УДК 539.3

Б.А. ХУДАЯРОВ, д-р техн. наук, зав. каф., Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Ташкент,
Р. АБДИКАРИМОВ, доц., Ташкентский финансовый институт, Ташкент

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

В работе на основе интегральных моделей разработаны и развиты расчетные математические модели для исследования нелинейных колебаний вязкоупругих пластин, круговой цилиндрической панели и цилиндрической оболочки с переменной жесткостью. Ил.: 1. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: математическая модель, переменная жесткость, вязкоупругие системы, нелинейные колебания, задача динамики.

Постановка проблемы и анализ литературы. Пластины переменной толщины широко используются в качестве подпорных стенок железобетонных зданий, прямоугольного элемента резервуаров, контрфорсных плотин, бетонного покрытия для укрепления взлетной полосы аэропорта, фундаментных плит сооружений и несущих элементов метрополитена, элементов подземных сооружений. Также они широко внедрены и в кораблестроение, судостроение, самолетостроение, и многих других отраслях техники и промышленности. В связи с интенсивным развитием промышленности, большое развитие приобрела механика композитных материалов. Интерес к проблемам деформирования и прочности пластин, панелей и оболочек из композиционного материала связан с тем, что они представляют собой основные несущие элементы конструкций. Использование новых композиционных материалов в инженерной практике, а также проектирование и создание прочных, легких и надежных конструкций требует совершенствования механических моделей деформируемых тел и разработки более совершенных математических моделей их расчета с учетом реальных свойств конструкционных материалов и их геометрии [1 – 4]. Поэтому разработка эффективных алгоритмов, которые используются для решения нелинейных задач динамической устойчивости элементов тонкостенных конструкций из композиционных материалов, является актуальной задачей.

В последнее время большое внимание уделяется изучению динамики существенно нелинейных вязкоупругих механических систем.

© Б.А. Худаяров, Р. Абдикаримов, 2013

Начало теоретическим исследованиям нелинейных колебаний упругих оболочек положено Э.И. Григолюком [5] и Е. Рейсснером [6], которые разработали основную нелинейную модель, использовав приближенные вариационные методы. В качестве разрешающих уравнений в данных работах использовались геометрически нелинейные уравнения теории тонких оболочек, а динамический прогиб и функции напряжений в срединной поверхности аппроксимировались одночленными выражениями. Для определения обобщенного перемещения получено нелинейное дифференциальное уравнение, приближенное решение которого определялось с помощью метода Бубнова-Галеркина и метода возмущений. Последующие исследования нелинейных собственных и вынужденных колебаний упругих систем выполнены многими авторами. Наиболее существенные результаты получены С.А. Амбарцумяном, Н.Х. Арутюняном, Г.Е. Багдасаряном, Ф.Б. Бадаловым, А.Е. Богдановичем, В.В. Болотиным, А.С. Вольмиром, И.И. Воровичем, К.З. Галимовым, В.Ц. Гнуни, Я.М. Григоренко, А.Н. Гузем, А.А. Ильюшиным, В.С. Калининым, В.Г. Карнауховым, Г. Каудерером, Я.Ф. Каюком, И.Г. Кельдибековым, И.А. Кийко, Н.А. Кильчевским, М.С. Корнишиным, А.С. Кравчуком, В.Д. Кубенко, В.А. Крыско, Г.В. Мишенковым, Х.М. Муштари, Ю.В. Петровым, Г.С. Писаренко, Е.И. Шемякиным, А.Н. Филатговым, Л.Г. Донеллом, Дж. Навинским, Е. Рейснером и др.

Целью данной работы является разработка комплекса математических моделей в форме систем интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, численных алгоритмов и компьютерных программ для решения широкого класса задач нелинейных колебаний и динамической устойчивости вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций с переменной жесткостью.

Постановка задачи. Построим математическую модель задачи о нелинейном колебании вязкоупругой изотропной пластины и оболочек переменной толщины (рис.) в геометрически нелинейной постановке по кинематической гипотезе Кирхгофа-Лява.

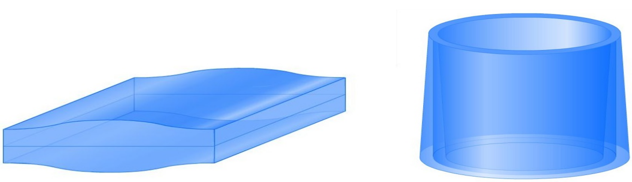

Рис. Вязкоупругая изотропная пластина и оболочка переменной толщины

Интегральную модель Больцмана-Вольтерра, которая характеризует закон изменения между напряжениями σ_x, σ_y, σ_{xy} и деформациями ε_x, ε_y, ε_{xy} в срединной поверхности, запишем в интегральном виде [7]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_y\right);$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon_{xy}, \tag{1}$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; Γ^* – интегральный оператор; ε_x, ε_y, ε_{xy} – компоненты конечной деформации.

Связь между деформациями в срединной поверхности ε_x, ε_y, γ_{xy} и перемещениями u, v, w по направлениям x, y, z имеют вид [8]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2;$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2}$$

Изгибающие и крутящие моменты элемента оболочки примем в виде [6]:

$$M_x = -D\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \ x \leftrightarrow y, \ H = -D\left(1-\mu\right)\left(1-\Gamma^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{3}$$

где $D = \dfrac{Eh^3\,(x,y)}{12(1-\mu^2)}$ – переменная цилиндрическая жесткость оболочки.

Уравнения движения элемента вязкоупругой изотропной оболочки имеют вид [8]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x - \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y - \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \tag{4}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x} + N_y\frac{\partial w}{\partial y}\right) + q - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \cdot$$

Здесь N_x, N_y и N_{xy} – усилия, отнесенные к единице длины сечения оболочки:

$$N_x = \sigma_x h\,,\quad x \leftrightarrow y,\quad N_{xy} = \gamma_{xy} h\,, \tag{5}$$

p_x, p_y и q – интенсивность заданных внешних нагрузок, приложенных к элементу по направлениям x, y и z соответственно.

Подставляя (3) и (5) в (4), получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида:

$$\left(1-\Gamma^*\right)\left[h\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial h}{\partial x}\left(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial h}{\partial y}\gamma_{xy}\right]+$$
$$+\frac{1-\mu^2}{E}p_x-\rho h\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,;$$
$$\left(1-\Gamma^*\right)\left[h\left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}\right)+\frac{\partial h}{\partial y}\left(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial h}{\partial x}\gamma_{xy}\right]+$$
$$+\frac{1-\mu^2}{E}p_y-\rho h\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\,; \tag{6}$$
$$\left(1-\Gamma^*\right)\left\{\left[D\nabla^4 w+2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w+\nabla^2 D\nabla^2 w-\right.\right.$$
$$\left.-(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]+\frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\left(k_x+\mu k_y\right)\varepsilon_x+\left(\mu k_x+k_y\right)\varepsilon_y\right]\Big\}+$$
$$+\frac{\partial h}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-\Gamma^*\right)\gamma_{xy}\right]+q-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\,.$$

С учетом (2) система уравнений (6) относительно перемещений u, v, w примет вид:

$$\left(1-\Gamma^*\right)\left\{h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial h}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x+\mu k_y\right)w+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}+p_x-\frac{\left(1-\mu^2\right)\rho h}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,;$$
$$\left(1-\Gamma^*\right)\left\{h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(k_y+\mu k_x\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\right.\right.$$

$$
+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Bigg]+\frac{\partial h}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\left(k_y+\mu k_x\right)w+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Bigg\}+p_y-\frac{\left(1-\mu^2\right)\rho h}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\,;
$$

$$
\left(1-\Gamma^*\right)h^3\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+3\left(1-\Gamma^*\right)\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+
$$

$$
+6\left(1-\Gamma^*\right)h^2\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+6\left(1-\Gamma^*\right)h^2\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)+
$$

$$
+3\left(1-\Gamma^*\right)\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right]\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+
$$

$$
+6\left(1-\mu\right)\left(1-\Gamma^*\right)\left[2h\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}- \qquad (7)
$$

$$
-12\left(1-\Gamma^*\right)h\left[\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\mu k_x+k_y\right)\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x^2+k_y^2+2\mu k_x k_y\right)w+\right.
$$

$$
\left.+\frac{k_x+\mu k_y}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{k_y+\mu k_x}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-12\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-\Gamma^*\right)\left\{h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\right.\right.
$$

$$
+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Bigg]+\frac{\partial h}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\right.
$$

$$
\left.+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x+\mu k_y\right)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Bigg\}-
$$

$$
-12\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(1-\Gamma^*\right)h\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x+\mu k_y\right)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-
$$

$$
-12\frac{\partial w}{\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)\left\{h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(k_y+\mu k_x\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\right.\right.
$$

$$
+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Bigg]+\frac{\partial h}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\right.
$$

$$
\left.-\left(k_y+\mu k_x\right)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Bigg\}-
$$

$$-12\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(1-\Gamma^*\right)h\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\left(k_y+\mu k_x\right)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-$$

$$-12\left(1-\mu\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)h\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{12\left(1-\mu^2\right)\rho h}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{12\left(1-\mu^2\right)}{E}q\,.$$

Заметим, что система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений движения вязкоупругой оболочки (7) является достаточно общей, из которой в частном случае можно получить уравнения движения вязкоупругих пластин, пологих и цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины.

Таким образом, математическая модель в геометрически нелинейной постановке задач динамики вязкоупругих изотропных пластин, панелей и оболочек с переменной жесткостью описывается, ИДУ в частных производных вида (7), при соответствующих начальных и граничных условиях.

Выводы. На основе интегральных моделей разработаны обобщенные математические модели нелинейных задачи динамики вязкоупругих изотропных пластин, панелей и оболочек с переменной жесткостью. Разработаны и развиты математические модели задач о нелинейных колебаниях и динамической устойчивости пластин, круговой цилиндрической панели, пологой оболочки двоякой кривизны и цилиндрических оболочек с симметричной и несимметричной толщиной.

Список литературы. **1.** *Верлань А.Ф.* Математическое моделирование флаттера летательных аппаратов. Монография // *А.Ф. Верлань, Б.А. Худаяров.* – Из-во "Palmarium Academic Publishing". – Saarbrucken, Germany, 2012. – 310 с. **2.** *Верлань А.Ф.* Компьютерное моделирование флаттера вязкоупругих ортотропных пластин в сверхзвуковом потоке газа / *А.Ф. Верлань, Б.А. Худаяров, Э.Ф. Файзибоев, З.У. Юлдашев* // Вестник НТУ "ХПИ". – 2012. – № 62 (968). – С. 8-17. **3.** *Верлань А.Ф.* Численное моделирование нелинейнiх задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью / *А.Ф. Верлань, Р.А. Абдикаримов, Х. Эшматов* // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32. – № 2. – С. 3-14. **4.** *Эшматов Х.* Клмпьютерное моделирование задачи о нелинейном флаттере вязкоупругой пластины из композиционого материала с сосредоточенными массами / *Х. Эшматов, Д.А. Ходжаев, Б.Х. Эшматов, О.Р. Кучаров* // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32. – № 5. – С. 3-10. **5.** *Григолюк Э.И.* Устойчивость оболочек / *Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов.* – М.: Наука, 1978. – 360 с. **6.** *Reissner E.* On transverse vibration of thin shallow shells / *E. Reissne* // J. Quart. Appl. Math. – 1955. – Vol. 13. – № 2. – P. 169-180. **7.** *Ильюшин А.А.* Основы математической теории термовязкоупругости // *А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря.* – М.: Наука, 1970. – 280 с. **8.** *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек / *А.С. Вольмир.* – М.: Наука. – 1972. – 432 с.

Поступила в редакцию 08.08.2013

УДК 539.3

Математична модель задачі динаміки в'язкопружних систем із змінною жорсткістю / Худаяров Б.А., Абдикаримов Р. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2013. – № 19 (992). – С. 160 – 166.

У роботі на основі інтегральних моделей розроблені і розвинені розрахункові математичні моделі для дослідження нелінійних коливань в'язкопружних пластин, кругової циліндрової панелі і циліндрової оболонки із змінною жорсткістю. Іл.: 1. Бібліогр.: 8 назв.

Ключові слова: математична модель, змінна жорсткість, в'язкопружні системи, нелінійні коливання, задачі динаміки.

UDC 539.3

Mathematical model problem of dynamics viscoelastic systems with variable rigidity / Khudayarov B.A., Abdikarimov R. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2013. – № 19 (992). – P. 160 – 166.

In the work on the basis of integral models developed mathematical model for research of nonlinear vibrations of viscoelastic plates, circular cylindrical panel and cylindrical shell with variable rigidity. Figs.: 1. Refs.: 8 titles.

Keywords: mathematical model, variable rigidity, viscoelastic systems, nonlinear oscillations, problem of dynamics.