УДК 007.3

С. В. ШЕВЧЕНКО

О ДЕКОМПОЗИЦИИ ЗАДАЧИ РАЗВИТИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ СИСТЕМ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Оптимальное планирование развития и размещения производства — важная актуальная задача. Ее решение позволит повысить эффективность общественного производства. Рассмотрим декомпозиционный подход к указанной проблеме на примере планирования развития и размещения систем технического обслуживания (ТО).

Задача формулируется следующим образом. Зная запрашиваемые (прогнозируемые) значения спроса ω_i, $i \in I$, в ТО, заданные на множестве заявок $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, необходимо предложить такой план развития и размещения сети систем ТО на множестве центров $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, чтобы при условии полного удовлетворения спроса суммарные приведенные затраты на реконструкцию сети, ТО и транспортировку заявок к месту обслуживания были минимальными.

Пусть c_{ij} — полные транспортные расходы по доставке i-й заявки к j-му центру ТО. Для $j \in J$ задано множество R_j вариантов развития данной системы в виде набора разрывных функций $\forall p \in R_j$:

$$f_{pj}(x_j) = \begin{cases} A_{pj} + g_{pj}(x_j), & 0 < x_j \leqslant B_{pj}; \\ 0, & x_j = 0. \end{cases}$$

Здесь $A_{pj} \geqslant 0$ — капитальные вложения в реконструкцию системы ТО j-го центра по p-му варианту; $g_{pj}(x_j)$ — вогнутая функция, отражающая изменение эксплуатационных затрат в зависимости от загрузки j-й системы x_j; B_{pj} — мощность j-й системы при p-м варианте реконструкции.

Введем в рассмотрение логические переменные, определяющие прикрепление заявок к центрам обслуживания. Пусть $\forall i \in I$, $\forall j \in J$:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я заявка поступает в } j\text{-й центр;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вариант развития можно регламентировать также с помощью логических переменных. В этом случае $\forall j \in J$, $\forall p \in R_j$:

$$y_{pj} = \begin{cases} 1, & \text{если в } j\text{-м центре выбран } p\text{-й вариант развития;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда математическая модель задачи приобретает следующий вид: найти

$$\min S = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} c_{ij} x_{ij} + \sum_{p \in R_j} y_{pj} \left(A_{pj} E + g_{pj} \left(\sum_{i \in I} \omega_i x_{ij} \right) \right) \right) \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1,\ \forall i \in I\ (2);\ \sum_{i\in I} \omega_i x_{ij} \leqslant \sum_{p\in R_j} B_{pj} y_{pj},\ \forall j \in J\ (3);$$

$$\sum_{p\in R_j} y_{pj} \leqslant 1,\ \forall j \in J\ (4);\ \sum_{j,p} A_{pj} y_{pj} \leqslant K\ (5);$$

$$x_{ij},\ y_{pj} \in \{0, 1\},\ \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \forall p \in R_j\ (6),$$

где E — коэффициент экономической эффективности капитальных вложений; K — выделенные капитальные вложения.

Данная задача относится к классу нелинейных статических однопродуктовых производственно-транспортных задач размещения с булевыми переменными [1]. Нелинейность целевой функции и целочисленность всех переменных затрудняют применение для ее решения известных методов оптимизации производственно-транспортных моделей [2, 3].

Анализ условий задачи (1) — (6) показывает, что целевая функция является аддитивно-сепарабельной, а среди ограничений задачи можно выделить совокупности локальных ограничений (3), (4), (6) и общих — (2), (5). Поэтому используем метод декомпозиции задачи на основе разделения связывающих ограничений [4]. Вначале введем в рассмотрение параметры $\xi_{ij} \in \{0, 1\}$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$, обусловливающие распределение заявок между центрами аналогично $\{x_{ij}\}$ и удовлетворяющие условию $\sum_{j\in J} \xi_{ij} = 1$, $\forall i \in I$. Очевидно, что вектор $\xi_j = \{\xi_{ij}\}$ полностью характеризует загрузку j-го центра. Тогда приходим к j-й подзадаче.

Для заданного вектора ξ_j необходимо найти

$$w_j(\xi_j) = \left(\min \sum_{i\in I} c_{ij} x_{ij} + \sum_{p\in R_j} y_{pj} \left(A_{pj} E + g_{pj} \left(\sum_{i\in I} \omega_i x_{ij}\right)\right)\right) \qquad (7)$$

при ограничениях

$$x_{ij} = \xi_{ij},\ \forall i \in I\ (8);\ \sum_{i\in I} \omega_i x_{ij} \leqslant \sum_{p\in R_j} B_{pj} y_{pj}; \qquad (9)$$

$$\sum_{p\in R_j} y_{pj} \leqslant 1\ (10);\ x_{ij},\ y_{pj} \in \{0, 1\},\ \forall i \in I,\ \forall p \in R_j. \qquad (11)$$

Чтобы решения подзадач (7) — (11) соответствовали решению исходной задачи, распределение $\{\xi_j\}$ следует корректировать с целью уменьшить значение $W(\xi) = \sum_{j\in J} W_j(\xi_j)$, равное по определению значению целевой функции задачи (1) — (6).

Как показано в работе [5], решение задачи (7) — (11) дает возможность получить значение градиента $\nabla w_j(\xi_j)$ функции $w_j(\xi_j)$, компоненты которого устанавливаются значениями соответствующих множителей Лагранжа к ограничениям (8) в стационарной точке функции Лагранжа для задачи (7) — (11).

Рассмотрим алгоритм решения подзадач. В силу ограничений (8) значения x_{ij} полностью определены. Переменные y_{pj} аддитивно входят в целевую функцию подзадачи с положительными сомножителями. Поэтому с учетом ограничения (10) значения y_{pj}, соответствующие оптимальному решению подзадачи, находим следующим образом:

$$\dot{y}_{pj} = \begin{cases} 1, \ z_p = \min\limits_{r \in R_j} \left\{ z_r = A_{rj}E + g_{rj}\left(\sum\limits_{i \in I} \omega_i \xi_{ij}\right) \middle| \sum\limits_{i \in I} \omega_i \xi_{ij} \leqslant B_{rj} \right\}; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (12)$$

Построим функцию Лагранжа задачи (7) — (11), преобразовав неравенство (9) в ограничение типа равенства с учетом выражения (12). Получим

$$L_j(x_j, y_j, u_j, v_j) = s_j + \sum_{i \in I} u_{ij}(x_{ij} - \xi_{ij}) +$$

$$+ v_j\left(\sum_{i \in I} \omega_i x_{ij} + \omega_{0j} - \sum_{p \in R_j} B_{pj} y_{pj}\right).$$

Здесь $x_j = \{x_{ij}\}$; $y_j = \{y_{pj}\}$; $u_j = \{u_{ij}\}$; ω_{0j} — фиктивная заявка,

$$\omega_{0j} = \sum_{p \in R_j} B_{pj} y_{pj} - \sum_{i \in I} \omega_i \xi_{ij}.$$

Для определения искомых значений $\{u_{ij}\}$ воспользуемся методом множителей Лагранжа [5], согласно которому приходим к системе уравнений $\nabla L_j(x_j, y_j, u_j, v_j) = 0$. С учетом известного решения подзадачи (8), (12) данная система уравнений становится линейной относительно величин u_{ij}, v_j. Если $\{\dot{u}_{ij}, \dot{v}_j\}$ — решение этой системы, то согласно работе [5] $\nabla w_j(\xi_j) = -\{\dot{u}_{ij}\}$.

Чтобы уменьшить значение целевой функции задачи (1) — (6), распределение $\xi = \{\xi_j\}$ на следующей итерации необходимо изменить в направлении антиградиента $-\nabla w_j(\xi_j) = \{\dot{u}_{ij}\}$. Близость изменения к направлению антиградиента можно оценить по значению скалярного произведения соответствующих векторов. Очевидно, что новое распределение должно удовлетворять ограничениям, аналогичным ограничениям исходной задачи. Тогда приходим к координирующей задаче: найти

$$\max \sum_{i,j} \dot{u}_{ij} \xi_{ij} \quad (13)$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in J} \xi_{ij} = 1, \ \forall i \in I \ (14); \ \sum_{i \in I} \omega_i \xi_{ij} \leqslant \sum_{p \in R_j} B_{pj} \eta_{pj}, \ \forall j \in J \ (15);$$

$$\sum_{p \in R_j} \eta_{pj} \leqslant 1, \ \forall j \in J \ (16); \ \sum_{j,p} A_{pj} \eta_{pj} \leqslant K \ (17);$$

$$\xi_{ij}, \ \eta_{pj} \in \{0, 1\}, \ \forall i \in I, \ \forall j \in J, \ \forall p \in R_j. \quad (18)$$

В приведенной математической модели переменные η_{pj} — аналог переменных y_{pj}. Координирующая задача (13) — (18) является задачей целочисленного линейного программирования, для решения которой разработаны и используются эффективные методы оптимизации.

Следовательно, алгоритм решения задачи (1) — (6) можно представить в виде следующих пунктов: 1. Выбор допустимого начального распределения $\{\xi_j\}$. 2. Решение подзадач (7) — (11) и вычисление антиградиента $\{\dot{u}_{ij}\}$. 3. Выбор нового распределения $\{\xi_j\}$ по результатам решения координирующей задачи (13) — (18). 4. Если значение целевой функции $W(\xi)$ на данной итерации меньше, чем на предыдущей, то осуществляется переход к п. 2. В противном случае решение подзадач на предыдущей итерации соответствует решению исходной задачи.

Таким образом, решение нелинейной целочисленной задачи (1) — (6) сводится к решению простых подзадач (7) — (11), которые итерационно координируются оптимальным планом задачи целочисленного линейного программирования. Просчет тестовых примеров показал работоспособность предлагаемого алгоритма.

Список литературы: 1. *Основные* методические положения оптимизации развития и размещения производства / ЦЭМИ АН СССР.— М.: Наука, 1978.— 275 с. 2. *Бахтин А. Е.* Методы решения задач территориально-производственного планирования.— Новосибирск: Наука, 1976.— 240 с. 3. *Емеличев В. А., Комлик В. И.* Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации.— М.: Наука, 1981.— 209 с. 4. *Лэсдон Л. С.* Оптимизация больших систем: Пер. с англ.— М.: Наука, 1975.— 432 с. 5. *Хедли Д.* Нелинейное и динамическое программирование: Пер. с англ.— М.: Мир, 1967.— 506 с.

Поступила в редколлегию 04.10.83.

УДК 658.512

Г.В. ЦЫХМАНОВ, С. А. АФАНАСЬЕВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЛАНОВ К ЗАДАЧЕ СТАНДАРТИЗАЦИИ

Вопросам стандартизации, оптимизации рядов изделий уделяется большое внимание. Возникающие при этом задачи относятся большей частью к экстремальным задачам дискретного программирования, для которых пока неизвестны эффективные алгоритмы оптимизации [1].

Рассмотрим одну из подобных задач, которая формулируется так: из множества $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ возможных типов изделий выбрать те изделия, которые с минимальными затратами выполнили бы множество работ $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, причем каждая