обчислення відстані між мимобіжними прямими.
17. Записати формулу, за якою знаходиться кут між прямою та площиною.
18. Як знайти точку перетину прямої та площини.
19. Записати умову паралельності прямої та площини.
20. Записати умову перпендикулярності прямої та площини.
21. Записати умову належності прямої площині.
22. Записати загальне рівняння прямої на площині. Який геометричний зміст коефіцієнтів при x та y?
23. Записати рівняння прямої, заданої точкою та нормаллю.
24. Записати рівняння прямої у відрізках.

25. Записати рівняння прямої на площині та вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.

26. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом і вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.

27. Записати формулу, за якою знаходиться кут між двома прямими на площині.

28. Записати умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох прямих на площині.

29. Записати формулу для обчислення відстані від точки до прямої на площині.

30. Що називається колом?
31. Записати канонічне рівняння кола.
32. Що називається еліпсом?
33. Записати канонічне рівняння еліпса. Вказати його осі симетрії, вершини, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.
34. Що називається гіперболою?
35. Записати канонічне рівняння гіперболи. Вказати її осі симетрії, вершини, фокуси, дійсну вісь, уявну вісь, ексцентриситет, асимптоти, рівняння директрис.
36. Що називається параболою?
37. Записати канонічне рівняння параболи. Вказати її вершину, параметр, директрису, фокус, вісь симетрії.
38. Написати загальне рівняння кривої другого порядку. В якому випадку це рівняння являється рівнянням еліптичного типу, гіперболічного типу, параболічного типу?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Анапенюк Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Высш.шк., 1986. – 272 с.

2. Анапенюк Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Мн.: Высш.шк., 1990. – 286 с.

3. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. / / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 343 с.

4. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. / / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.

5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М. : Наука, 1971. – 220 с.

6. Ильин В.А. Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М. : Изд-во Моск. Ун-та, 1998. – 320 с.

7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984. – 302 с.

8. Клетеник А.В. Сборник задач по аналитической геометрии./А.В. Клетеник. – М. : Наука, 2002. – 240 с.

9. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. – М. : Высш. шк., 1983. – 175 с.

10. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М. : Наука, 1975. – 319 с.

11. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1990. – 270 с.

12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 352 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Любчик Леонід Михайлович, **Геляровська** Оксана Анатоліївна,

Галуза Олексій Анатолійович, **Решетнікова** Світлана Миколаївна,

Сердюк Ірина Василівна

Вища математика.

Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія

Навчальний посібник

для студентів усіх спеціальностей вищих технічних навчальних закладів

За загальною редакцією **Любчик** Леонід Михайлович

Роботу до видання рекомендував М.І. Безменов

Редактор М. П. Єфремова

План 2016 р., поз. 33

Підп.до друку 03.02.2016 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 8,6
Наклад 50 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.