

УДК 532.695

Э.Г. БРАТУТА*, д-р техн. наук, А.М. ПАВЛЕНКО**, д-р техн. наук,
А.В. КОШЛАК**, аспирант

* *Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»*

** *Днепродзержинский государственный технический университет*

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

У статті запропонована методика вирішення лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які часто зустрічаються в задачах математичної фізики, зокрема в задачах теплопровідності.

In clause the technique of the decision of the linear differential equations of the second order frequently meeting in tasks of mathematical physics is offered in particular in tasks is warm conductivity.

В работе [1] предложена методика решения задач теплопроводности многослойной частицы, суть которой заключалась в сведении параболических уравнений к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Настоящая работа является развитием данной методики.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка

$$y''(x) + p(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции в интервале $(a; b)$; $y(x)$ – искомая функция.

Известно, что

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (2)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (1), а вронскиан этой системы функций

$$W(x) = C e^{-\int p(x) dx}. \quad (3)$$

Если ЛОДУ имеет постоянные коэффициенты, то его решение сводится к квадратному алгебраическому уравнению.

В настоящей работе предлагается алгоритм, позволяющий и уравнение (1) сводить к квадратному алгебраическому уравнению с переменными коэффициентами.

Для этого введем вспомогательную функцию $r(x) = e^{\int \alpha(x) dx}$, которая связана с решением $y(x)$ и коэффициентами $p(x)$ и $g(x)$ и может принимать различные выражения. При этом необходимо учесть, что

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \alpha(x).$$

I. Пусть $r(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$, тогда

$$\alpha(X) = -\frac{t^2 + pt + q}{t} \text{ или } t^2 + (p + \alpha)t + q = 0, \quad (4)$$

где
$$t = t(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

Уравнение (4) – квадратное алгебраическое уравнение относительно t , решая которое, имеем

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2}(p + \alpha) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p + \alpha)^2 - 4g} \quad (5)$$

и учитывая
$$y_{1,2}(x) = e^{-\frac{1}{2}\int((p+\alpha)\pm\sqrt{(p+\alpha)^2-4g})dx}. \quad (6)$$

На функцию $\alpha(x)$ необходимо наложить условие

$$W(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = e^{-\int[p(x)+\alpha(x)]dx} \sqrt{(p + \alpha)^2 - 4g}, \text{ или} \\ C = e^{-\int \alpha(x)dx} \sqrt{(p + \alpha)^2 - 4g}, \quad (7)$$

которое можно записать в виде

$$C^* = e^{-2\int \alpha(x)dx} [(p + \alpha)^2 - 4g] \neq 0. \quad (8)$$

При этом $\alpha(x)$ – функция, которую можно выбрать следующим образом

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}(\ln\{g(x)f[p(x)]\})'. \quad (9)$$

Подставляя функцию (9) в условия (8) приходим к дифференциальному уравнению Бернулли

$$(g(x)f[p(x)])' + 2p(x)g(x)f[p(x)] = 2\sqrt{\frac{C^* f[p(x)] + 4}{f[p(x)]}}(g(x)f[p(x)])^{3/2}, \quad (10)$$

решая которое, получим

$$g(x) = \frac{C_2 W^2(x)}{f[p(x)] \left\{ \int \sqrt{\frac{C^* f[p(x)] + 4}{f[p(x)]}} W(x) dx + C_1 \right\}^2}. \quad (11)$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что ЛОДУ (1) можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной

$$z = \bar{C} \int \sqrt{g(x)} dx, \quad (12)$$

а учитывая (11)

$$z = \bar{C} \ln \left| C_3 \int W(x) dx + C_1 \right|. \quad (13)$$

II. Выберем в качестве

$$r(x) = p(x) \frac{y'(x)}{y(x)}, \quad \frac{r'(x)}{r(x)} = \alpha(x). \quad (14)$$

В этом случае

$$\alpha(x) = - \frac{t^2 + (p - \frac{p'}{p})t + g}{t}$$

или

$$t^2 + \left(p - \frac{p'}{p} + \alpha \right) t + g = 0. \quad (15)$$

Корни этого квадратного уравнения

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(p - \frac{p'}{p} + \alpha \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha \right)^2 - 4g} \quad (16)$$

и фундаментальная система решений ЛОДУ (1)

$$y_1(x) = e^{\int t_1(x) dx}; \quad y_2(x) = e^{\int t_2(x) dx}.$$

На функцию $\alpha(x)$ необходимо наложить условие

$$C = e^{-\int \alpha(x) dx} p \sqrt{\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha \right)^2 - 4g} \quad (17)$$

или

$$C^* = e^{-2\int \alpha(x) dx} p^2 \left[\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha \right)^2 - 4g \right] \neq 0. \quad (18)$$

В качестве $\alpha(x)$ можно выбрать

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \frac{(p^2 g)'}{p^2 g}. \quad (19)$$

Условие (18) запишем в виде дифференциального уравнения Бернулли

$$\frac{(p^2 g)'}{p^2 g} + 2\left(p - \frac{p'}{p}\right) = \frac{C_1}{p^2} \sqrt{p^2 g}, \quad (20)$$

решая которое относительно $g(x)$, получим

$$g(x) = \frac{C_3 W^2(x)}{\left(C_1 \int \frac{W(x)}{p(x)} dx + C_2\right)^2}. \quad (21)$$

III. Представим $r(x)$ в виде

$$r(x) = p(x) \frac{y'(x)}{y(x)} + g(x), \quad (22)$$

или что равносильно

$$r(x) = -\frac{y''(x)}{y(x)}. \quad (23)$$

Квадратное алгебраическое уравнение в этом случае имеет вид

$$t^2 + \left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)t + g - \frac{p'}{p} + \alpha \frac{g}{p} = 0. \quad (24)$$

Корни уравнения (24)

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)^2 - 4 \left(g - \frac{g'}{p} + \alpha \frac{g}{p}\right)}. \quad (25)$$

При этом уравнение, связывающее функции $\alpha(x)$, $p(x)$ и $g(x)$, следующее

$$e^{-\int \alpha(x) dx} p \sqrt{\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)^2 - 4 \left(g - \frac{g'}{p} + \alpha \frac{g}{p}\right)} = C. \quad (26)$$

В этом случае мы имеем больше вариантов условий на функцию $\alpha(x)$.

а)
$$p - \frac{p'}{p} + \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{p'}{p} - p. \quad (27)$$

Подставляя (27) в уравнение (26), получим

$$\frac{1}{W(x)} \sqrt{\frac{4}{p} \left(g' - \frac{p'}{p} g\right)} = C \quad \text{или} \quad g' - \frac{p'}{p} g = C^* W^2 p,$$

которое является линейным относительно $g(x)$, и, решая которое, имеем

$$g(x) = p \left(C_1 \int W^2(x) dx + C_2 \right). \quad (28)$$

б)
$$\alpha(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}, \quad \sqrt{p^2 + 4 \left(\frac{g'}{p} - g \left(1 + \frac{p'}{p^2} \right) \right)} = C,$$

$$p^2 + 4 \left(\frac{g'}{p} - g \left(1 + \frac{p'}{p^2} \right) \right) = C^*. \quad (29)$$

Решая линейное уравнение (29), получим

$$g(x) = \frac{p}{W} \left[C_1 + \frac{1}{4} \int W(x) (C^* - p^2) dx \right]. \quad (30)$$

в)
$$\alpha = -p;$$

$$\frac{p}{W} \sqrt{\left(\frac{p'}{p} \right)^2 + 4 \frac{g'}{p}} = C; \quad \left(\frac{p'}{p} \right)^2 + 4 \frac{g'}{p} = \frac{C^* W^2}{p^2};$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} \left(C^* \frac{W^2(x)}{p(x)} - \frac{(p'(x))^2}{p(x)} \right); \quad (31)$$

$$g(x) = \frac{1}{4} \int \left(C^* \frac{W^2(x)}{p(x)} - \frac{(p'(x))^2}{p(x)} \right) dx + C_1. \quad (32)$$

IV. Можно представить $r(x)$ в виде

$$r(x) = \frac{1}{y(x)y'(x)}. \quad (33)$$

Квадратное уравнение в этом случае будет

$$t^2 - (p - \alpha)t - g = 0 \quad (34)$$

и его решение

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}(p - \alpha) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(p - \alpha)^2 + 4g}. \quad (35)$$

Уравнение, связывающее функции $\alpha(x)$, $p(x)$ и $g(x)$ в этом случае:

или
$$e^{\int (p-\alpha) dx} \sqrt{(p-\alpha)^2 + 4g} = C e^{-\int (p-\alpha) dx}$$

$$e^{\int (4p-2\alpha) dx} \sqrt{(p-\alpha)^2 + 4g} = C^*. \quad (36)$$

Задавая определенные выражения для $\alpha(x)$, мы будем получать конкретные дифференциальные или трансцендентные уравнения.

Рассмотрим сведение ЛОДУ (1) к интегро-дифференциальным уравнениям. Для этого уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{W(x)}{y'(x)y(x)} + \frac{p(x)W(x)}{y''(x)y(x)} + \frac{g(x)W(x)}{y''(x)y'(x)} = 0. \quad (37)$$

Дифференцируя каждое слагаемое уравнения (37), и учитывая уравнение (1) и его производную, а затем интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \frac{W}{yy'} &= \int W \left[\frac{g}{(y')^2} - \frac{1}{y^2} \right] dx, \\ \frac{Wp}{y'y''} &= \int W \left[\frac{g}{y^2} - \frac{gp' - g'p + g^2}{(y'')^2} \right] dx, \\ \frac{Wg}{y'y''} &= \int W \left[\frac{gp' - g'p + g^2}{(y'')^2} - \frac{g}{(y')^2} \right] dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x), \quad y'(x) = y_1'(x), \quad y''(x) = y_1''(x), \\ y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{W(x)dx}{y_1^2(x)}, \quad y_2'(x) = y_1'(x) \int \frac{W(x)g(x)dx}{[y_1^2(x)]^2}, \\ y_2''(x) &= y_1''(x) \int \frac{W(x)[g(x)p'(x) - g'(x)p(x) + g^2(x)]dx}{[y_1''(x)]^2}, \end{aligned}$$

то получим хорошо известные формулы

$$W(x) = \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{array} \right|; \quad -W(x)p(x) = \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{array} \right|; \quad W(x)g(x) = \left| \begin{array}{cc} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{array} \right|.$$

Выводы.

1. Предложенную методику можно успешно использовать при решении уравнения Риккати и систем двух линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Незначительно видоизменив предложенную методику можно найти решения ЛОДУ третьего и четвертого порядков.

Литература

1. Давыдов И. А., Павленко А. М. Нестационарная теплопроводность слоистых тел // Математичні проблеми технічної механіки (матеріали конференції), Дніпродзержинськ, 2003. – 48-52 с.

© Братута Є.Г., Павленко А.М., Кошлак А.В., 2007