

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Б.М. Киркач, О.Б. Киркач, В.Л. Хавін,
В.І. Конохов, С.Ю. Погорілов

ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ. МЕТОД СИЛ

Навчально-методичний посібник з розділу курсу «Опір матеріалів»
для студентів машинобудівних спеціальностей

ЗАТВЕРЖДЕНО
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №1 від 22.06.2017 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2017

УДК 539.3/.6
К 43

Р е ц е н з е н т и:

С.А. Вамболь, д-р техн. наук, проф., зав. каф. прикладної механіки
Національного університету цивільного захисту України,
М.А. Ткачук, д-р техн. наук, проф., зав. каф. теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин НТУ «ХПІ»

Авторський колектив:

Б.М. Киркач, к-т техн. наук, професор, О.Б. Киркач, ст. викладач,
В.Л. Хавін, к-т техн. наук, професор, зав. каф. механіки суцільних
середовищ та опору матеріалів НТУ «ХПІ»,
В.І. Конохов, к-т техн. наук, доцент,
С.Ю. Погорілов, к-т техн. наук, доцент

Киркач Б.М.

К 43 Енергетичні методи опору матеріалів. Метод сил: навч.-метод. посіб.
/ Б.М. Киркач, О.Б. Киркач, В.Л. Хавін та ін. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. –
110 с.

ISBN

Викладаються основи енергетичних методів визначення переміщень в пружних системах і, зокрема, методу сил, як одного з основних інструментів для розкриття статичної невизначуваності в стрижневих конструкціях. Наводяться варіанти схем та вихідні дані розрахунково-проектувальних завдань для студентів, надаються методичні вказівки щодо їх виконання, розглядаються приклади розв'язання задач.

Призначено для студентів машинобудівних спеціальностей.

Іл. 89. Табл. 9. Бібліогр. 4 назви.

УДК 539.3/.6

ISBN

© Б.М. Киркач, О.Б. Киркач, В.Л. Хавін,
В.І. Конохов, С.Ю. Погорілов, 2017

Вступ

Поряд із розрахунками на міцність, оцінка жорсткості конструкції або її складових елементів є не менш важливим завданням опору матеріалів. При цьому у більшості випадків розрахункові схеми конструкцій є статично невизначуваними, тобто такими, у яких внутрішні зусилля не можуть бути визначені лише з умов статичної рівноваги. Для розрахунку переміщень в таких конструкціях треба спочатку «розкрити» їх статичну невизначуваність.

Рішення таких задач потребує вміння визначати переміщення і кути повороту у відповідних перерізах конструкції, що у свою чергу є невід'ємною складовою метода сил, який може бути застосованим для розкриття статичної невизначуваності.

Навчально-методичний посібник «Енергетичні методи опору матеріалів. Метод сил» є складовою частиною серії видань кафедри механіки суцільних середовищ та опору матеріалів НТУ «ХПІ». Він призначений для методичного забезпечення розрахункових та розрахунково-проектувальних робіт студентів по спеціальностям "Прикладна механіка", "Галузеве машинобудування", "Енергетичне машинобудування", "Залізничний транспорт", "Автомобільний транспорт" тощо.

Перша частина посібника присвячена розрахункам переміщень на основі теореми Кастіліано, інтеграла Мора і способом перемноження епюр по Верещагіну. Розглядаються приклади розрахунків плоскої балки і ламаного бруса. Сформульовані завдання для студентських робіт.

У другій частині посібника викладається сутність методу сил, надається система його канонічних рівнянь. Розглядаються можливості застосування методу сил для вирішення задач розтягання-стискання, кручення, згинання балок та рам. Надаються завдання для розрахункових робіт студентів.

1 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

1.1 Потенційна енергія пружної деформації стрижневих систем

Зовнішні сили, які прикладені до пружного тіла і викликають зміну геометрії тіла, здійснюють роботу W на відповідних переміщеннях. Одночасно з цим в пружному тілі накопичується внутрішня потенційна енергія його деформації U . При дії динамічних зовнішніх навантажень частина роботи зовнішніх сил перетворюється на кінетичну енергію руху часток тіла K . Приймаючи енергетичний стан системи до моменту дії даних сил рівним нулю, і в умовах відсутності розсіювання енергії, рівняння балансу енергії можна записати в такому вигляді:

$$W = U + K. \quad (1.1)$$

При дії статичних навантажень $K = 0$, отже

$$W = U. \quad (1.2)$$

Це означає, що при статичному навантаженні робота зовнішніх сил повністю перетворюється в потенційну енергію деформації. При розвантаженні тіла здійснюється робота за рахунок потенційної енергії деформації, накопиченої тілом. Таким чином, пружне тіло є акумулятором енергії. Ця властивість пружних тіл широко використовується в техніці, наприклад в пружинах годинникових механізмів, ресорах та ін.

1.1.1 Потенційна енергія деформації при розтяганні-стисканні

У випадку простого розтягання (стискання) отримання необхідних розрахункових залежностей для потенційної енергії деформації може бути здійснене на прикладі задачі, зображеної на рис. 1.1. Внаслідок дії зовнішньої розтягальної сили F подовження стрижня становить Δl . Відповідно до закону Гука залежність величини подовження від сили є лінійною функцією, як показано на графіку (рис. 1.1).

Кожному значенню сили F відповідає певне подовження стрижня Δl , а мале збільшення сили dF викликає відповідне збільшення подовження $d(\Delta l)$. Елементарна робота сили на прирості подовження становить:

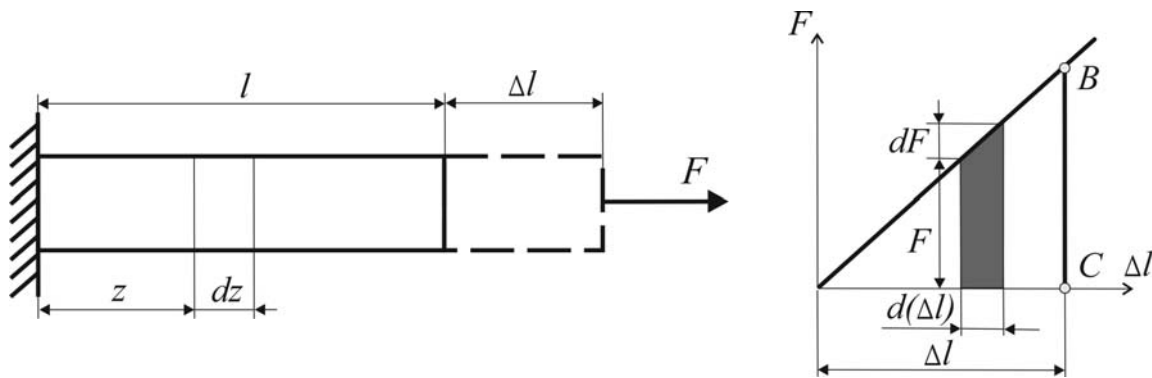


Рис. 1.1. Визначення роботи поздовжньої сили

$$dW = (F + dF) \cdot d(\Delta l) = F \cdot d(\Delta l) + dF \cdot d(\Delta l) . \quad (1.3)$$

Другим доданком в (1.3) внаслідок малості можна знехтувати, отже:

$$dW = F \cdot d(\Delta l) . \quad (1.4)$$

Повна робота дорівнює сумі елементарних робіт, що при лінійній залежності сили від переміщення відповідає площі трикутника OCB (рис. 1.1). З урахуванням (1.2) це дає формулу для потенційної енергії пружної деформації стрижня від дії осової сили F :

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l . \quad (1.5)$$

Виключимо з (1.5) Δl , скориставшись відомою формулою $\Delta l = \frac{Fl}{EA}$:

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} F \frac{Fl}{EA} = \frac{F^2 l}{2EA} , \quad (1.6)$$

де l – довжина стрижня, A – площа його поперечного перерізу, E – модуль пружності матеріалу стрижня.

Для стрижня на рис. 1.1 формулу (1.6) можна легко переписати в термінах внутрішнього поздовжнього зусилля N , що, вочевидь, є незмінним і дорівнює зовнішній розтягальній силі F , тобто $N = F$. В результаті отримаємо формулу для потенційної енергії розтягання-стискання стриж-

ня постійної жорсткості $EA = \text{const}$ при рівномірному навантаженні $N = \text{const}$:

$$U = \frac{N^2 l}{2EA}. \quad (1.7)$$

Якщо поздовжня сила та/або жорсткість змінюються вздовж осі стрижня, на базі формули (1.7) може бути записана потенційна енергія деформації елементарної ділянки dz стрижня (рис. 1.1):

$$dU = \frac{N^2(z) dz}{2EA(z)}, \quad (1.8)$$

Потенційна енергія деформації всього стрижня визначиться сумою енергій усіх його малих ділянок, тобто:

$$U = \int_0^l dU = \int_0^l \frac{N^2(z) dz}{2EA(z)}. \quad (1.9)$$

Одиницею потенційної енергії деформації є ньютон-метр (Нм) або джоуль (Дж), $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Нм}$.

1.1.2 Потенційна енергія деформації при крученні

Потенційна енергія пружної деформації вала довжини l при крученні розраховується за формулою, подібною до (1.9):

$$U = \int_0^l \frac{M_k^2(z)}{2GI_k(z)} dz, \quad (1.10)$$

де M_k – крутний момент, G – модуль зсуву матеріалу вала, I_k – момент кручення його поперечного перерізу, l – довжина вала.

Якщо крутний момент M_k і жорсткість вала на кручення GI_k незмінні, то формула (1.10) відповідно спрощується:

$$U = \frac{M_k^2 l}{2GI_k}. \quad (1.11)$$

1.1.3 Потенційна енергія деформації при згинанні

Потенційна енергія пружних деформацій балки при чистому згинанні визначається роботою згинального моменту M_x на відповідних кутових переміщеннях $d\theta$:

$$dU = \frac{1}{2} M_x d\theta. \quad (1.12)$$

Як відомо, при чистому згинанні балки справедливі формули:

$$d\theta = \frac{dz}{\rho}; \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (1.14)$$

в яких ρ – радіус кривизни зігнутої осі балки; I_x – момент інерції її поперечного перерізу; E – модуль пружності матеріалу.

Підставивши (1.13) та (1.14) в (1.12), одержимо остаточно:

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x(z)}. \quad (1.15)$$

У випадку поперечного згинання в перерізах балки, поряд із згинальним моментом M_x , діє поперечна сила Q_y , що здійснює роботу на відповідних лінійних переміщеннях зсуву. Внесок останньої у потенційну енергію пружної деформації балки визначається за формулою

$$U = k_y \int_0^l \frac{Q_y^2(z) dz}{2GA(z)}, \quad (1.16)$$

де G – модуль зсуву матеріалу балки; A – площа її поперечного перерізу; k_y – безрозмірний коефіцієнт, який залежить від форми перерізу. Наприклад, для прямокутного перерізу $k_y = 6/5$, для круглого – $k_y = 10/9$, для тонкостінної труби $k_y = 2$ і т.д.

Таким чином, при згинанні потенційна енергія пружної деформації задається формулою

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2(z)dz}{2EI_x(z)} + k_y \int_0^l \frac{Q_y^2(z)dz}{2GA(z)}. \quad (1.17)$$

1.1.4 Потенційна енергія деформації стрижня в загальному випадку його навантаження

У загальному випадку навантаження бруса в його поперечних перерізах виникають шість внутрішніх силових факторів: N , M_x , M_y , Q_x , Q_y , M_κ , кожен з яких здійснює роботу на відповідних переміщеннях. Тому для бруса завдовжки ℓ з лінійно-пружного матеріалу потенційна енергія деформації визначається формулою

$$U = \int_0^l \left[\frac{M_x^2(z)}{2EI_x(z)} + \frac{M_y^2(z)}{2EI_y(z)} + \frac{M_\kappa^2(z)}{2GI_\kappa(z)} + \frac{N^2(z)}{2EA(z)} + \frac{k_x Q_x^2(z)}{2GA(z)} + \frac{k_y Q_y^2(z)}{2GA(z)} \right] dz, \quad (1.18)$$

що являє собою суму (суперпозицію) потенційних енергій розтягання-стискання, кручення та двох згинань в головних площинах бруса.

Якщо стрижнева система складається з декількох елементів, то інтегрування (1.18) зручно проводити в межах ділянок, асоційованих з кожним із них, з подальшим підсумуванням результатів для отримання потенційної енергії деформації всієї системи:

$$U = \sum_i \int_0^{l_i} \left[\frac{M_x^2(z_i)}{2E_i I_{xi}(z_i)} + \frac{M_y^2(z_i)}{2E_i I_{yi}(z_i)} + \frac{M_\kappa^2(z_i)}{2G_i I_{\kappa i}(z_i)} + \frac{N^2(z_i)}{2E_i A_i(z_i)} + \frac{k_x Q_x^2(z_i)}{2G_i A_i(z_i)} + \frac{k_y Q_y^2(z_i)}{2G_i A_i(z_i)} \right] dz_i, \quad (1.19)$$

де l_i – довжина i -ї ділянки системи; $E_i I_{xi}$, $E_i I_{yi}$, $G_i I_{\kappa i}$, $E_i A_i$, $G_i A_i$ – жорсткості цієї ділянки на згинання у двох головних площинах, кручення, розтягання-стискання та зсув відповідно.

Енергії розтягання-стискання і зсуву, як правило, менше енергій згинання і кручення. Разом з тим можливі випадки (наприклад, позацентрове стискання), коли енергії розтягання і згинання мають однаковий порядок.

1.2. Теорема Кастільяно

Теорема Кастільяно доводить, що переміщення точки K прикладання узагальненої сили F у напрямку її дії дорівнює частинній похідній від потенційної енергії деформації по цій силі:

$$\Delta_{KF} = \frac{\partial U}{\partial F}. \quad (1.20)$$

Теорема Кастільяно може бути використана для визначення узагальнених переміщень точок пружної системи, причому не тільки тих, в яких прикладені зовнішні сили, і не тільки у напрямках цих сил. Для визначення узагальненого переміщення (лінійного або кутового) в точці, де за умови задачі відсутня зовнішня сила або момент, необхідно прикласти в цьому місці відповідне фіктивне навантаження (силу або момент). Далі слід записати вираз для потенційної енергії деформації системи, враховуючи усі сили, включно із фіктивною, а потім взяти від цього виразу похідну за фіктивною силою. В одержаному виразі фіктивне навантаження необхідно прийняти рівним нулю – результат являтиме собою шукане переміщення.

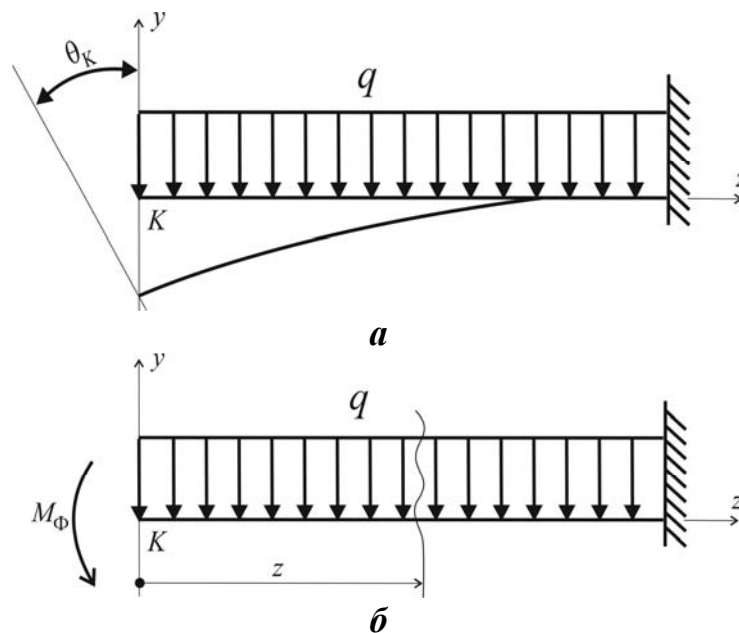


Рис. 1.2. Визначення переміщень за теоремою Кастільяно:
a – схема навантаження балки та шукане переміщення θ_K ;
б – повне навантаження із доданим фіктивним моментом M_Φ

Наприклад, застосуємо теорему Кастільяно для визначення кута повороту θ_K поперечного перерізу в точці K жорстко затисненої балки, навантаженої розподіленим навантаженням q (рис. 1.2 а). Оскільки шукане переміщення є кутовим, прикладемо в точці K балки фіктивний момент M_Φ (рис. 1.2 б). Згинальний момент у довільному перерізі такої балки дорівнює:

$$M_x(z) = -qz \frac{z}{2} - M_\Phi.$$

Потенційна енергія деформації при згинанні балки (внеском від поперечної сили нехтуємо як незначним у порівнянні з внеском від згинального моменту) обчислюється за формулою:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2(z)}{EI_x} dz = \frac{1}{2EI_x} \int_0^l \left(-\frac{qz^2}{2} - M_\Phi \right)^2 dz = \frac{1}{2EI_x} \left(\frac{q^2 l^5}{20} + qM_\Phi \frac{l^3}{3} + M_\Phi^2 l \right).$$

По теоремі Кастільяно кут повороту перерізу K :

$$\theta_K = \frac{\partial U}{\partial M_\Phi} = \frac{1}{2EI_x} \left(\frac{ql^3}{3} + 2M_\Phi l \right),$$

звідки, приймаючи $M_\Phi = 0$, остаточно знайдемо:

$$\theta_K = \frac{ql^3}{6EI_x}.$$

1.3. Інтеграл Мора

Як зазначалося вище, теорему Кастільяно можна також застосовувати для визначення лінійних та кутових переміщень перерізів, в яких відсутні зовнішні сили або моменти. Для цього в перерізі, в тому напрямку, в якому визначається переміщення, прикладається відповідне фіктивне навантаження Φ . Шукане переміщення становить часткову похідну по Φ від потенційної енергії системи під сумісною дією зовнішнього (F) та фіктивного (Φ) навантажень після підстановки в неї $\Phi = 0$.

Розглянемо сказане вище на прикладі згинання балки. За принципом суперпозиції згинальний момент $M(z_i)$ у довільному перерізі z_i i -ї ділянки балки можна представити у вигляді суми моментів $M_F(z_i)$ і $M_\Phi(z_i)$ від дійсного та фіктивного навантажень відповідно:

$$M(z_i) = M_F(z_i) + M_\Phi(z_i). \quad (1.21)$$

В пружних системах внутрішні силові фактори лінійно залежать від зовнішнього навантаження, тому можемо записати:

$$M_\Phi(z_i) = \Phi \cdot \bar{M}(z_i), \quad (1.22)$$

де Φ – величина фіктивної узагальненої сили; $\bar{M}(z_i)$ – згинальний момент у довільному перерізі z_i i -ї ділянки балки від одиничної узагальненої фіктивної сили $\bar{X} = 1$, що її точка прикладання та напрямок дії відповідають шуканому переміщенню.

Поєднуючи (1.21) та (1.22), отримуємо:

$$M(z_i) = M_F(z_i) + \Phi \bar{M}(z_i). \quad (1.23)$$

Тоді повна потенціальна енергія деформації балки (без урахування впливу поперечної сили):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_i \int_{l_i} \frac{M^2(z_i)}{E_i I_i(z_i)} dz_i = \frac{1}{2} \sum_i \int_{l_i} \frac{1}{E_i I_i(z_i)} [M_F(z_i) + \Phi \bar{M}(z_i)]^2 dz_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \int_{l_i} \frac{1}{E_i I_i(z_i)} [M_F^2(z_i) + 2M_F(z_i)\Phi \bar{M}(z_i) + \Phi^2 \bar{M}^2(z_i)] dz_i. \end{aligned} \quad (1.24)$$

За теоремою Кастільяно здобуваємо вираз для переміщення:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi} = \sum_i \int_{l_i} \frac{1}{E_i I_i(z_i)} [2M_F(z_i)\bar{M}(z_i) + \Phi \bar{M}^2(z_i)] dz_i. \quad (1.25)$$

Оскільки сила Φ є фіктивною, покладемо в (1.25) $\Phi = 0$ і отримемо формулу *інтеграла Мора* для визначення переміщень при згинанні:

$$\Delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_F(z_i) \overline{M}(z_i)}{E_i I_i(z_i)} dz_i. \quad (1.26)$$

Аналогічно можуть бути розглянуті інші прості види деформування. Зокрема, для стрижневих систем, в яких діють тільки поздовжні сили (наприклад таких, як ферми), формула, аналогічна (1.26), називається *інтегралом Максвелла* та має вигляд

$$\Delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{N_F(z_i) \overline{N}(z_i)}{E_i A_i(z_i)} dz_i. \quad (1.27)$$

У загальному випадку просторового деформування стрижневої системи формула *інтеграла Мора* виглядає таким чином:

$$\Delta = \sum_i \left\{ \int_{l_i} \frac{M_x(z_i) \overline{M}_x(z_i)}{E_i I_{xi}(z_i)} dz_i + \int_{l_i} \frac{M_y(z_i) \overline{M}_y(z_i)}{E_i I_{yi}(z_i)} dz_i + \int_{l_i} \frac{M_\kappa(z_i) \overline{M}_\kappa(z_i)}{G_i I_{\kappa i}(z_i)} dz_i + \right. \\ \left. + \int_{l_i} \frac{N(z_i) \overline{N}(z_i)}{E_i A_i(z_i)} dz_i + k_x \int_{l_i} \frac{Q_x(z_i) \overline{Q}_x(z_i)}{G_i A_i(z_i)} dz_i + k_y \int_{l_i} \frac{Q_y(z_i) \overline{Q}_y(z_i)}{G_i A_i(z_i)} dz_i \right\}. \quad (1.28)$$

У формулі (1.28) в чисельниках підінтегральних виразів на i -й ділянці системи перемножуються розподіли внутрішніх силових факторів:

- $M_x, M_y, M_\kappa, N, Q_x, Q_y$ – від дійсного зовнішнього навантаження (буква F в нижньому індексі зазвичай не вказується);
- $\overline{M}_x, \overline{M}_y, \overline{M}_\kappa, \overline{N}, \overline{Q}_x, \overline{Q}_y$ – від фіктивного одиничного навантаження, прикладеного у напрямку переміщення, що обчислюється.

На відміну від перших, другі викликані безрозмірним умовним навантаженням, а отже, і вимірюються в інших одиницях, ніж «звичайні» внутрішні силові фактори. Зокрема, на підставі (1.23) нескладно бачити, що розмірність внутрішнього зусилля від одиничного навантаження має дорівнювати «звичній» стандартній розмірності цього силового фактору,

віднесеній до розмірності фіктивного зусилля. Тому, наприклад, внутрішній момент від одиничної сили вимірюється в метрах, момент від одиничного моменту є безрозмірним і так далі.

Треба зазначити, що не всі складові формули (1.28) рівнозначні. Якщо стрижнева система «працює» на згинання та/або кручення, то внесками від розтягання-стискання (поzdовжньої сили N) та зсуву (від поперечних сил Q_x, Q_y) зазвичай нехтують.

Розглянемо декілька прикладів застосування інтеграла Мора для визначення переміщень.

Приклад 1. Обчислити вертикальне переміщення (прогин) та кут повороту перерізу B консольної балки, зображеної на рис. 1.3.

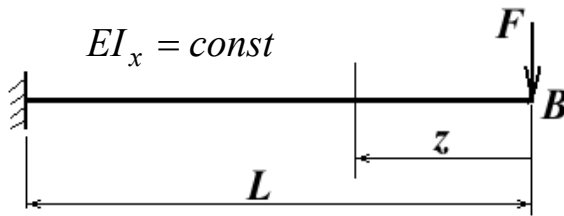


Рис. 1.3. Схема навантаження консольної балки

Згинальний момент від зовнішнього навантаження:

$$0 \leq z \leq L: M_x(z) = -Fz.$$

Для визначення вертикального переміщення V_B перерізу B прикладемо одиничну фіктивну силу в цьому перерізі (рис. 1.4). Внутрішній момент від фіктивної сили:

$$0 \leq z \leq L: \bar{M}_x(z) = -1 \cdot z.$$



Рис. 1.4. Консольна балка із фіктивною силою на кінці

Оскільки при поперечному згинанні з шести внутрішніх силових факторів відмінними від нуля є тільки два – момент M_x та сила Q_y ,

причому впливом останньої ми нехтуємо, то загальна форма інтеграла Мора (1.28) спрощується до (1.26) і ми отримуємо:

$$V_B = \int_0^L \frac{M_x(z) \bar{M}_x(z) dz}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \int_0^L (-Fz)(-1 \cdot z) dz = \frac{Fz^3}{3EI_x} \Big|_0^L = \frac{FL^3}{3EI_x}.$$

Щоб визначити кут повороту θ_B перерізу B , прикладемо фіктивний одиничний момент в цьому перерізі (рис. 1.5).

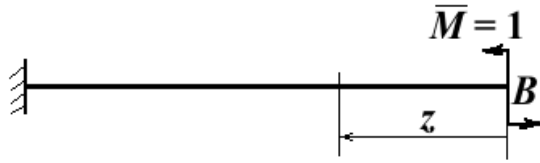


Рис. 1.5. Консольна балка з фіктивним моментом на кінці

Очевидно, що згинальний момент від нового одиничного навантаження становитиме:

$$0 \leq z \leq L: \bar{M}_x(z) = 1.$$

Таким чином, згідно з (1.26):

$$\theta_B = \int_0^L \frac{M_x(z) \bar{M}_x(z) dz}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \int_0^L (-Fz) \cdot 1 \cdot dz = - \frac{Fz^2}{2EI_x} \Big|_0^L = - \frac{FL^2}{2EI_x}.$$

Взагалі, додатне значення інтеграла Мора означає, що переміщення (кут повороту) відбувається у напрямку фіктивної сили (моменту), а від'ємне – що воно спрямоване у протилежний бік. У простому прикладі консольної балки, який був щойно розглянутий, напрямки переміщень по відношенню до відповідних фіктивних навантажень легко можна визначити одразу і вони, очевидно, узгоджуються з результатами.

Приклад 2. Визначити кут закручування перерізу B вала на рис. 1.6.

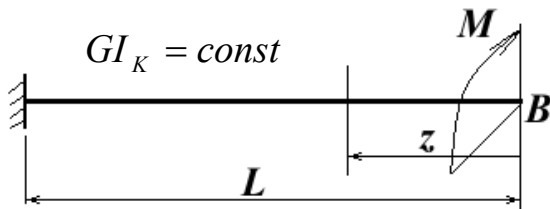


Рис. 1.6. Схема навантаження вала

Крутний момент від дії зовнішнього навантаження:

$$0 \leq z \leq L: M_\kappa(z) = M.$$

Щоб отримати кут закручування φ_B перерізу B , треба прикласти в цьому перерізі одиничний фіктивний момент (рис. 1.7). Крутний момент від фіктивного навантаження:

$$0 \leq z \leq L: \bar{M}_\kappa(z) = 1.$$

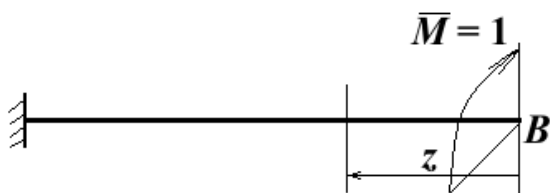


Рис. 1.7. Вал із прикладеним фіктивним моментом

окрім крутного моменту M_κ , відсутні, інтеграл Мора (1.28) набуває простого вигляду:

Через те що при крученні всі внутрішні силові фактори,

$$\varphi_B = \int_0^L \frac{M_{\kappa}(z) \overline{M}_{\kappa}(z) dz}{GI_{\kappa}} = \frac{1}{GI_{\kappa}} \int_0^L M \cdot 1 \cdot dz = \frac{M \cdot z}{GI_{\kappa}} \Big|_0^L = \frac{ML}{GI_{\kappa}}.$$

Позитивне значення результату вказує, що напрямок закручування співпадає з напрямком фіктивного моменту, негативне – що не співпадає. В розглянутому прикладі позитивний результат слід було очікувати, адже фіктивний момент був прикладений у бік зовнішнього навантаження.

Приклад 3. Знайти осьове зміщення перерізу B стрижня на рис. 1.8.

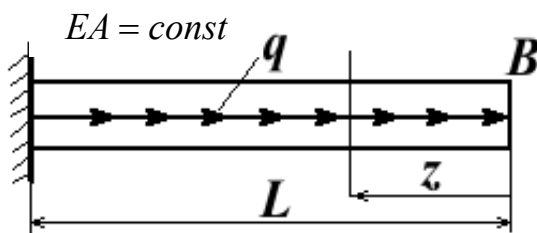


Рис. 1.8. Схема навантаження стрижня

Поздовжня сила від зовнішнього навантаження:

$$0 \leq z \leq L: N(z) = qz.$$

Для обчислення осевого переміщення w_B перерізу B прикладемо одиничне фіктивне зусилля у цьому перерізі (рис. 1.9). Відповідне внутрішнє осеве зусилля від цього навантаження:

$$0 \leq z \leq L: \overline{N}(z) = 1.$$

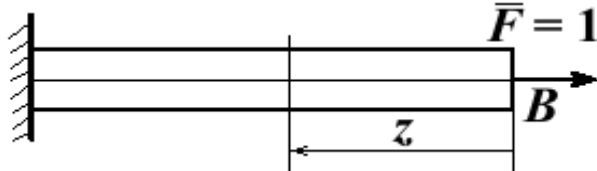


Рис. 1.9. Стержень із прикладеною фіктивною силою

Внаслідок того, що при розтяганні-стисканні єдиний внутрішній силовий фактор, відмінний від нуля, – це поздовжня

сила N , загальний вигляд інтеграла Мора (1.28) скорочується до форми (1.27) і ми отримуємо:

$$w_B = \int_0^L \frac{N(z) \overline{N}(z) dz}{EA} = \frac{1}{EA} \int_0^L qz \cdot 1 \cdot dz = \frac{q \cdot z^2}{2EA} \Big|_0^L = \frac{qL^2}{2EA}.$$

Позитивне значення результату вказує, що напрямок переміщення співпадає з напрямком фіктивного зусилля, негативне – що вони є протилежними. В розглянутій задачі додатний результат є очікуваним, адже ми заздалегідь спрямували фіктивну силу у бік зовнішнього навантаження.

1.4. Правило Верещагіна обчислення інтегралу Мора (спосіб «перемноження» епюр)

У більшості випадків практичні розрахунки переміщень та кутів повороту робляться для стержневих систем, які складаються з прямолінійних ділянок постійної жорсткості. Якщо кількість таких ділянок значна, то обчислення переміщень за допомогою інтеграла Мора стає обтяжливим, бо потребує складання аналітичних виразів підінтегральних функцій для кожного інтервалу системи з наступним їх інтегруванням.

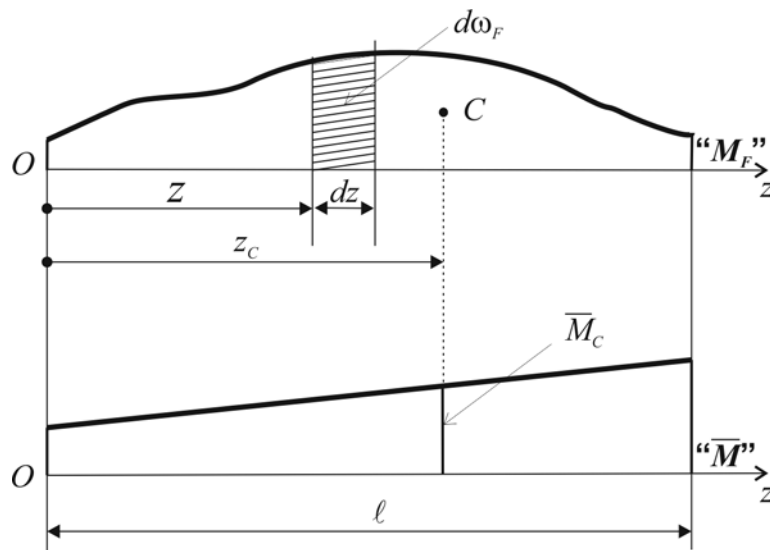


Рис. 1.10. Інтегрування за правилом Верещагіна

Проте визначення інтегралу Мора можна значно спростити, якщо використати той факт, що епюри внутрішніх силових факторів від одиничних фіктивних навантажень на прямолінійних ділянках є завжди лінійними або постійними, тобто описуються поліномами степеня не вище першого. Для цього на одній з таких ділянок розглянемо інтеграл такого вигляду:

$$I = \int_0^{\ell} M_F(z) \overline{M}(z) dz, \quad (1.29)$$

де ℓ – довжина ділянки; M_F та $\overline{M}$ – функції моментів від зовнішнього та одиничного фіктивного навантаження відповідно (рис. 1.10), які ми бу-

демо вважати безперервними та інтегрованими на даній ділянці, а функцію $\overline{M}$, до того ж, лінійною, тобто такою, що може бути подана у формі

$$\overline{M}(z) = kz + b. \quad (1.30)$$

Зважаючи на особливості співвідношення (1.29), його ще називають «перемноженням» епюр і скорочено позначають $[M_F \times \overline{M}]$.

Підставимо (1.30) в (1.29):

$$\begin{aligned} [M_F \times \overline{M}] &= \int_0^\ell M_F(z) \overline{M}(z) dz = \int_0^\ell M_F(z) (kz + b) dz = \\ &= k \int_0^\ell z M_F(z) dz + b \int_0^\ell M_F(z) dz. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Спираючись на геометричне трактування визначеного інтеграла, другий складник у правій частині формули (1.31) може бути записаний у вигляді

$$b \int_0^\ell M_F(z) dz = b \cdot \omega_F, \quad (1.32)$$

де ω_F – площа епюри моменту від зовнішнього навантаження M_F (так званої *вантажної епюри*).

Якщо зауважити, що добуток $M_F(z) dz$ являє собою малий елемент площі вантажної епюри $d\omega_F$ (рис. 1.10), нескладно побачити, що інтеграл у першому доданку правої частини (1.30) являє собою статичний момент цієї епюри відносно осі $O - O$, а отже, може бути представлений як добуток площі епюри ω_F та координати її центра ваги z_C (рис. 1.10):

$$k \int_0^\ell z M_F(z) dz = k \cdot \omega_F \cdot z_C. \quad (1.33)$$

Поєднуючи співвідношення (1.31) – (1.33), отримаємо

$$[M_F \times \bar{M}] = b\omega_F + k\omega_F z_c = \omega_F(b + kz_c) = \omega_F \bar{M}_c, \quad (1.34)$$

де $\bar{M}_c$ – це ордината епюри моменту від одиничного фіктивного навантаження $\bar{M}$ (або *одиничної епюри*), визначена під центром ваги епюри M_F .

Результат (1.34) є математичним виразом правила Верещагіна, що дозволяє замінити операцію інтегрування (1.29) графоаналітичним добутком площі вантажної епюри M_F на ординату одиничної епюри $\bar{M}$ під центром ваги першої епюри.

При застосуванні правила Верещагіна використовується алгебраїчне правило знаків. Якщо обидві епюри, що перемножуються, мають один знак, їх добуток вважається позитивним. Різні знаки вантажної і одиничної епюр дають негативний добуток.

Спосіб Верещагіна може бути застосованим до кожного з шести складових формули Мора (1.28), згідно з якою добутки вантажних та одиничних епюр слід додатково розділити на відповідні жорсткості, що їх ми будемо вважати незмінними в межах ділянок системи. В термінах перемноження епюр інтеграл Мора (1.28) набуває вигляду (буква F в нижніх індексах вантажних епюр зазвичай не ставиться):

$$\Delta = \sum_i \left\{ \frac{[M_{xi} \times \bar{M}_{xi}]}{E_i I_{xi}} + \frac{[M_{yi} \times \bar{M}_{yi}]}{E_i I_{yi}} + \frac{[M_{ki} \times \bar{M}_{ki}]}{G_i I_{ki}} + \right. \\ \left. + \frac{[N_i \times \bar{N}_i]}{E_i A_i} + k_x \frac{[Q_{xi} \times \bar{Q}_{xi}]}{G_i A_i} + k_y \frac{[Q_{yi} \times \bar{Q}_{yi}]}{G_i A_i} \right\}. \quad (1.35)$$

Для визначення переміщень за правилом Верещагіна потрібно:

1) побудувати епюри внутрішніх зусиль від зовнішнього навантаження. Якщо механічна система є статично невизначуваною, треба попередньо розкрити невизначуваність, наприклад за допомогою методу сил;

2) на базі заданої механічної системи утворити відповідну *одиничну систему* шляхом відкидання зовнішнього навантаження (а також зайвих зв'язків, якщо система є статично невизначуваною) та прикласти в точці, де потрібно визначити переміщення, одиничну силу у відповідному напрямку (або одиничний момент, якщо треба обчислити кут повороту);

3) побудувати епюри внутрішніх зусиль від прикладеного одиничного навантаження;

4) отримати добутки відповідних епюр з урахуванням жорсткості для кожного виду деформування;

5) згідно з формулою Мора (1.35) скласти отримані результати в алгебраїчну суму.

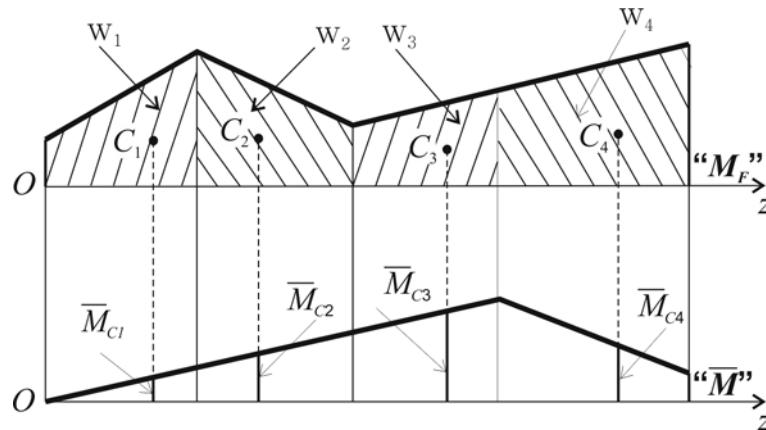


Рис. 1.11. Особливості застосування правила Верещагіна

Формула (1.35) відповідає загальному випадку складного деформування системи, що має декілька ділянок. У більш простих ситуаціях кількість ділянок може зменшуватись до однієї, а деякі (або більшість) зі складників – обертатись в нуль. Наприклад, при визначенні переміщення балки внаслідок згинання в площині yOz без урахування поперечних сил формула (1.35) спроститься до вигляду:

$$\Delta = \frac{[M_x \times \bar{M}_x]}{EI_x}. \quad (1.36)$$

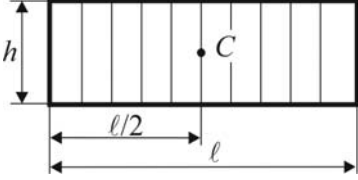
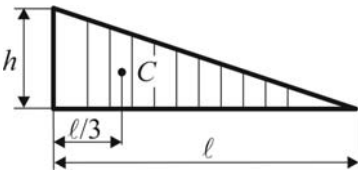
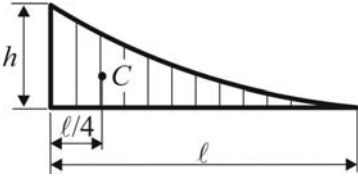
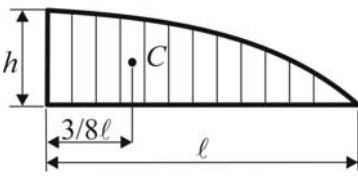
Якщо вантажна епюра має складну конфігурацію (як, наприклад, показано на рис. 1.11), для використання способу Верещагіна треба розділити обидві епюри M_F та $\bar{M}$ на такі інтервали, в межах яких закон зміни діючих моментів на обох епюрах є постійним. Тоді переміщення обчислюється як сума по інтервалам, що на прикладі формули (1.36) із урахуванням (1.34) можна проілюструвати так:

$$\Delta = \frac{1}{EI_x} \sum_{m=1}^N [M_{xm} \times \bar{M}_m] = \frac{1}{EI_x} \sum_{m=1}^N \omega_m \bar{M}_{Cm}, \quad (1.37)$$

де N – число інтервалів розбиття.

Якщо в межах інтервалу конфігурація епюри є геометрично складною, можна провести додаткове її розділення на прості складові (рис. 1.12), для яких нескладно визначити площу і положення центра ваги (таблиця 1.1). Розрахункова формула при цьому має вигляд, ідентичний (1.37), але N тепер задає кількість складових.

Таблиця 1.1 – Формули для обчислення простих епюр

Форма епюри	Площа епюри ω_F	Відстань до центра ваги епюри z_C
	$h\ell$	$\ell/2$
	$\frac{1}{2}h\ell$	$\frac{1}{3}\ell$
	$\frac{1}{3}h\ell$	$\frac{1}{4}\ell$
	$\frac{2}{3}h\ell$	$\frac{3}{8}\ell$

Треба зазначити, що дані останніх двох рядків таблиці 1.1 можна використовувати лише у тих випадках, коли максимальні значення моментів для параболічних епюр відповідають границі інтервалу. У разі, якщо парабола вантажної епюри моментів має екстремум в середині інтервалу, потрібне додаткове його розділення в точці екстремуму.

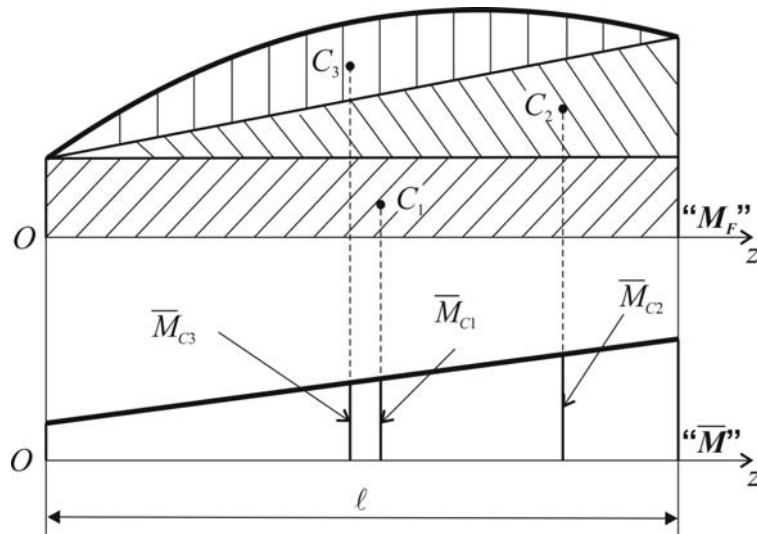


Рис. 1.12. Розділення складної епюри на прості елементи

У багатьох випадках вантажна епюра на інтервалі також задана лінійною функцією, як і одинична епюра. Тоді правило Верещагіна стає комутативним (тобто переставним, рис. 1.13):

$$\omega_F \cdot \bar{M}_c = \bar{\omega} \cdot M_{Fc}. \quad (1.38)$$

Ця властивість дозволяє у якості множника використовувати площу будь якої епюри. Але якщо вантажна епюра окреслена параболою, то площа ω_F повинна братися виключно від цієї епюри.

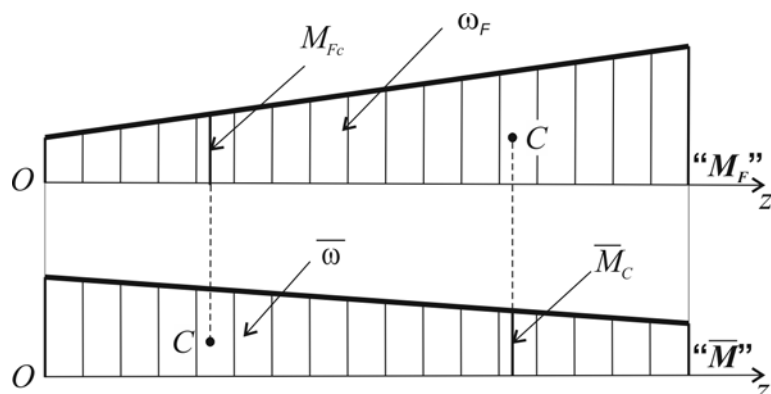


Рис. 1.13. Перестановність лінійних епюр у правилі Верещагіна

1.5. Використання формул чисельного інтегрування для «перемноження» епюр

За допомогою формул чисельного інтегрування класичну методику перемноження епюр можна значно спростити. Адже операції обчислення площі епюри та положення центра її ваги, проектування центра ваги на суміжну епюру із визначенням відповідної ординати замінюються співвідношеннями, які використовують лише довжину інтервалу ℓ і ординати епюр у фіксованих точках ділянки.

1.5.1. Формула трапеції

Ця формула призначена для застосування у випадках, коли вантажна епюра прямолінійна. Нагадаємо, що епюра одиничного навантаження прямолінійна завжди. Розглянемо як приклад перемноження двох лінійних епюр згинальних моментів (рис. 1.14).

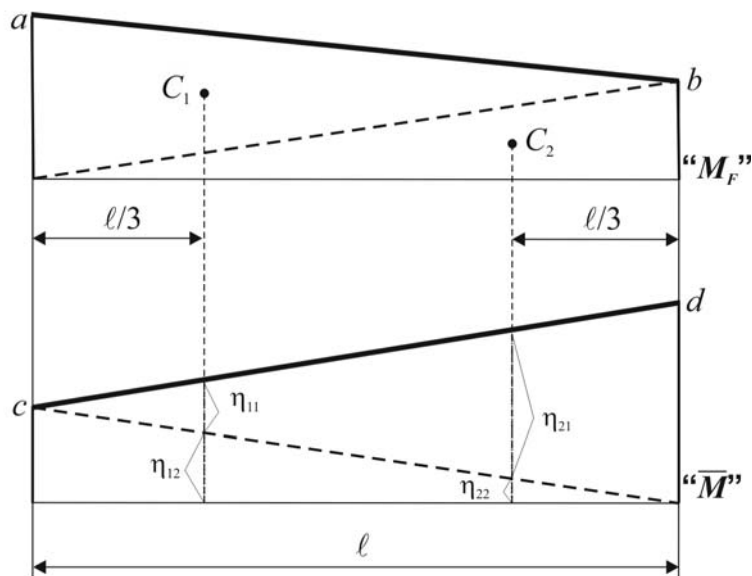


Рис. 1.14. Перемноження лінійних епюр

Розіб'ємо обидві епюри на трикутники (див. пунктирні лінії на рис. 1.14). Тоді площі складових епюри M_F становитимуть:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} a \cdot \ell, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} b \cdot \ell, \quad (1.39)$$

а відповідні ординати на епюрі $\overline{M}$ дорівнюватимуть (рис. 1.14):

$$\bar{M}_{c1} = \eta_{11} + \eta_{12} = \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}c, \quad \bar{M}_{c2} = \eta_{21} + \eta_{22} = \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}c. \quad (1.40)$$

Підставивши по правилу Верещагіна (1.39) та (1.40) у (1.37), отримаємо формулу трапеції:

$$\Delta = \left(\frac{\omega_1 \cdot \bar{M}_{c1} + \omega_2 \cdot \bar{M}_{c2}}{EI_x} \right) = \frac{\ell}{6EI_x} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (1.41)$$

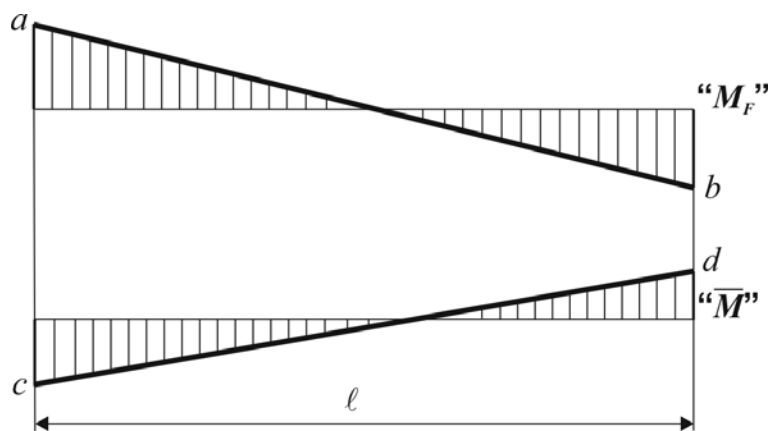


Рис. 1.15. Приклад використання формули трапеції

Таким чином, результат перемноження лінійних епюр, обчислений за формулою трапеції (1.41), буде точним. При цьому ординати епюр a, b, c, d повинні враховуватися зі своїми знаками. Наприклад, для епюр, зображених на рис. 1.15 $a > 0, d > 0, b < 0, c < 0$, отже, формулу трапеції слід записати у вигляді

$$\Delta = \frac{\ell}{6EI_x} (-2ac - 2bd + ad + bc).$$

1.5.2. Формула Сімпсона – Карнаухова

Ця формула застосовується в тому разі, якщо вантажна епюра має вигляд квадратичної або кубічної параболи, та потребує визначення трьох ординат на кожній з епюр – на лівій та правій границях та всередині інтервалу інтегрування (рис. 1.16).

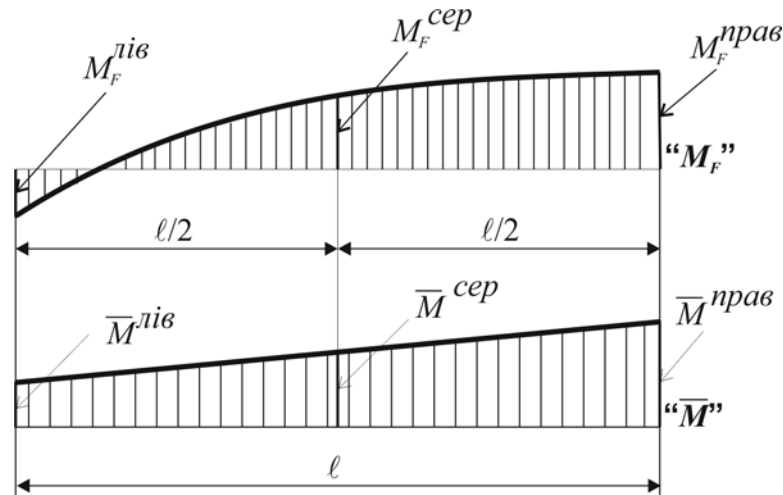


Рис. 1.16. Приклад використання формули Сімпсона – Карнаухова

Формула Сімпсона – Карнаухова має вигляд

$$\Delta = \frac{[M_F \times \bar{M}]}{EI_X} = \frac{\ell}{6EI_X} \left(\bar{M}^{\text{лів}} \cdot M_F^{\text{лів}} + 4\bar{M}^{\text{сер}} \cdot M_F^{\text{сер}} + \bar{M}^{\text{прав}} \cdot M_F^{\text{прав}} \right), \quad (1.42)$$

її результат є точним, якщо епюра M_F описується поліномом до третього степеня включно. Як і в формулі трапеції, при підстановці ординат епюр в (1.42) треба враховувати їхні знаки.

1.6. Теорема про взаємність робіт та переміщень

Спочатку введемо позначки для переміщень. Переміщення від дії зовнішніх зусиль будемо позначати Δ_{ik} , а від фіктивних одиничних – δ_{ik} . Перший індекс «i» позначає точку, яка зміщується. Другий індекс «k» визначає навантаження, що спричинило дане переміщення. Так, Δ_{ik} – це переміщення точки "i" від дії зовнішньої сили, прикладеної в точці "k".

Тепер розглянемо деформований стан однопрольотної балки від сумісної дії двох сил F_1 та F_2 , які, згідно з принципом суперпозиції, можна прикласти по черзі.

Спершу додамо сили в прямій послідовності, тобто спочатку в точці 1 прикладемо силу F_1 , а потім в точці 2 прикладемо силу F_2 – варіант I навантаження (рис. 1.17). У варіанті II навантаження змінимо порядок прикладання зусиль на зворотний (рис. 1.18).

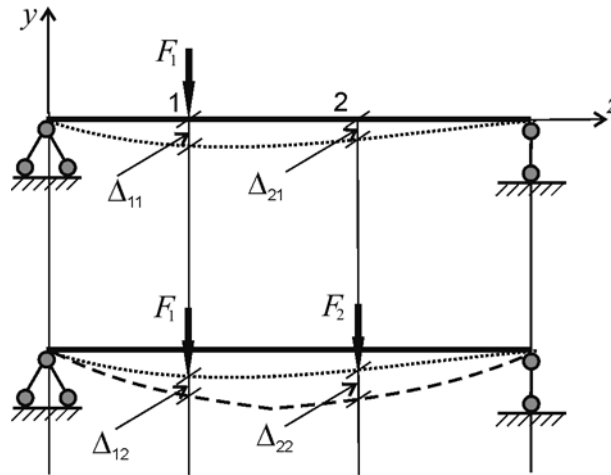


Рис. 1.17. Навантаження в прямій послідовності

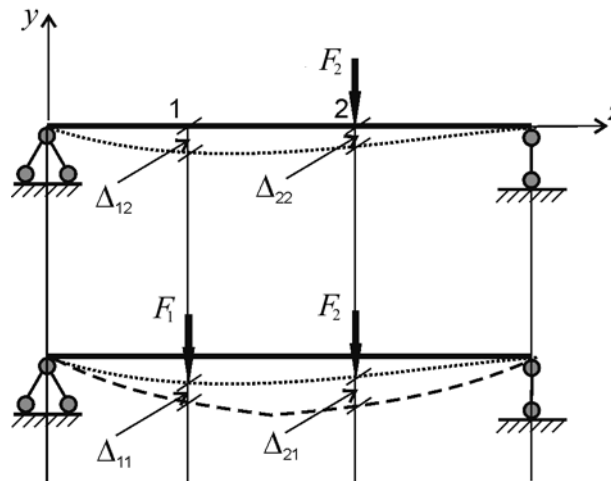


Рис. 1.18. Навантаження у зворотній послідовності

Деформований стан пружної системи не залежить від послідовності навантаження, так само як і потенційна енергія її деформації. Тому, згідно з (1.2), сумарні роботи зовнішніх сил в обох варіантах мають бути однаковими, тобто:

$$W_I = W_{II}. \quad (1.43)$$

В першому варіанті навантаження спочатку здійснюється робота

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_{11}, \quad (1.44)$$

що її виконує сила F_1 на власних переміщеннях Δ_{11} . В процесі прикладання сили F_2 додатково здійснюється робота

$$W_2 = \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta_{22} + F_1 \cdot \Delta_{12}, \quad (1.45)$$

перший складник якої відповідає роботі сили F_2 на власних переміщеннях Δ_{22} , а другий – роботі сили F_1 на додатковому переміщенні Δ_{12} точки 1, спричиненому появою сили F_2 . Тож сумарна робота в цьому випадку складає:

$$W_I = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta_{22} + F_1 \cdot \Delta_{12}. \quad (1.46)$$

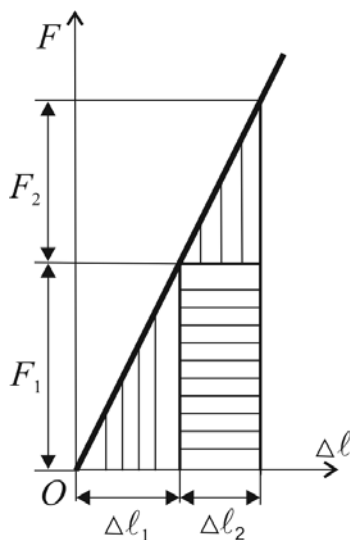


Рис. 1.19. Робота сил, прикладених послідовно

Відсутність коефіцієнта $1/2$ при останньому доданку формули (1.46) легко пояснити по рис. 1.19. *Робота сили при її прикладанні здійснюється на власних переміщеннях та обчислюється як площа трикутника (на рис. 1.19 відповідні трикутники для сил F_1 та F_2 заштриховані вертикально), тоді як робота вже діючої сили на переміщенні, викликаному появою іншої сили – як площа прямокутника (на рис. 1.19 це показано на прикладі сили F_1 , а відповідний прямокутник заштрихований горизонтально):*

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta \ell_1 + \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta \ell_2 + F_1 \cdot \Delta \ell_2.$$

З аналогічних міркувань для варіанта II навантаження маємо:

$$W_{II} = \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta_{22} + \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_{11} + F_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (1.47)$$

Порівнюючи вирази (1.46) і (1.47) на підставі (1.43), отримаємо:

$$F_1 \cdot \Delta_{12} = F_2 \cdot \Delta_{21}, \quad (1.48)$$

або у більш загальному вигляді

$$F_i \cdot \Delta_{ik} = F_k \cdot \Delta_{ki}, \quad (1.49)$$

що є математичним формулюванням теореми про взаємність робіт.

Якщо замість дійсного навантаження F_i та F_k в (1.49) підставити фіктивні одиничні сили $\overline{F}_i = \overline{F}_k = 1$, отримаємо твердження теореми про взаємність переміщень (теореми Бетті):

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (1.50)$$

1.7. Приклад розрахунку переміщень та кутів повороту при поперечному плоскому згинанні балки

Необхідно:

Для балки, зображеної на рис. 1.20, визначити переміщення (прогин) V_C та кут повороту θ_O в точках C та O відповідно, вважаючи жорсткість балки EI_x постійною.

Рішення:

Прогини та кути повороту в заданих точках конструкції можна визначити декількома способами:

- шляхом аналітичного обчислення інтеграла Мора;
- за правилом Верещагіна;
- із застосуванням формул чисельного інтегрування.

Щоб запобігти помилок в обчисленні, бажано скористатись, як мінімум, двома різними способами. Всі наведені прийоми визначення переміщень дають однакові кінцеві результати не тільки для конструкції в цілому, а й на кожній її ділянці.

Незалежно від обраного способу обчислення визначення переміщень потребує одночасно оперувати двома механічними системами: вихідною (або вантажною, рис. 1.20 а) та одиничною (що зображені на рис. 1.20 в та 1.20 д для прогину та кута повороту відповідно).

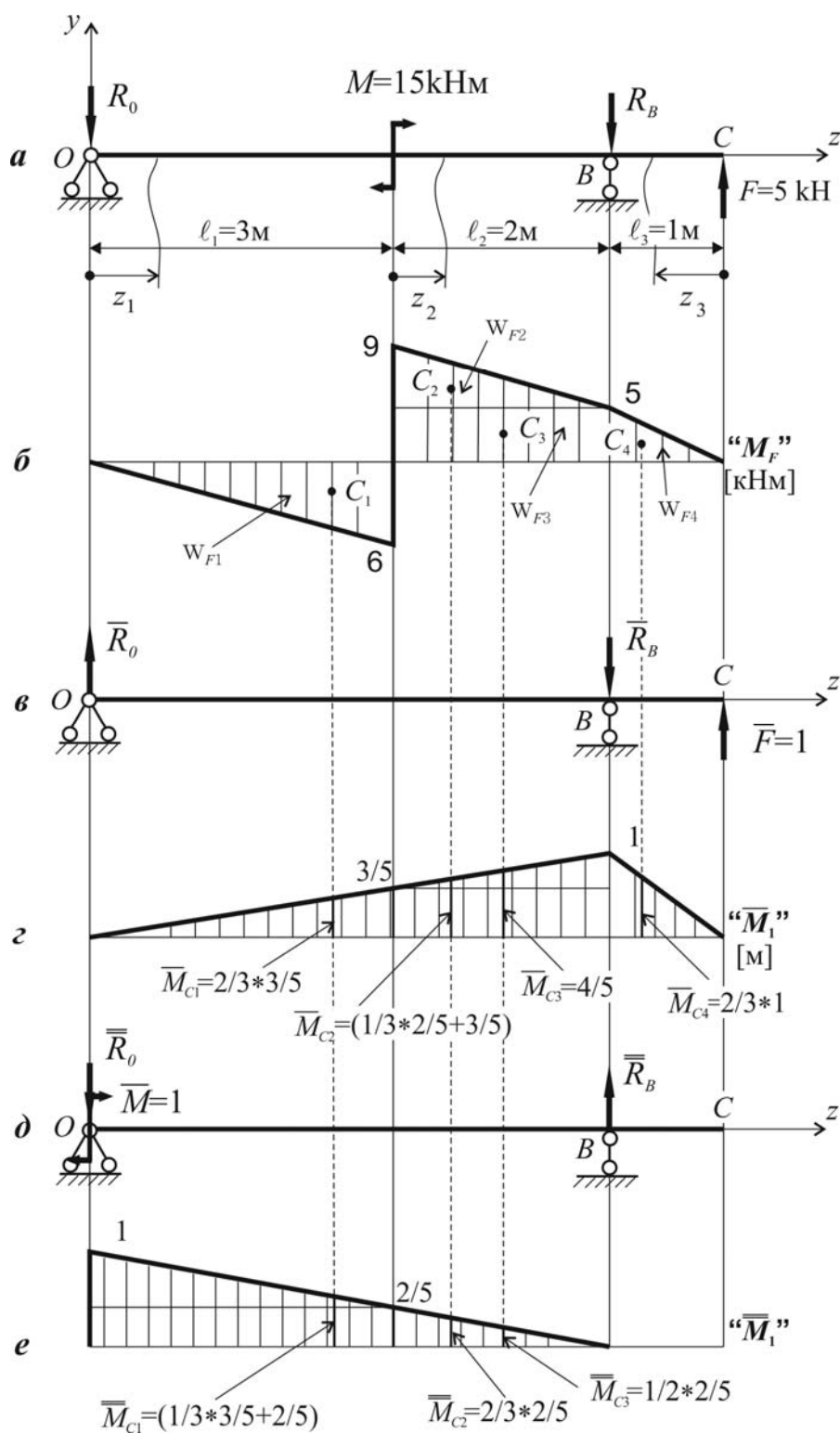


Рис. 1.20. Приклад розрахунку переміщень при плоскому згинанні:
a, б – відповідно вихідна система і вантажна епюра згинального моменту; *в, г* – відповідно одинична система та епюра для визначення прогину точки *C*; *д, е* – відповідно одинична система та епюра для обчислення кута повороту в точці *O*

Одинична система утворюється з вихідної шляхом відкидання зовнішніх зусиль та зайвих зв'язків (у разі їх існування). Одинична система повинна бути статично визначеною та кінематично незмінною.

До заданих точок одиничної системи треба прикласти одиничні силові фактори в напрямку шуканих переміщень. При визначенні лінійного переміщення до заданої точки слід прикласти одиничну силу $\bar{F} = 1$, у разі визначення кута повороту – одиничний момент $\bar{M} = 1$ (див. відповідно рис. 1.20 в та 1.20 д).

Спочатку визначимо прогин балки V_C , для чого розглянемо вихідну систему (рис. 1.20 а) разом із відповідною одиничною системою, що до неї в перерізі С прикладена одинична сила (рис. 1.20 в):

1) знаходимо реакції в опорах вихідної та одиничної систем (обидві системи мають бути врівноваженими):

- для вихідної системи (рис. 1.20 а):

$$\sum M_O = 0: F \cdot 6 - R_B \cdot 5 - M = 0; \quad R_B = \frac{6F - M}{5} = 3 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: F \cdot 1 + R_O \cdot 5 - M = 0; \quad R_O = \frac{-F + M}{5} = 2 \text{ кН};$$

$$\text{перевірка: } \sum F_{iy} = 0: F - R_B - R_O = 5 - 3 - 2 = 0;$$

- для одиничної системи (рис 1.20 в):

$$\sum M_O = 0: \bar{F} \cdot 6 - \bar{R}_B \cdot 5 = 0; \quad \bar{R}_B = \frac{6\bar{F}}{5} = \frac{6}{5};$$

$$\sum M_B = 0: \bar{F} \cdot 1 - \bar{R}_O \cdot 5 = 0; \quad \bar{R}_O = \frac{\bar{F}}{5} = \frac{1}{5};$$

$$\text{перевірка: } \sum F_{iy} = 0: \bar{R}_O - \bar{R}_B + \bar{F} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} - 1 = 0;$$

2) записуємо вирази для внутрішніх моментів:

- у вихідній системі:

$$M_F(z_1) = -R_O \cdot z_1 = -2 \cdot z_1;$$

$$M_F(z_2) = -R_O \cdot (z_2 + 3) + M = -2 \cdot (z_2 + 3) + 15;$$

$$M_F(z_3) = F \cdot z_3 = 5 \cdot z_3;$$

- в одиничній системі:

$$\overline{M}_1(z_1) = \overline{R}_O \cdot z_1 = \frac{1}{5} \cdot z_1;$$

$$\overline{M}_1(z_2) = \overline{R}_O \cdot (z_2 + 3) = \frac{1}{5} \cdot (z_2 + 3);$$

$$\overline{M}_1(z_3) = \overline{F} \cdot z_3 = 1 \cdot z_3;$$

3) при визначенні переміщень за допомогою інтеграла Мора побудова епюр внутрішніх силових факторів не є необхідною. Тож, нехтуючи додатком від поперечних зусиль, на підставі формули (1.26) безпосередньо знаходимо:

$$\begin{aligned} EI_X V_C &= \sum_{i=1}^3 \int_{\ell_i} M_F(z_i) \cdot \overline{M}_1(z_i) dz_i = \int_0^3 -2z_1 \cdot \frac{1}{5} z_1 dz_1 + \\ &+ \int_0^2 [-2(z_2 + 3) + 15] \cdot \frac{1}{5} (z_2 + 3) dz_2 + \int_0^1 5z_3 \cdot 1 \cdot z_3 dz_3 = \\ &= -\frac{2}{5} \cdot \frac{z_1^3}{3} \Big|_0^3 + \left[-\frac{2}{5} \left(\frac{z_2^3}{3} + 6 \frac{z_2^2}{2} + 9z_2 \right) + 3 \left(\frac{z_2^2}{2} + 3z_2 \right) \right] \Big|_0^2 + \\ &+ 5 \frac{z_3^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{54}{15} + \frac{164}{15} + \frac{5}{3} = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \end{aligned}$$

4) для обчислення прогину V_C за правилом Верещагіна будемо епюри моментів M_F та $\overline{M}_1$ на основі виразів п. 2 для вихідної та одиничної систем відповідно (рис. 1.20 б,г). Внаслідок ламаності епюр необхідно розглянути три інтервали. До того ж, для використання даних з таблиці 1.1 ділянка вантажної епюри у вигляді трапеції потребує додаткового розбиття на трикутник та прямокутник (рис. 1.20 б). Отже, маємо:

$$\omega_{F1} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad \omega_{F2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_{F3} = 5 \cdot 2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad \omega_{F4} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Проектуємо центри ваги C_i відповідних сегментів вантажної епюри на суміжну одиничну та отримуємо ординати $\overline{M}_{ci}$, вказані на рис. 1.20 г.

Таким чином, усе готово для застосування правила Верещагіна в формі (1.37). Пам'ятаючи про правило знаків, отримуємо:

$$EI_X V_C = \sum_{i=1}^4 \omega_{Fi} \cdot \overline{M}_{ci} = \left[-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \right] + \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) + 5 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} \right] + \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = -\frac{18}{5} + \frac{164}{15} + \frac{5}{3} = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

5) знайдемо переміщення V_C із використанням формул чисельного інтегрування:

- за допомогою формули трапеції (1.41):

$$EI_X V_C = \frac{3}{6} \left[-2 \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} \right] + \frac{2}{6} \left[2 \cdot 9 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 5 \right] + \frac{1}{6} [2 \cdot 5 \cdot 1] = -\frac{18}{5} + \frac{164}{15} + \frac{5}{3} = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

- за формулою Сімпсона – Карнаухова (1.42), спершу визначивши середні значення моментів на кожному інтервалі для обох епюр:

$$M_F \left(z_1 = \frac{l_1}{2} \right) = -3 \text{ кНм}; \quad M_F \left(z_2 = \frac{l_2}{2} \right) = 7 \text{ кНм}; \quad M_F \left(z_3 = \frac{l_3}{2} \right) = \frac{5}{2} \text{ кНм};$$

$$\overline{M}_1 \left(z_1 = \frac{l_1}{2} \right) = \frac{3}{10} \text{ м}; \quad \overline{M}_1 \left(z_2 = \frac{l_2}{2} \right) = \frac{4}{5} \text{ м}; \quad \overline{M}_3 \left(z_3 = \frac{l_3}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ м};$$

$$EI_X V_C = \frac{3}{6} \left[0 \cdot 0 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{10} - 6 \cdot \frac{3}{5} \right] + \frac{2}{6} \left[9 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot 7 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot 1 \right] + \frac{1}{6} \left[5 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 \right] = -\frac{18}{5} + \frac{164}{15} + \frac{5}{3} = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Отримані різними способами значення прогину є однаковими та додатними. Перше підтверджує правильність результату, а друге означає, що переріз C балки зміщується у напрямку відповідної одиничної сили.

Перейдемо до визначення кута повороту θ_O балки, для чого, поряд із вихідною системою на рис. 1.20 а, розглянемо нову одиничну систему із діючим в перерізі O одиничним моментом, як показано на рис. 1.20 д:

1) з рівнянь статики визначимо реакції в опорах одиничної системи:

$$\begin{aligned}\sum M_O = 0: \quad \overline{M} - \overline{R}_B \cdot 5 = 0; \quad \overline{R}_B &= \frac{1}{5}; \\ \sum M_B = 0: \quad \overline{M} - \overline{R}_O \cdot 5 = 0; \quad \overline{R}_O &= \frac{1}{5}; \\ \text{перевірка: } \sum F_{iy} = 0: \quad \overline{R}_O - \overline{R}_B &= 0;\end{aligned}$$

2) внутрішні моменти для нової одиничної системи:

$$\begin{aligned}\overline{M}_1(z_1) &= \overline{M} - \overline{R}_O \cdot z_1 = 1 - \frac{1}{5} \cdot z_1; \\ \overline{M}_1(z_2) &= \overline{M} - \overline{R}_O \cdot (z_2 + 3) = 1 - \frac{1}{5} \cdot (z_2 + 3); \\ \overline{M}_1(z_3) &= 0;\end{aligned}$$

3) знаходимо кут повороту θ_O за допомогою інтеграла Мора (вирази для внутрішніх моментів вихідної системи лишаються ті ж самі, що і в п. 2 рішення для прогину):

$$\begin{aligned}EI_X \theta_O &= \sum_{i=1}^2 \int_{\ell_i} M_F(z_i) \cdot \overline{M}_1(z_i) dz_i = \int_0^3 -2z_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}z_1\right) dz_1 + \\ &+ \int_0^2 (-2(z_2 + 3) + 15) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}(z_2 + 3)\right) dz_2 = \\ &= \left[-2 \cdot \frac{z_1^2}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{z_1^3}{3} \right]_0^3 + \int_0^2 (-2z_2 + 9) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}z_2\right) dz_2 = \\ &= -9 + \frac{18}{5} + \left[-\frac{4}{5} \cdot \frac{z_2^2}{2} + \frac{2}{5} \frac{z_2^3}{3} + \frac{18}{5} z_2 - \frac{9}{5} \cdot \frac{z_2^2}{2} \right]_0^2 = \\ &= -\frac{27}{5} + \left(-\frac{8}{5} + \frac{16}{15} + \frac{36}{5} - \frac{18}{5} \right) = -\frac{27}{5} + \frac{46}{15} = -\frac{7}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2;\end{aligned}$$

4) будемо епюру моменту для одиничної системи $\overline{M}_1$ (рис. 1.20 е) та, використовуючи розбиття вантажної епюри, зроблене в п. 4 обчислення прогину, застосовуємо правило Верещагіна (рис. 1.20 б,е):

$$EI_x \theta_O = \sum_{i=1}^3 \omega_{Fi} \cdot \overline{M}_{ci} = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} =$$

$$= -9 \cdot \frac{3}{5} + \frac{16}{15} + \frac{10}{5} = -\frac{27}{5} + \frac{46}{15} = -\frac{7}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

5) розраховуємо θ_O за формулами чисельного інтегрування:

- із застосуванням формули трапеції (1.41):

$$EI_x \theta_O = -\frac{3}{6} \cdot \left[2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{5} + 6 \right] + \frac{2}{6} \cdot \left[2 \cdot 9 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot 5 \right] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{54}{5} + \frac{36}{15} + \frac{10}{15} =$$

$$= -\frac{27}{5} + \frac{46}{15} = -\frac{7}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

- за формулою Сімпсона – Карнаухова (1.42) після визначення ординат одиничної епюри в центрах ділянок (відповідні значення для вантажної епюри вже були знайдені в п. 5 розв'язку для прогину):

$$\overline{M}_1 \left(z_1 = \frac{l_1}{2} \right) = \frac{7}{10}; \quad \overline{M}_1 \left(z_2 = \frac{l_2}{2} \right) = \frac{1}{5};$$

$$EI_x \theta_O = -\frac{3}{6} \cdot \left[4 \cdot 3 \cdot \frac{7}{10} + 6 \cdot \frac{2}{5} \right] + \frac{2}{6} \cdot \left[9 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{5} \right] =$$

$$= -\frac{27}{5} + \frac{46}{15} = -\frac{7}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Обчислені різними способами значення кута повороту співпадають та є від'ємними. Перше підтверджує правильність рішення, а друге означає, що переріз O балки повертається назустріч відповідному одиничному моменту.

1.8. Приклад розрахунку переміщень в просторовій стрижневій системі

Необхідно:

Визначити діаметр ламаного просторового стрижня на рис. 1.21, використавши III гіпотезу міцності при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, та обчислити повне переміщення точки C конструкції.

Рішення:

1) Будуємо епюри згинальних та крутних моментів від зовнішнього навантаження (рис. 1.22 а, б).

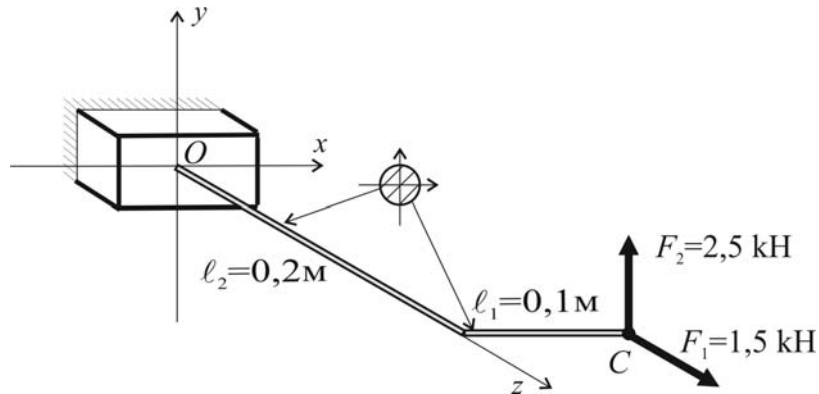


Рис. 1.21. Схема навантаження просторової стрижневої системи

2) Визначаємо діаметр стрижня з умови міцності у найбільш навантаженій точці – кореневому перерізі O :

- еквівалентний момент в перерізі за III гіпотезою міцності:

$$M_{екв}^{III} = \sqrt{(M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)} = \sqrt{(0,5^2 + 0,15^2 + 0,75^2)} = 0,579 \text{ кНм};$$

- обчислення діаметра з умови міцності:

$$\sigma_{екв} = \frac{M_{екв}}{W_x} \leq [\sigma]; \quad W_x \approx 0,1D^3 \Rightarrow \frac{M_{екв}}{0,1D^3} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{екв}}{0,1 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{0,574 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 160 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{36,19 \cdot 10^{-6}} = 3,307 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 33 \text{ мм}.$$

3) Приймаючи $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, обчислюємо жорсткості стрижня на згинання та кручення:

$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 3,3^4}{64} = 5,82 \text{ см}^4; \quad I_\rho = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 3,3^4}{32} = 11,64 \text{ см}^4;$$

$$EI_x = EI_y = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5,82 \cdot 10^{-8} = 11,64 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2;$$

$$EI_\rho = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 11,64 \cdot 10^{-8} = 23,28 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2.$$

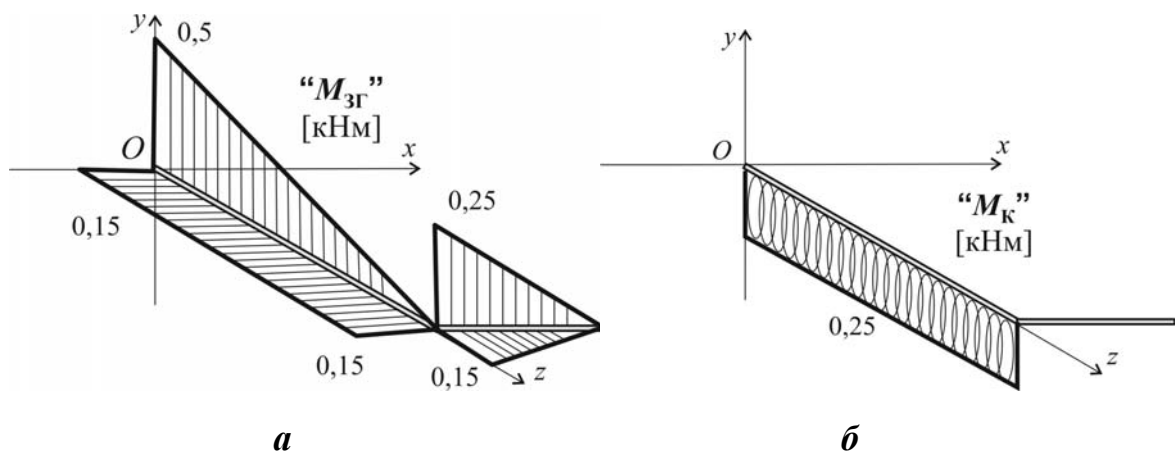


Рис. 1.22. Епюри згинальних (а) та крутних (б) моментів у вихідній системі

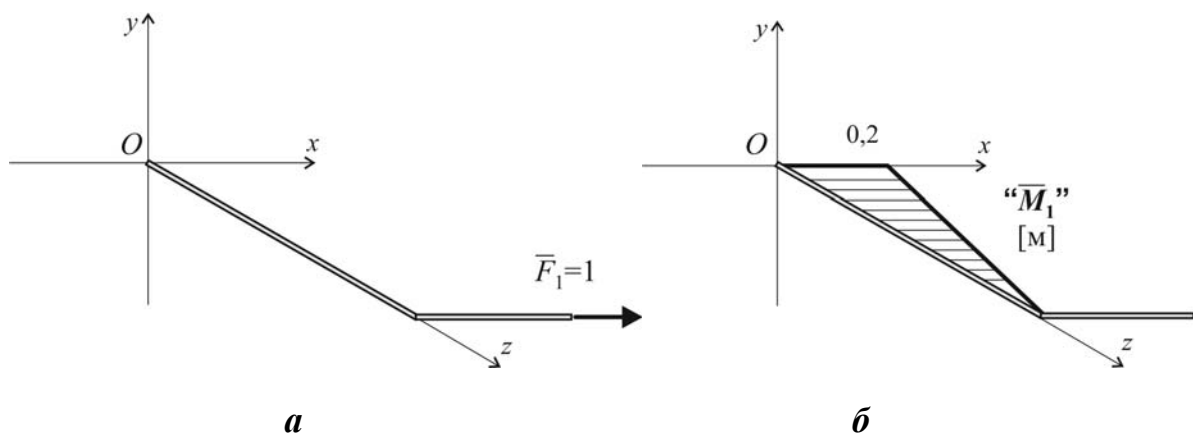


Рис. 1.23. Одинична система (а) та епюра згинального моменту (б) для визначення U_C

4) Визначимо переміщення U_C точки C стрижня в напрямку осі x . Для цього створимо одиничну систему, навантажену в точці C одиничною силою $\bar{F}_1=1$, що діє вздовж цієї осі (рис. 1.23 а). Очевидно, що в такій системі буде відсутнє кручення, а згинання буде мати місце лише в площині xOz (рис. 1.23 б). То ж в даному випадку загальна форма правила Верещагіна (1.35) спрощується до виразу:

$$U_C = \frac{1}{EI_y} [M_{3Г} \times \bar{M}_1] = \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,15 \cdot 10^3 \right) = -\frac{0,003 \cdot 10^3}{11,64 \cdot 10^3} = -0,258 \cdot 10^3 \text{ м} = -0,258 \text{ мм}.$$

Знак мінус в отриманому результаті свідчить про те, що дійсне переміщення U_C спрямоване у бік, протилежний до напрямку одиничного зусилля.

5) Обчислимо переміщення V_C точки C конструкції у напрямку осі y із утворенням відповідної одиничної системи, навантаженої одиничною силою $\bar{F}_2 = 1$ у напрямку цієї осі (рис. 1.24). Епюри згинальних та крутних моментів для цієї системи наведені на рис. 1.25 а та б відповідно.

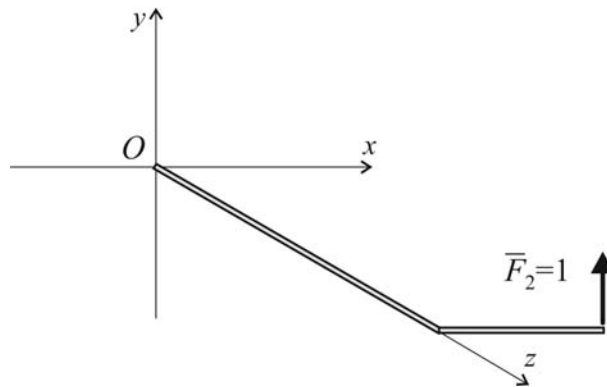


Рис. 1.24. Одинична система для визначення V_C

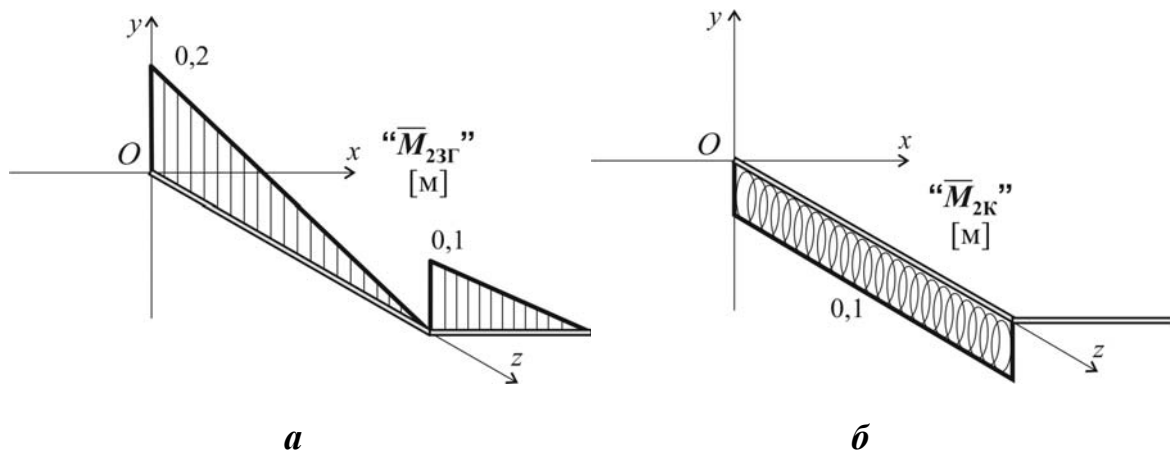


Рис. 1.25. Епюри згинальних (**а**) та крутних (**б**) моментів в одиничній системі для визначення V_C

«Перемножуючи» за правилом Верещагіна (1.35) епюри на рис. 1.22 з відповідними епюрам на рис. 1.25, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 V_C &= \frac{1}{EI_x} [M_{3Г} \times \overline{M}_{23Г}] + \frac{1}{EI_p} [M_K \times \overline{M}_{2К}] = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,1}{6} \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 0,25 \cdot 10^3 + \right. \\
 &+ \left. \frac{0,2}{6} \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \right] + \frac{1}{EI_p} [0,2 \cdot 0,25 \cdot 10^3 \cdot 0,1] = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{5}{6} + \frac{40}{6} \right] + \frac{1}{EI_p} \cdot 5 = \\
 &= \frac{7,5}{11,64 \cdot 10^3} + \frac{5}{23,28 \cdot 10^3} = 0,859 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,859 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

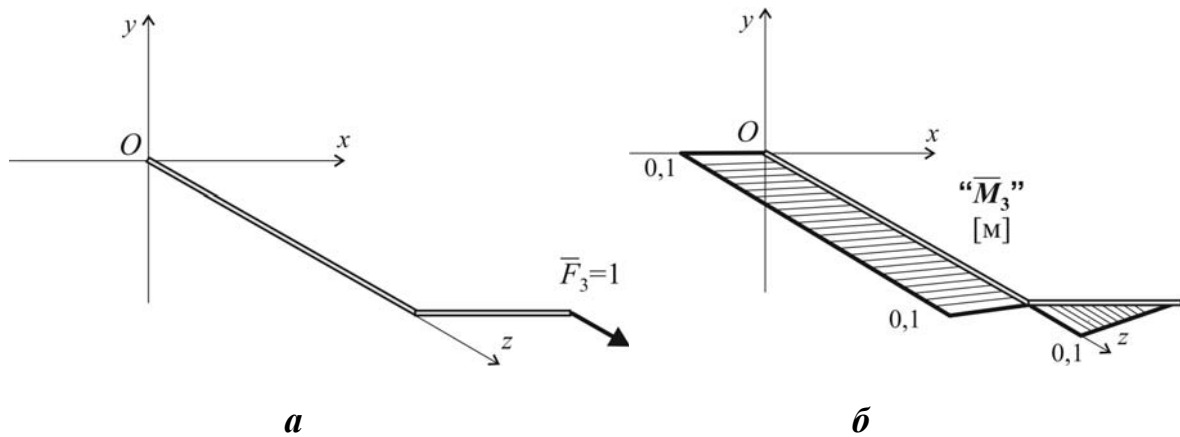


Рис. 1.26. Одiniчна система (а) та епюра згинального моменту (б) для визначення W_C

б) Аналогічним чином знайдемо і третю компоненту переміщення точки C вздовж осі z – W_C . Для цього в новій одиничній системі в даній точці прикладемо одиничну силу $\overline{F}_3 = 1$ у напрямку осі z (рис. 1.26 а). Неважко побачити, що в такій системі згинання буде відбуватись лише в площині xOz , а кручення не буде взагалі (рис. 1.26 б). Застосовуючи формулу (1.35), знайдемо:

$$\begin{aligned}
 W_C &= \frac{1}{EI_y} [M_{3Г} \times \overline{M}_3] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{0,1}{6} \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 0,15 \cdot 10^3 + 0,2 \cdot 0,15 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \right] = \\
 &= \frac{1}{EI_y} \cdot \left[\frac{3}{6} + 3 \right] = \frac{3,5}{11,64 \cdot 10^3} = 0,301 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,301 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

7) Остаточно, повне переміщення точки C становить:

$$\Delta_C = \sqrt{(U_C^2 + V_C^2 + W_C^2)} = \sqrt{(0,258^2 + 0,859^2 + 0,301^2)} = 0,946 \text{ мм.}$$

1.9. Розрахунково-проектувальне завдання

При вивченні розділу «Визначення узагальнених переміщень за допомогою енергетичних методів» в курсі «Опір матеріалів» ставиться мета навчити студентів основам інженерного розрахунку переміщень та кутів повороту в механічних стрижневих системах для подальших розрахунків конструкцій машин і механізмів на міцність і жорсткість при дії статичного навантаження.

Для кращої організації і більш ефективної самостійної роботи студентів, згідно з вимогами програми курсу “Опір матеріалів”, студентам пропонується до виконання розрахунково-проектувальне завдання (РПЗ) за темою «Визначення переміщень у стрижневих системах за допомогою енергетичних методів». Виконуючи цю роботу, студент практично знайомиться з методами обчислення переміщень у плоских та просторових стрижневих системах.

1.9.1 Зміст розрахунково-проектувального завдання

Розрахунково-проектувальне завдання складається з трьох етапів:

1. Розв’язання запропонованих задач за вказаними викладачем варіантами розрахункових схем і вихідних даних, оформлення їх за вимогами кафедри «Механіки суцільних середовищ та опору матеріалів».
2. Написання контрольних робіт за темою РПЗ.
3. Захист РПЗ. Захист включає в себе пояснення методів і принципів розв’язання задач, а також відповідь на контрольні теоретичні запитання. Кількість та об’єм цих запитань визначається викладачем індивідуально для кожного студента.

Мета роботи – розрахунок переміщень та кутів повороту у заданих точках плоскої балки декількома способами, визначення необхідних розмірів перерізів елементів просторової стрижневої конструкції з умови міцності та обчислення повного переміщення у заданій точці конструкції.

Вхідними даними для задач є такі:

1. Схеми статично визначених плоских балок із заданням їх геометричних розмірів та зовнішнього навантаження – таблиці 1.2, 1.3.
2. Схеми просторових стрижневих систем постійної жорсткості із заданням розмірів ділянок та зовнішнього силового навантаження – таблиці 1.4, 1.5.

РПЗ складається з двох обов’язкових для розв’язання задач:

1. *Розрахунок переміщень в балці при плоскому згинанні.* Для заданої статично визначеної балки обчислити переміщення її правого краю (точки *C*) та кут повороту лівого її краю (точки *O*).

Варіанти розрахункових схем представлені в таблиці 1.2, числові дані надаються в таблиці 1.3.

2. *Розрахунок просторової стрижневої конструкції.* Для вказаної просторової стрижневої системи визначити необхідний діаметр перерізу її елементів та розрахувати повне переміщення вільного краю (точки *C*) конструкції.

Варіанти розрахункових схем наведені в таблиці 1.4, числові дані містяться в таблиці 1.5.

1.9.2. Порядок виконання завдання

Задача 1. Розрахунок переміщень в балці при плоскому згинанні:

1. Згідно з номером варіанта виписати числові дані та в певному масштабі накреслити схему заданої системи із зазначенням її лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.

2. Побудувати одиничні системи для підрахунку переміщення та кута повороту балки.

3. Побудувати епюри моментів від заданих та одиничних навантажень у вихідній та одиничній системах відповідно.

4. Обчислити переміщення та кут повороту в заданих точках балки у два різні способи з метою перевірки отриманих результатів.

Задача 2. Розрахунок просторової стрижневої конструкції:

1. Згідно з номером варіанту виписати числові дані та в певному масштабі накреслити схему заданої системи з зазначенням її лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.

2. Побудувати епюри моментів у вихідній системі від зовнішнього навантаження.

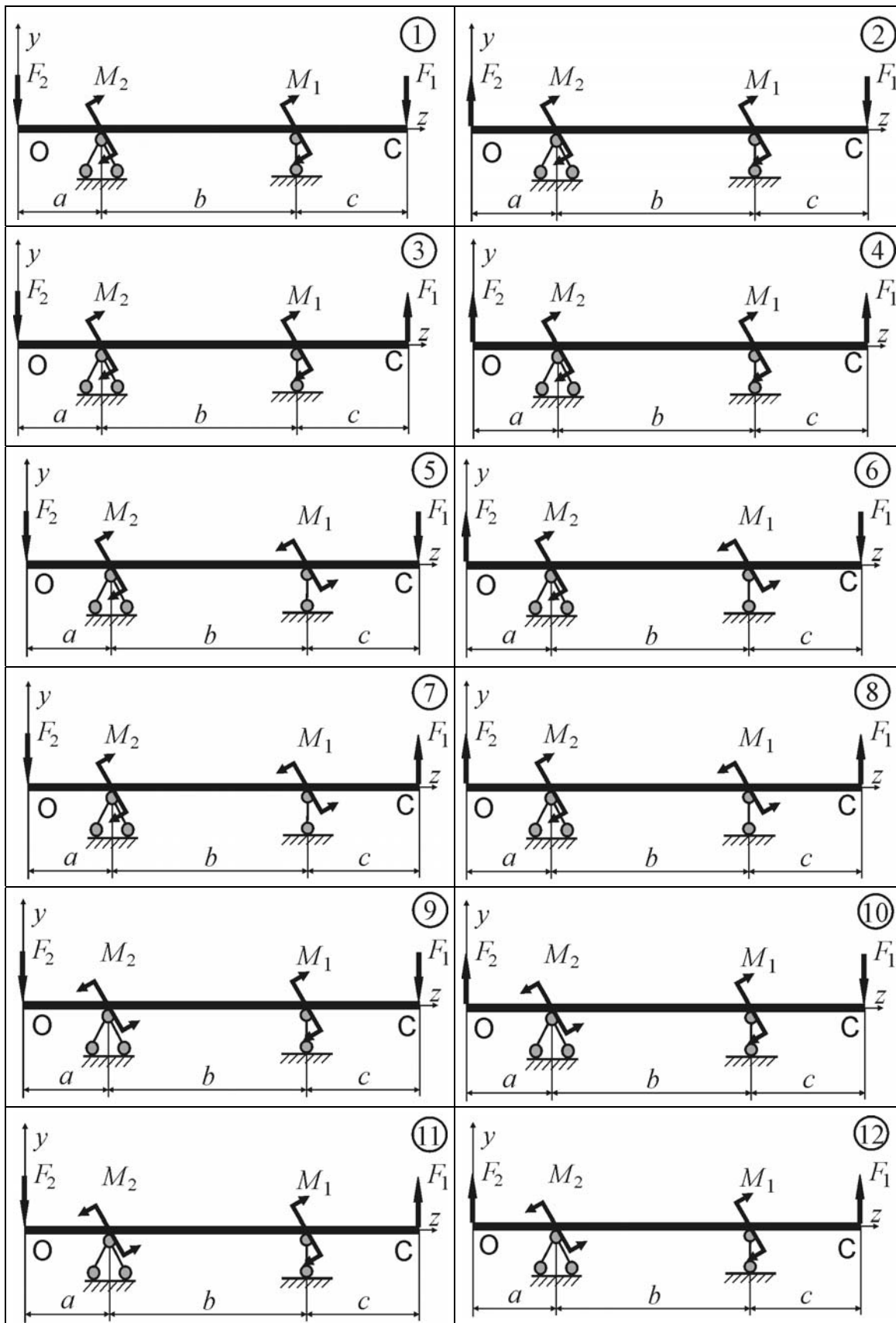
3. З умови міцності за гіпотезою максимальних дотичних напружень розрахувати діаметр круглого перерізу.

4. Побудувати одиничні системи та відповідні епюри моментів від одиничних сил для підрахунку переміщень у заданій точці конструкції.

5. Визначити компоненти переміщення розгляданої точки системи у трьох координатних напрямках.

6. Обчислити повне переміщення заданої точки конструкції.

Таблиця 1.2 – Розрахункові схеми до задачі 1



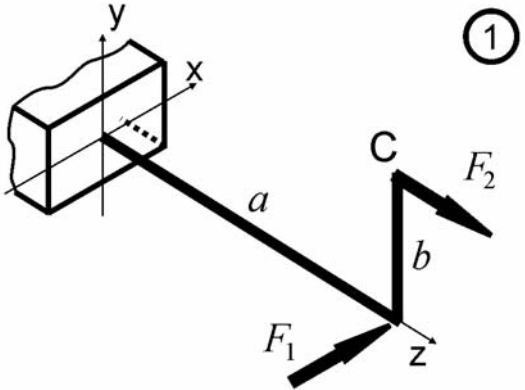
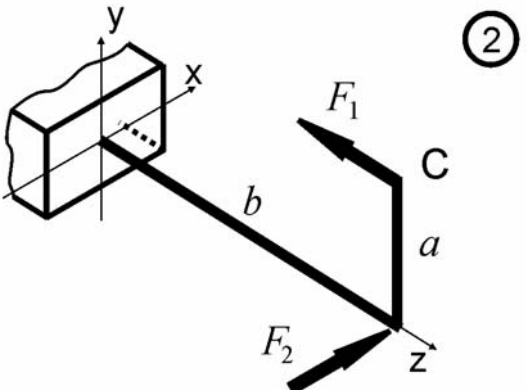
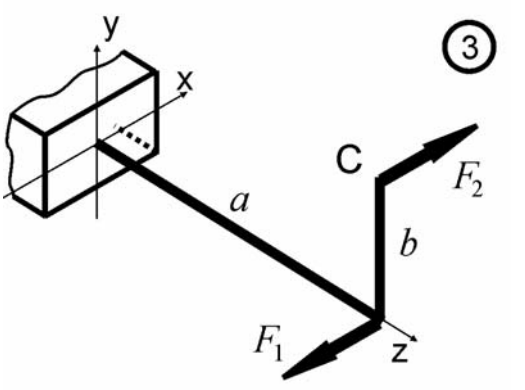
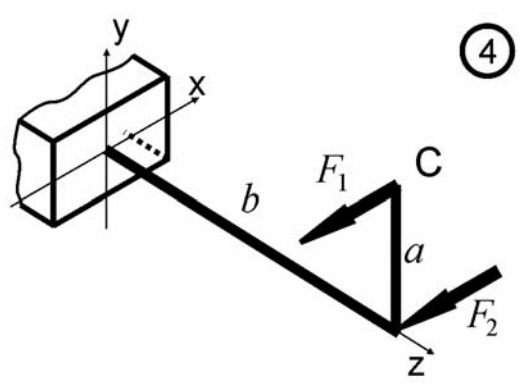
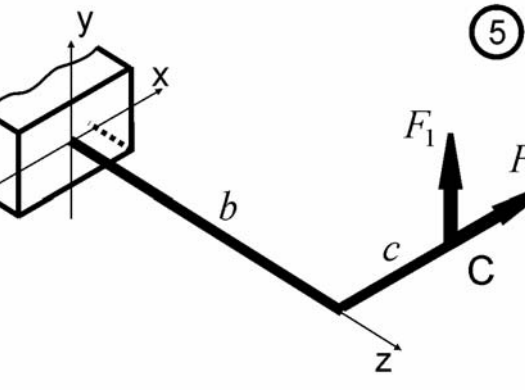
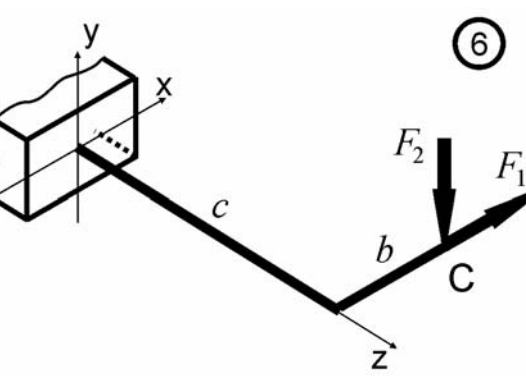
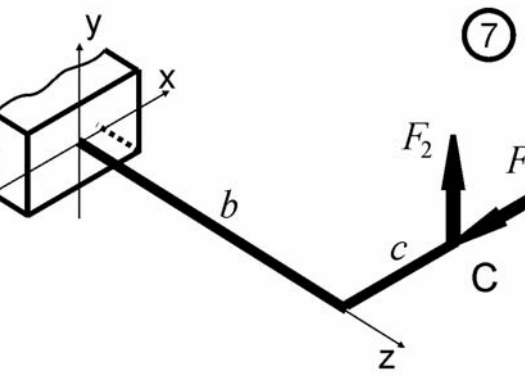
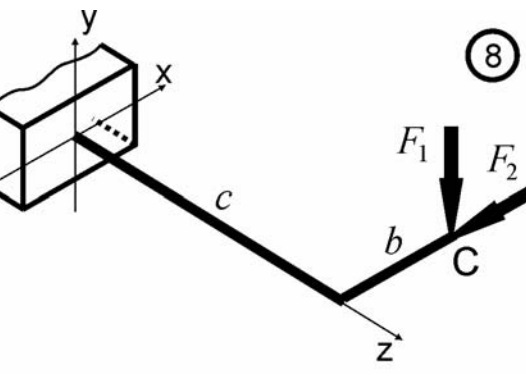
Закінчення таблиці 1.2

13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24

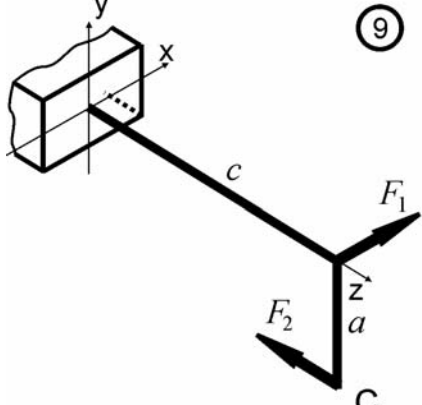
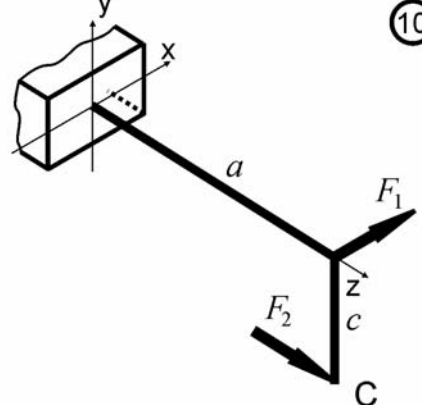
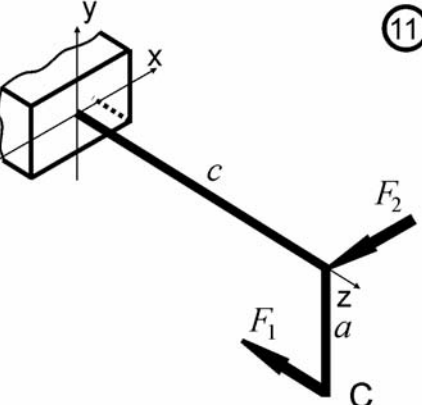
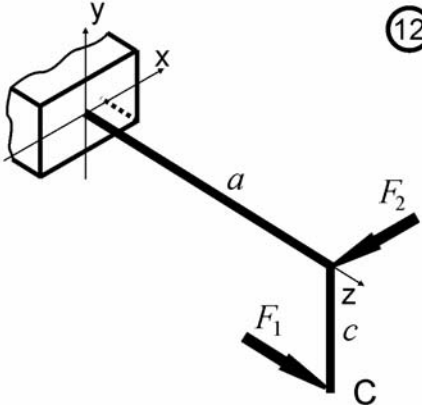
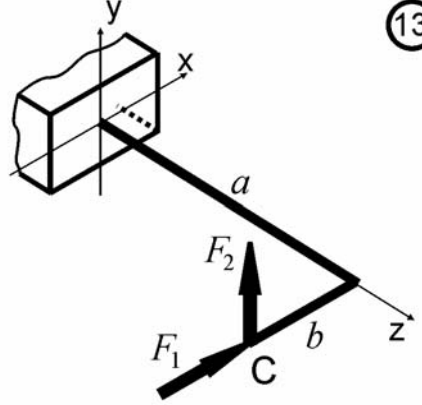
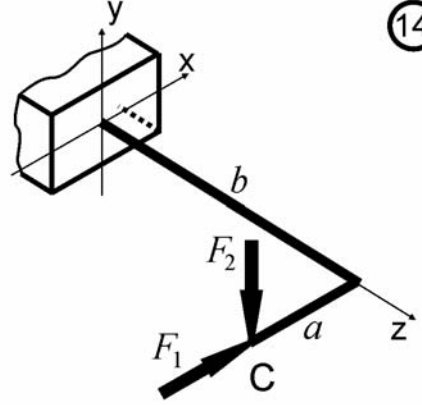
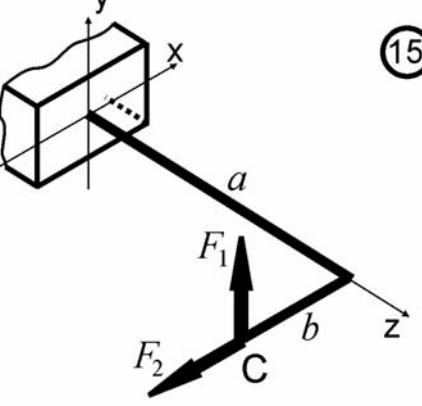
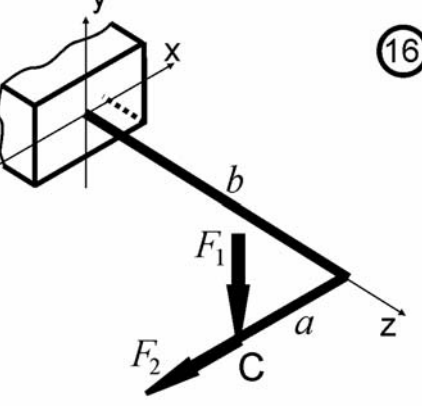
Таблиця 1.3 – Числові дані до задачі 1

№ вар.	F_1 , кН	F_2 , кН	M_1 , кНм	M_2 , кНм	a , м	b , м	c , м
1	25	10	10	30	1,0	2,0	1,5
2	10	15	15	25	1,5	2,5	2,0
3	15	20	20	20	2,0	3,0	2,5
4	20	10	25	15	2,5	3,5	3,0
5	25	15	30	10	1,0	4,0	3,5
6	10	20	10	5	1,5	2,0	4,0
7	15	10	15	30	2,0	2,5	1,5
8	20	15	20	25	2,5	3,0	2,0
9	25	20	25	20	1,0	3,5	2,5
10	10	10	30	15	1,5	4,0	3,0
11	15	15	10	10	2,0	2,0	3,5
12	20	20	15	5	2,5	2,5	4,0
13	25	10	20	30	1,0	3,0	1,5
14	10	15	25	25	1,5	3,5	2,0
15	15	20	30	20	2,0	4,0	2,5
16	20	10	10	15	2,5	2,0	3,0
17	25	15	15	10	1,0	2,5	3,5
18	10	20	20	5	1,5	3,0	4,0
19	15	10	25	30	2,0	3,5	1,5
20	20	15	30	25	2,5	4,0	2,0
21	25	20	10	20	1,0	2,0	2,5
22	10	10	15	15	1,5	2,5	3,0
23	15	15	20	10	2,0	3,0	3,5
24	20	20	25	5	2,5	3,5	4,0
25	25	10	30	30	1,0	4,0	1,5

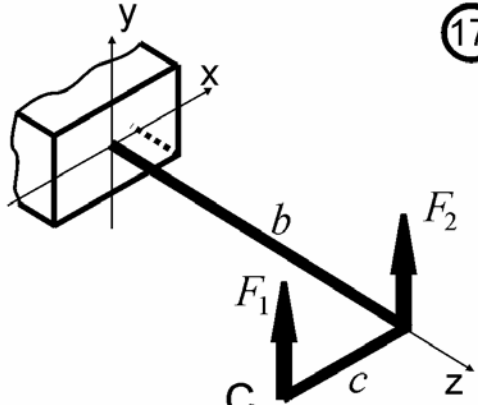
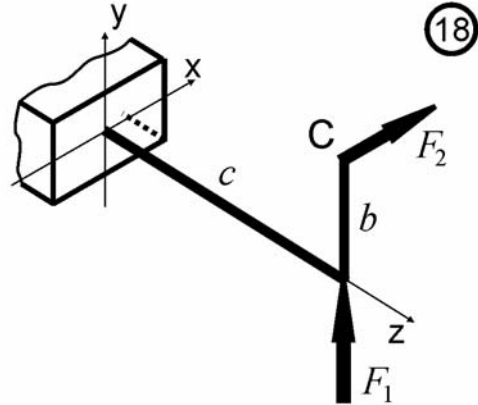
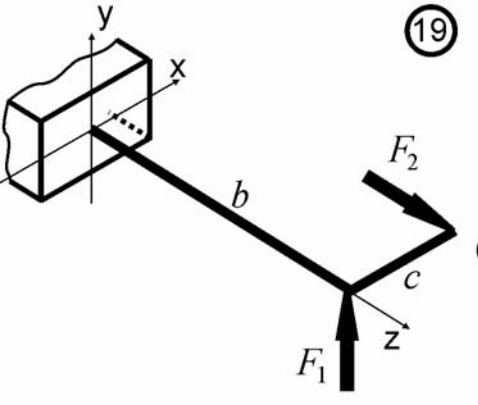
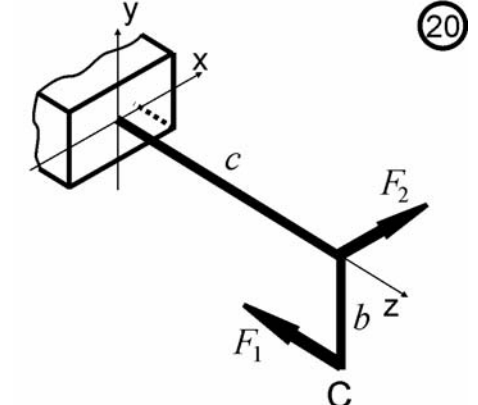
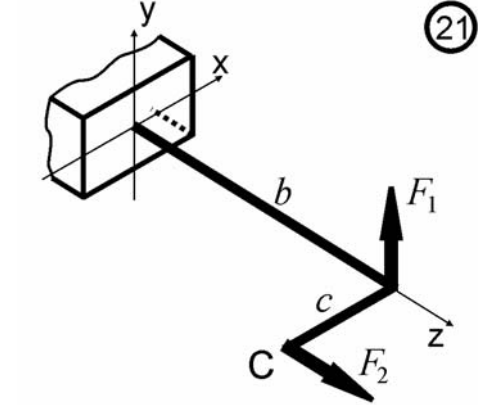
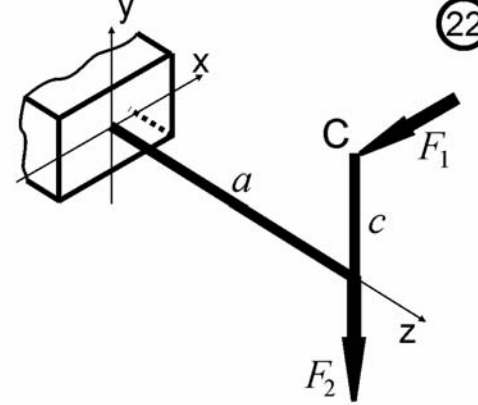
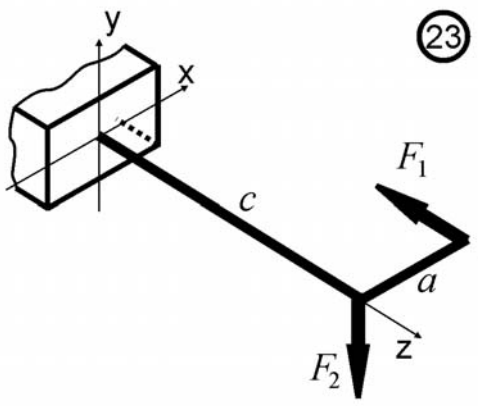
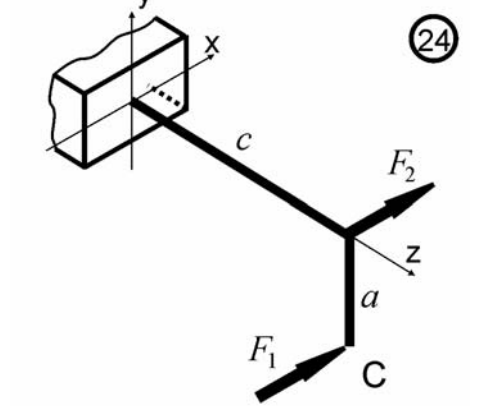
Таблиця 1.4 – Розрахункові схеми до задачі 2

 ①	 ②
 ③	 ④
 ⑤	 ⑥
 ⑦	 ⑧

Продовження таблиці 1.4

9 	10 
11 	12 
13 	14 
15 	16 

Закінчення таблиці 1.4

 (17)	 (18)
 (19)	 (20)
 (21)	 (22)
 (23)	 (24)

Таблиця 1.5 – Числові дані до задачі 2*

№ вар.	F_1 , кН	F_2 , кН	a , м	b , м	c , м	n_T
1	2,0	1	0,10	0,20	0,1	1,4
2	4,0	2	0,15	0,25	0,2	1,5
3	6,0	3	0,20	0,30	0,3	1,6
4	8,0	4	0,25	0,35	0,4	1,7
5	1,5	5	0,30	0,40	0,1	1,8
6	2,5	1	0,35	0,20	0,2	1,9
7	2,0	2	0,10	0,25	0,3	2,0
8	4,0	3	0,15	0,30	0,4	1,4
9	6,0	4	0,20	0,35	0,1	1,5
10	8,0	5	0,25	0,40	0,2	1,6
11	1,5	1	0,30	0,20	0,3	1,7
12	2,5	2	0,35	0,25	0,4	1,8
13	2,0	3	0,10	0,30	0,1	1,9
14	4,0	4	0,15	0,35	0,2	2,0
15	6,0	5	0,20	0,40	0,3	1,4
16	8,0	1	0,25	0,20	0,4	1,5
17	1,5	2	0,30	0,25	0,1	1,6
18	2,5	3	0,35	0,30	0,2	1,7
19	2,0	4	0,10	0,35	0,3	1,8
20	4,0	5	0,15	0,40	0,4	1,9
21	6,0	1	0,20	0,20	0,1	2,0
22	8,0	2	0,25	0,25	0,2	1,4
23	1,5	3	0,30	0,30	0,3	1,5
24	2,5	4	0,35	0,35	0,4	1,6
25	2,0	5	0,10	0,40	0,1	1,7

* Границя текучості матеріалу $\sigma_T = 300$ МПа.

2. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СТРИЖНЕВІ СИСТЕМИ. МЕТОД СИЛ

2.1. Основні поняття та визначення

Стрижнева система – конструкція, яка складається зі стрижнів, з'єднаних між собою у вузлах. Якщо ці з'єднання шарнірні, то конструкція називається *фермою* або *стрижневою решіткою*. Зовнішні навантаження у фермах прикладаються до вузлових точок, а завдяки відсутності моментів у шарнірах стрижневі елементи ферми працюють виключно на розтягання або стискання.

У разі жорсткого (зварного) з'єднання стрижнів, конструкція називається *рамою*. Її елементи, крім розтягання та стискання, працюють ще й на згинання та кручення.

Стрижневі конструкції за їх геометрією можна поділити на два типи. Якщо осьові лінії усіх стрижнів лежать в одній площині, то конструкція називається *плоскою*, якщо у різних – *просторовою*. Як правило, навантаження плоских систем відбувається в площині самої конструкції, у зворотному випадку такі системи називають *плоско-просторовими*.

Плоскі конструкції у разі навантаження у власній площині мають можливість переміщуватись вздовж двох координатних напрямків, а також повертатись у вказаній площині, тобто мають *три ступені вільності*. Якщо конструкція є просторовою, то у тривимірній системі координат кількість ступенів вільності досягає шести (три лінійні переміщення вздовж координатних напрямків та три кути повороту у трьох координатних площинах).

Для того щоб унеможливити переміщення плоскої конструкції як жорсткого цілого (тобто забезпечити її *кінематичну незмінність*), треба накласти у кожному напрямку певні конструкційні обмеження чи так звані зовнішні зв'язки, що можуть мати вигляд рухомих і нерухомих шарнірів, жорсткого защемлення, тощо.

Таким чином, *зовнішні зв'язки* – це обмеження, які накладаються на лінійні і кутові переміщення конструкції як жорсткого цілого у відповідних її точках. Мінімально необхідна кількість зовнішніх зв'язків у разі плоскої конструкції дорівнює трьом, у разі просторової – шести.

Для визначення *реакцій зв'язків*, що мають вигляд сил та моментів, використовуються рівняння рівноваги (рівняння статyki).

Природно, що ненульові реакції зв'язків виникають тільки в разі наявності зовнішнього навантаження у відповідних напрямках, або, іншими словами, при спробі зовнішніх сил здійснити переміщення у цих напрямках. Лінійним переміщенням відповідають реактивні сили, кутові зміщення викликають появу реактивних моментів.

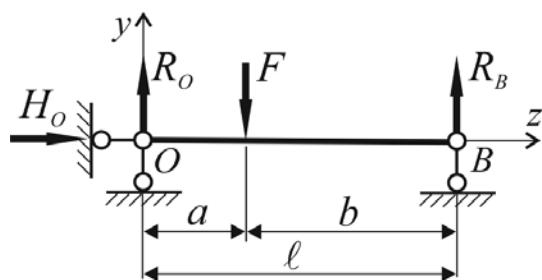


Рис. 2.1. Статично визначена балка

Розглянемо балку, зображену на рис. 2.1. Розташовані в точці O два зовнішні зв'язки у вигляді рухомих шарнірів роблять неможливими лінійні переміщення балки вздовж координатних напрямків y та z . Таким чином, у балки відбираються два ступені вільності. Унеможливити її поворот в шарнірі O можна встановленням ще одного зв'язку в точці B у вигляді

рухомого шарніра, розташованого ортогонально до радіуса повороту балки ℓ . Тепер балка є нерухомою в площині yOz .

Вертикальні реакції в точках O і B визначаються з рівнянь статки:

$$\sum M_O = 0; \quad -F \cdot a + R_B \cdot l = 0; \quad R_B = F \frac{a}{l};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot b - R_O \cdot l = 0; \quad R_O = F \frac{b}{l}.$$

Обидві сили мають ненульове значення, бо з боку зовнішньої сили F є спроба здійснити неможливе переміщення вздовж осі y . Останнє рівняння рівноваги $\sum F_{iz} = 0$, очевидно, дає $H_O = 0$, бо спроби зміщення балки в горизонтальному напрямку немає.

Якщо кількість зовнішніх зв'язків є мінімально необхідною з точки зору кінематичної незмінності, то система вважається *статично визначеною* (С.В.С.), у разі перевищення цієї кількості – *статично невизначеною* (С.Н.С.). Зв'язки, що перевищують необхідний мінімум для даної системи, називають «зайвими» або додатковими.

Різниця між загальною кількістю зв'язків, накладених на систему, і числом незалежних рівнянь статки, які можна для неї записати, називається *ступенем статичної невизначуваності* системи (С.С.Н.).

Якщо на систему накладені лише зовнішні зв'язки, С.С.Н. визначається таким чином:

$$\text{С.С.Н.} = n_{\text{РО}} - n_{\text{РС}}, \quad (2.1)$$

де $n_{\text{РО}}$ – кількість реакцій опор; $n_{\text{РС}}$ – число рівнянь статyki.

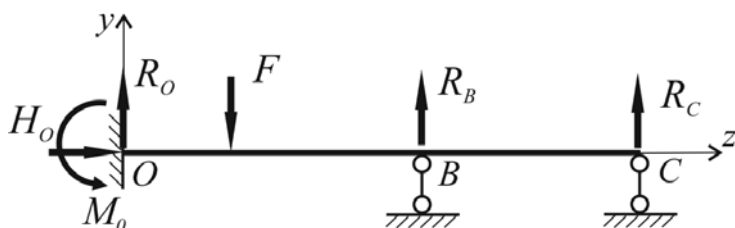


Рис. 2.2. Статично невизначена балка

Наприклад, для балки, зображеної на рис. 2.2, $n_{\text{РО}} = 5$, $n_{\text{РС}} = 3$,

$$\text{С.С.Н.} = 5 - 3 = 2.$$

Окрім зовнішніх, існують також внутрішні зв'язки.

Внутрішні зв'язки – це обмеження, які ліквідують взаємні зміщення однієї частини конструкції відносно іншої. Потреба в аналізі внутрішніх зв'язків виникає при розрахунках плоских замкнених контурів, до яких неможливо застосувати метод перерізів без попереднього розрізання частини контуру.

Наприклад, на рис. 2.3 а зображений плоский контур, який знаходиться під дією врівноваженого зовнішнього навантаження силами F . Для визначення внутрішніх силових факторів зробимо будь-який умовний переріз, наприклад в точці A (рис. 2.3 б). Зрозуміло, що ліва і права частини перерізу повинні мати однакові переміщення у напрямках y та z , а також однакові кути повороту в площині yOz , адже для умовно розрізаного стрижня повинні виконуватись умови сумісності деформації такі ж самі, як і для суцільного. Отже, внутрішні зусилля X_1 мають вирівнювати різницю переміщень лівої і правої границі перерізу A по координаті y (рис. 2.3 в), зусилля X_2 «контролюють» взаємні переміщення в напрямку осі z (рис. 2.3 г), а моменти X_3 роблять однаковими кути повороту лівої і правої частини розрізаного стрижня (рис. 2.3 д). Таким чином, в точці A діє трійка невідомих узагальнених взаємних (рівних і протилежно спрямованих) зусиль. Зазначимо, що сконцентровані зусилля X_1 та X_2 здійснюють роботу на лінійних зміщеннях, а моменти X_3 – на кутових.

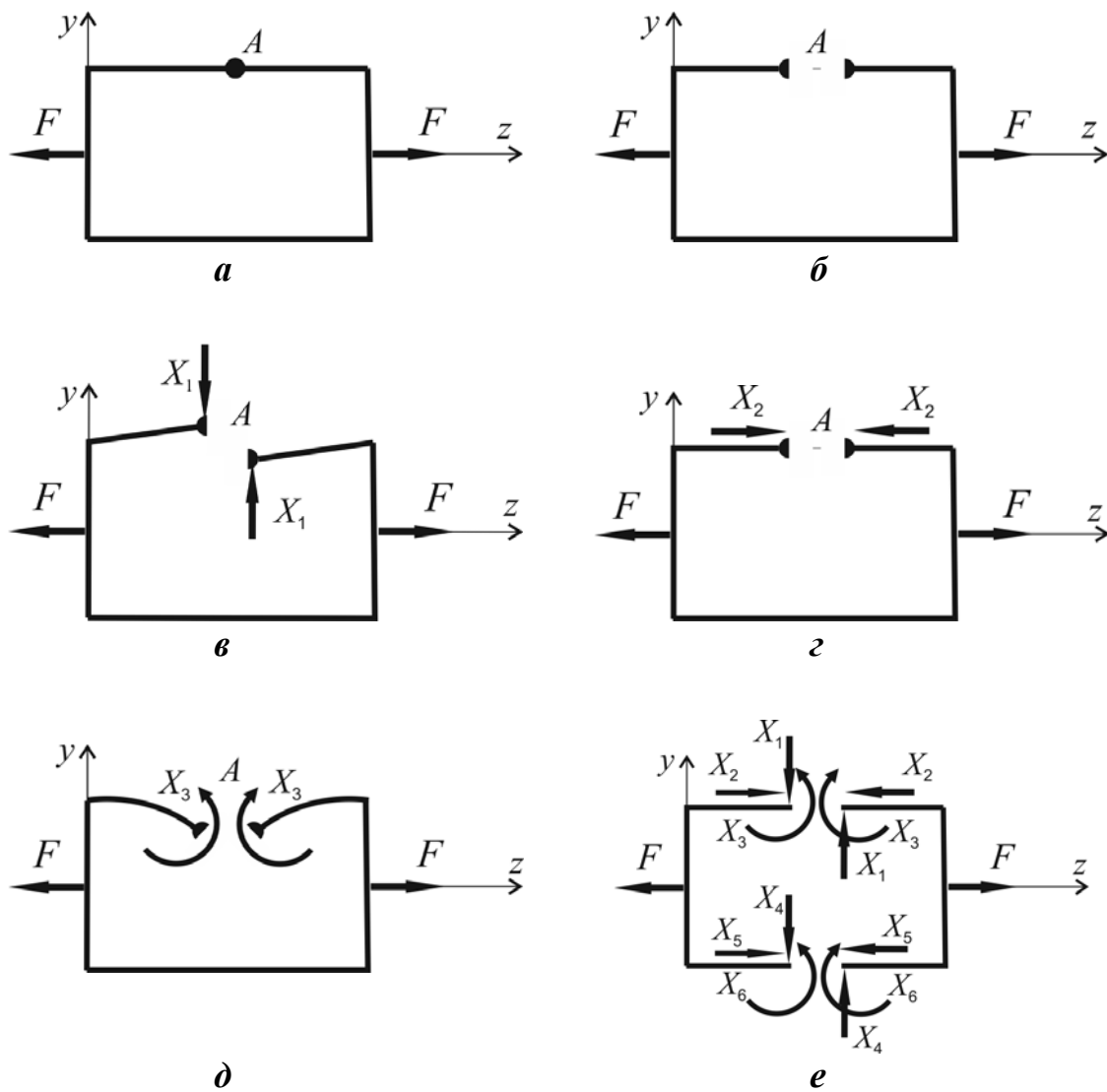


Рис. 2.3. Внутрішня статична невизначеність плоского контуру:
а – плоский контур; *б* – умовний розріз плоского контуру;
в – внутрішні зусилля X_1 ; *г* – внутрішні зусилля X_2 ; *д* – внутрішні зусилля X_3 ;
е – повна система невідомих зусиль у плоскому контурі

При застосуванні методу перерізів до замкнутого контуру його потрібно розділити на дві частини, як і будь-який інший об'єкт, а в додатковому перерізі виникне нова трійка внутрішніх невідомих зусиль X_4 , X_5 та X_6 (рис. 2.3е). Отже, з урахуванням рівнянь статики $C.C.H. = 6 - 3 = 3$.

Таким чином, кожний плоский замкнений контур є внутрішньо тричі статично невизначуваним, а з урахуванням замкнених контурів ступень статичної невизначуваності плоскої системи становить

$$\text{С.С.Н.} = n_{\text{PO}} + 3k - n_{\text{PC}}, \quad (2.2)$$

де k – кількість замкнених контурів системи.

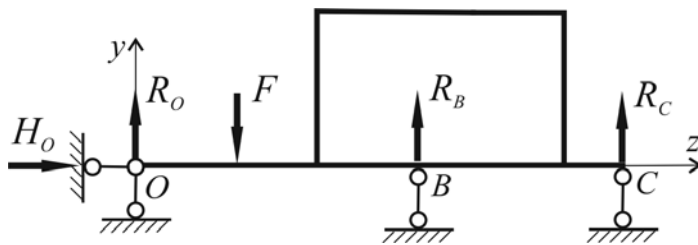


Рис. 2.4. Чотири рази статично невизначувана стрижнева система

Наприклад, для плоскої системи на рис. 2.4 ступінь статичної невизначуваності складає:

$$\text{С.С.Н.} = 4 + 3 - 3 = 4,$$

вона один раз невизначувана зовнішнє і тричі – внутрішнім чином.

Для вирішення задачі з визначення невідомих (реактивних або внутрішніх) зусиль треба скласти додатково таку кількість рівнянь, яка дорівнює ступеню статичної невизначуваності.

Одним з найбільш поширених методів розв'язання статично невизначуваних задач є метод сил.

2.2. Метод сил

Ідея методу сил є простою і фізично зрозумілою. Її можна сформулювати майже у декілька речень.

Статично невизначувану систему (С.Н.С.) треба замінити еквівалентною статично визначуваною (С.В.С.) шляхом відкидання зайвих зв'язків (як зовнішніх, так і внутрішніх). Дія відкинутих зв'язків замінюється відповідними невідомими зусиллями, які на дозволених у С.В.С. переміщеннях здійснюють механічну роботу. Значення цих зусиль визначається з розрахунку таким чином, аби переміщення точок С.В.С. відповідали обмеженням, існуючим у вихідній С.Н.С.

То ж невідомими у даному методі є сили або моменти, що виникають у зайвих зв'язках. Всі вони зазвичай позначаються як X_i , де i – номер відкинутого зайвого зв'язку.

Розрахунок у методі сил розпочинається з визначення ступеню статичної невизначуваності і відкидання зайвих зв'язків. Таким чином, утворюється так звана *основна система*, що має бути статично визначеною та кінематично незмінною. До того ж бажано, щоб обрана основна

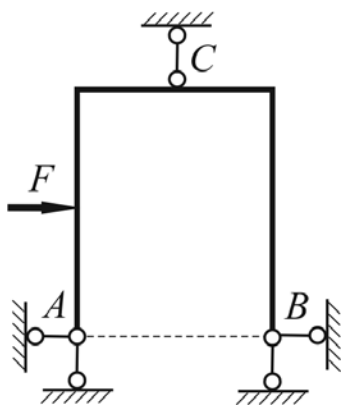


Рис. 2.5. Двічі статично невизначувана рама

система забезпечувала мінімальну кількість обчислень, адже вибір основної системи не є однозначним, і для однієї С.Н.С. завжди можна утворити декілька основних систем. Наприклад, для двічі статично невизначуваної рами, зображеної на рис. 2.5, можна створити низку основних систем, як показано на рис. 2.6.

При виборі основної системи треба слідкувати за тим, щоб вона була кінематично незмінною. Система, зображена на рис. 2.7, не відповідає цим вимогам. Така система є миттєвим механізмом, бо може вільно повертатися в шарнірі A на деякий кут.

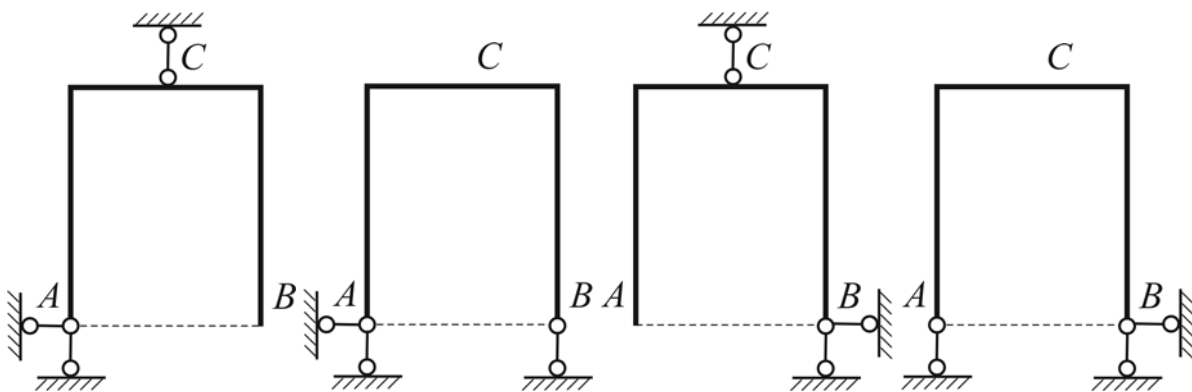


Рис. 2.6. Можливі основні системи для рами, зображеної на рис. 2.5

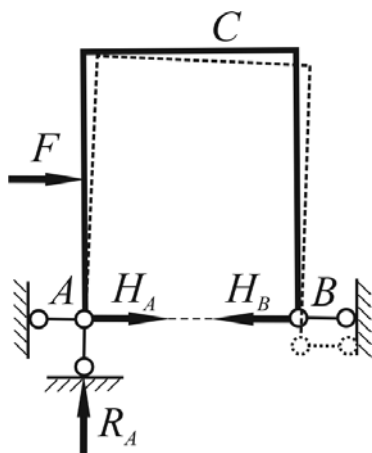


Рис. 2.7. Приклад миттєвого механізму

Математично наявність миттєвого механізму виявляється на етапі підрахунку опорних реакцій – в кінематично змінній системі їх неможливо визначити. Отже, якщо в основній системі неможливо визначити опорні реакції, то вона є кінематично змінною.

Наступним кроком у вирішенні задачі є побудова еквівалентної системи. Свою назву вона отримала через те, що в ній повинні виникати такі ж самі зусилля та пере-

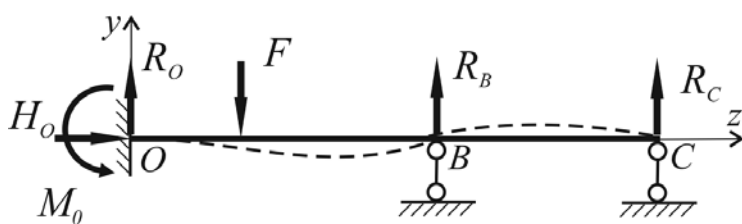


Рис. 2.8. Деформована форма балки, зображеної на рис. 2.2

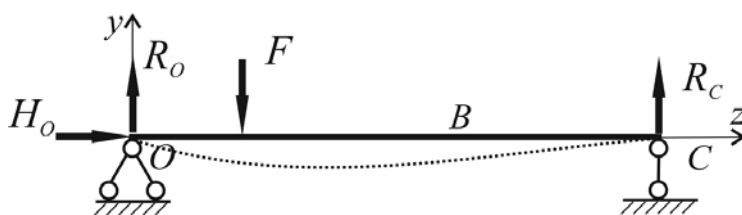


Рис. 2.9. Основна система та її деформований вигляд

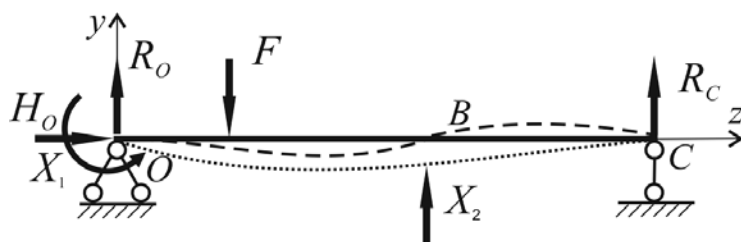


Рис. 2.10. Еквівалентна система балки, зображеної на рис. 2.2

міщення, що і у вихідній статично невизначуваній системі. Проілюструємо це на прикладі двічі статично невизначуваної балки на рис. 2.2, схема навантаження та деформований вид якої показані на рис. 2.8, а основна система – на рис. 2.9.

У обраній основній системі відкинуті два зв'язки – прибралий рухомий шарнір в точці B , а жорстке зачеплення в точці O замінено на нерухомий шарнір. Таким чином, в точці B основної системи дозволене вертикальне зміщення, а в точці O – довільний кут повороту (деформована форма основної системи балки зображена на рис. 2.9 лінією точок).

На базі основної системи створюється еквівалентна система (рис. 2.10), в якій поряд із зовнішнім навантаженням додатково прикладаються невідомі зусилля у напрямках відкинутих зв'язків основної системи – момент X_1 в точці O та сила X_2 в точці B . Якщо підібрати такі значення цих зусиль, що переміщення еквівалентної системи дорівнюватимуть переміщенням вихідної системи, то еквівалентність між системами буде, очевидно, досягнута.

Отже, в математичному плані еквівалентність систем на рис. 2.8 та 2.10 має забезпечуватись відповідними рівняннями для точок O і B , що виражають рівність нулю кутових та лінійних переміщень у напрямках дії невідомих зусиль X_1 та X_2 відповідно.

2.3. Канонічні рівняння методу сил

Основні рівняння методу сил, що виражають рівність нулю переміщень (лінійних чи кутових) у напрямках дії зайвих невідомих зусиль, зручно складати в так званій *канонічній універсальній формі*.

Спочатку розглянемо один раз статично невизначувану систему на рис. 2.11 а.

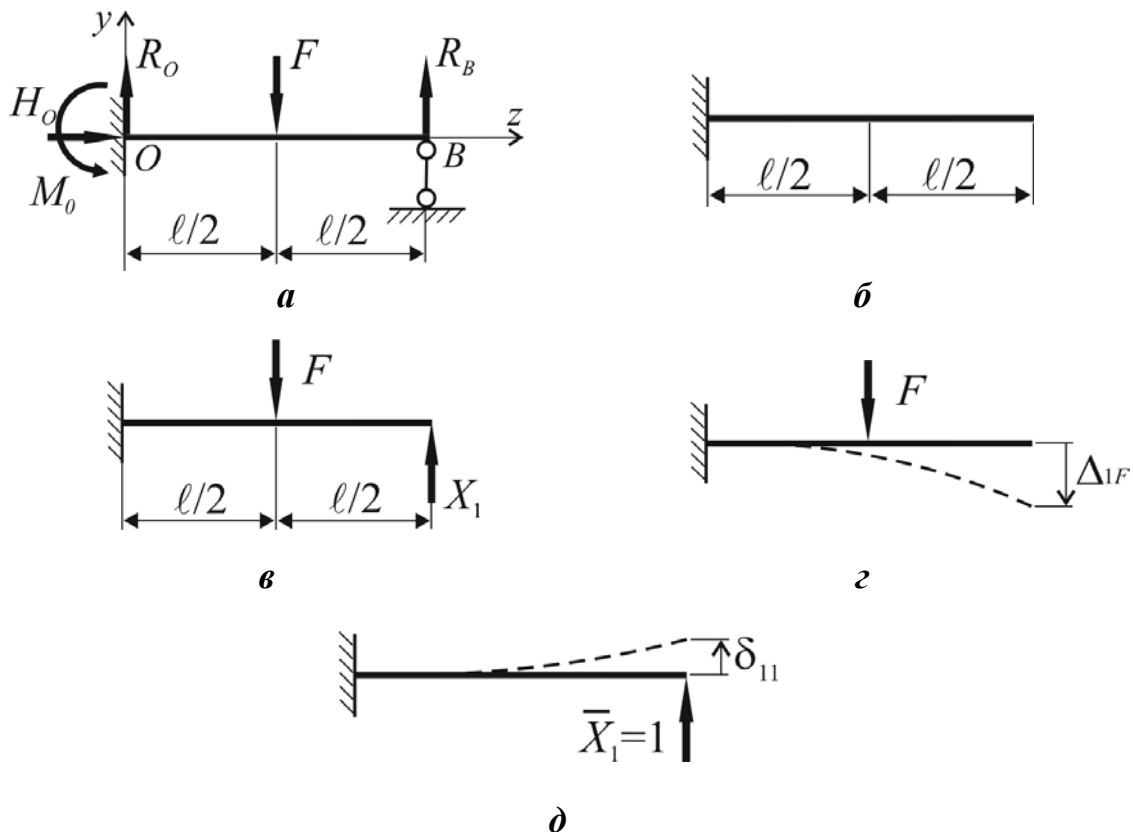


Рис. 2.11. Один раз статично невизначена балка:

а – вихідна система; **б** – основна система; **в** – еквівалентна система;
г – переміщення точки B від сили F ; **д** – переміщення точки B від сили $\bar{X}_1 = 1$

Як зайвий зв'язок виберемо шарнірно-рухому опору B , тоді основна система для балки виглядатиме, як показано на рис. 2.11 б. Оскільки тепер в точці B балка має довільне лінійне зміщення вдовж осі y , в еквівалентній системі (рис. 2.11 в) виникає невідоме зусилля X_1 (що фактично являє собою реакцію рухомої опори B). Від зовнішньої сили F в основній системі точка B отримає переміщення Δ_{1F} (рис. 2.11 г). Таке ж за значенням, але зворотне за напрямком переміщення точки B повинна здійснити

невідома сила X_1 . Прирівняємо до нуля повне переміщення точки B еквівалентної системи в напрямі X_1 :

$$\Delta_1 = \Delta_1(F, X_1) = 0, \quad (2.3)$$

або, застосовуючи принцип незалежності дії сил:

$$\Delta_1 = \Delta_{1F} + \Delta_{11} = 0, \quad (2.4)$$

де Δ_{1F} – переміщення від заданого навантаження (рис. 2.11 г); Δ_{11} – переміщення від невідомої сили X_1 .

Будемо вважати, що при малих деформаціях переміщення Δ_{11} лінійно залежить від зусилля X_1 . Тому, приклавши замість невідомої сили X_1 співспрямовану одиничну силу $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 2.11 д), отримаємо:

$$\Delta_{11} = \delta_{11} \cdot X_1, \quad (2.5)$$

де δ_{11} – переміщення в напрямі X_1 від сили $\bar{X}_1 = 1$.

З урахуванням (2.5) рівняння (2.4) набуває вигляду

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0, \quad (2.6)$$

що являє собою канонічну форму рівняння переміщень для один раз статично невизначуваної системи. Очевидно, невідоме зусилля X_1 визначиться як

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}. \quad (2.7)$$

Коефіцієнти Δ_{1F} та δ_{11} рівняння (2.7) – переміщення, які визначаються за допомогою інтеграла Мора або за правилом Верещагіна.

Так, для системи на рис. 2.11 на підставі епюр, наведених на рис. 2.12, за правилом Верещагіна знаходимо:

$$EI_x \Delta_{1F} = [M_F \times \bar{M}_1]; \quad \Delta_{1F} = -\frac{1}{EI_x} \cdot \frac{\ell}{2 \cdot 6} \left(2F \frac{\ell}{2} \ell + F \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{2} \right) = -\frac{5F\ell^3}{48EI_x};$$

$$EI_x \delta_{11} = [\overline{M}_1 \times \overline{M}_1]; \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell \right) = \frac{\ell^3}{3EI_x};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{5}{16} F.$$

Знайшовши X_1 , ми розкрили статичну невизначуваність балки, то ж можемо побудувати сумарну епюру моментів системи (рис. 2.13), яка має надалі використовуватись для розрахунків на міцність і жорсткість.

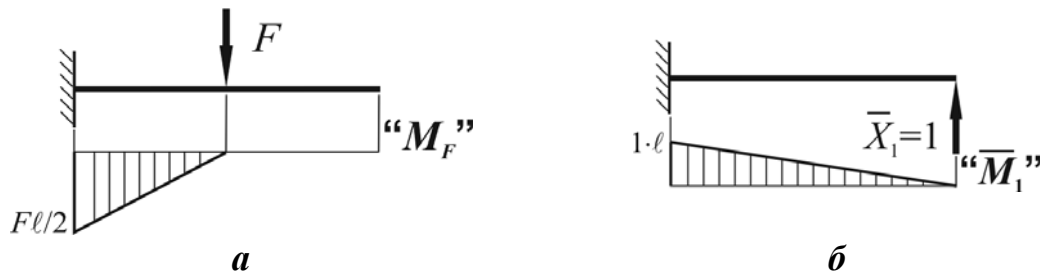


Рис. 2.12. Епюри моментів в системі, що представлена на рис. 2.11: **а** – вантажна; **б** – одинична

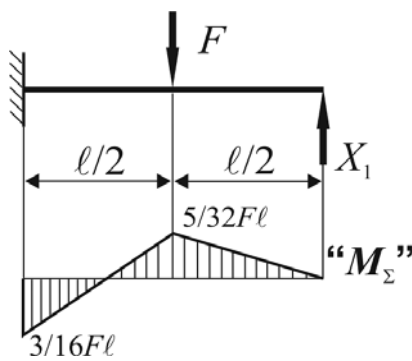


Рис. 2.13. Сумарна епюра моментів для балки, зображеної на рис. 2.11

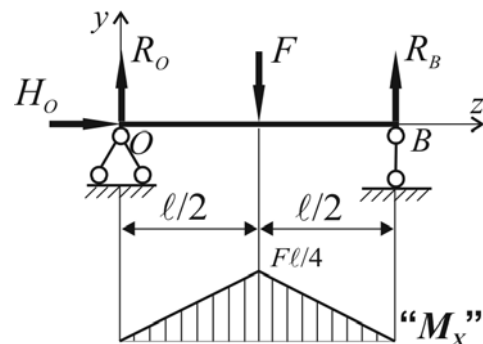


Рис. 2.14. Епюра моментів у статично визначуваній балці

Порівнюючи розглянуту С.Н.С. із практично «тотожною» С.В.С. на рис. 2.14, можна зробити важливий висновок, що має загальне значення: *С.Н.С. жорсткіші за С.В.С., мають менші максимальні згинальні моменти, прогини та кути поворотів, тому потребують менших розмірів поперечних перерізів.*

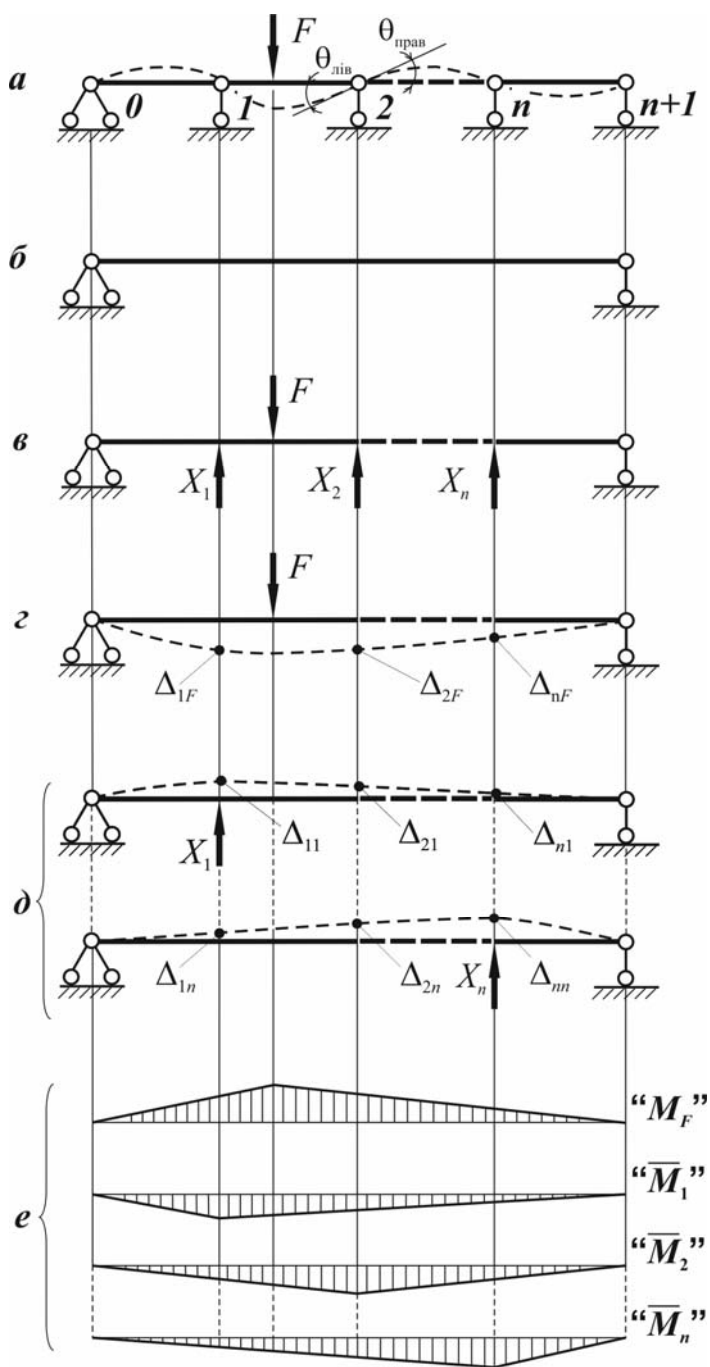


Рис. 2.15. Багатопрольотна статично невизначувана балка:
a – вихідна система; **б** – один з варіантів основної системи; **в** – відповідна еквівалентна система; **г** – переміщення від зовнішнього навантаження; **д** – прогини від невідомих зусиль X_i ; **е** – епюри моментів

На практиці досить широкий клас статично невизначуваних конструкцій утворюють багатопрольотні балки. Розглянемо більш загальний випадок статичної невизначуваності ступеню n на прикладі такої балки (рис. 2.15 а).

Опори багатопрольотних балок зазвичай нумерують. Балка на рис. 2.15 а має нерухомий шарнір на лівому краю (номер 0), рухомий шарнір на правому краю (номер $n+1$), а також n проміжних опор, пронумерованих зліва направо від 1 до n . Отже, ступінь статичної невизначуваності балки

$$C.C.H. = (n + 1) + 2 - 3 = n.$$

При виборі основної системи звернемо увагу на особливості закріплення та деформування балки, відмітивши таке (рис. 2.15а):

- проміжні опори балки не зміщуються по вертикалі;
- кути повороту балки по обидві сторони від будь-якого опорного шарніру є однаковими ($\theta_{\text{лів}} = \theta_{\text{прав}}$).

Ці дві властивості підказують два відповідні способи побудови основної системи. Перший з них базується на відкиданні зайвих зв'язків у вигляді проміжних опорних шарнірів (рис. 2.15 б).

Взамін відкинутих зв'язків в еквівалентній системі (рис. 2.15 в) прикладаються зосереджені сили $X_1, \dots, X_n$, які потрібні для відтворення істинної картини деформації системи та, очевидно, мають дорівнювати реакціям зайвих опор у вихідній системі. Це призводить до n рівнянь для переміщень опорних точок у вертикальному напрямку (рис. 2.15 г,д):

$$\begin{aligned}\Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0; \\ \Delta_2(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_n(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

які згідно із принципом суперпозиції можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}\Delta_{11} + \Delta_{12} + \dots + \Delta_{1n} + \Delta_{1F} &= 0; \\ \Delta_{21} + \Delta_{22} + \dots + \Delta_{2n} + \Delta_{2F} &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_{n1} + \Delta_{n2} + \dots + \Delta_{nn} + \Delta_{nF} &= 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

У рівняннях (2.9) Δ_{ik} , Δ_{iF} – переміщення i -ї точки від невідомої сили X_k та активного зовнішнього навантаження F відповідно. Переміщення Δ_{ik} від невідомого зусилля X_k можна визначити як добуток величини цього зусилля та переміщення δ_{ik} , спричиненого дією одиничної співспрямованої сили, тобто

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot X_k.\tag{2.10}$$

Тоді рівняння (2.9) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2F} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nF} &= 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Рівняння (2.11) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих $X_1, \dots, X_n$. Вона називається *системою канонічних рівнянь методу сил*. У скороченій формі її можна записати таким чином:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} \cdot X_k + \Delta_{iF} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.12)$$

де n – кількість зайвих зв'язків (ступінь статичної невизначуваності) системи.

Кожне рівняння системи (2.11)–(2.12) означає нульове вертикальне переміщення у відповідній опорній точці обраної еквівалентної (основної) системи (рис. 2.15 б,в), а максимальний індекс невідомих зусиль та кількість рівнянь системи дорівнюють ступеню статичної невизначуваності вихідної балки n .

У загальному випадку коефіцієнти δ_{ik} рівнянь (2.12) являють собою узагальнені переміщення i -ї опорної точки основної (статично визначуваної) системи від дії одиничного узагальненого зусилля $\bar{X}_k = 1$, прикладеного в k -й точці системи, а *вільні члени* Δ_{iF} визначають відповідні зміщення, викликані заданим зовнішнім навантаженням. Коефіцієнти з парними індексами δ_{ii} називаються *головними* та, за визначенням, є завжди додатними. Решта коефіцієнтів δ_{ik} зветься *побічними*, вони можуть бути як додатними, так і від'ємними. До того ж, за теоремою про взаємність переміщень (теоремою Бетті) $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Як коефіцієнти, так і вільні члени канонічних рівнянь методу сил (2.11)–(2.12) обчислюються за допомогою інтеграла Максвелла – Мора (1.28) або правила Верещагіна (1.35). Повертаючись до балки на рис. 2.15 та нехтуючи малими внеском поперечних сил у вертикальні переміщення, по спрощеній формулі інтеграла Мора (1.26) знаходимо:

$$\delta_{ik} = \sum_j \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EI_x} dz \quad (i \neq k); \quad \delta_{ii} = \sum_j \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_i}{EI_x} dz; \quad \Delta_{iF} = \sum_j \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{EI_x} dz, \quad (2.13)$$

при чому підсумування проводиться по ділянкам балки, в межах яких відповідні функції моментів мають незмінні аналітичні вирази.

Використання нотації «перемноження» епюр правила Верещагіна (1.36) дозволяє записати формули (2.13) дещо компактніше:

$$\delta_{ik} = \frac{[\overline{M}_i \times \overline{M}_k]}{EI_x} (i \neq k), \quad \delta_{ii} = \frac{[\overline{M}_i \times \overline{M}_i]}{EI_x}, \quad \Delta_{iF} = \frac{[\overline{M}_i \times M_F]}{EI_x}. \quad (2.14)$$

При визначенні епюр моментів у формулах (2.14) зазвичай діють таким чином. Спочатку обчислюють вантажну епюру моментів M_F від зовнішнього навантаження в основній системі (рис. 2.15 г). На другому етапі замість невідомих зусиль X_i до основної системи по черзі прикладають сили $\overline{X}_i = 1$ (рис. 2.15 д) та будують одиничні епюри $\overline{M}_i$.

Характерний вигляд епюр моментів для основної системи рис. 2.15 б наведений на рис. 2.15 е і свідчить про нераціональність такого її вибору, зокрема, через те, що у даному випадку вантажна та одиничні епюри моментів охоплюють усі без винятку прольоти балки. Це призведе до значної кількості складників в правих частинах формул (2.13) та (2.14), а разом із тим – до великої кількості обчислень. Тому спробуємо побудувати нову основну систему із використанням іншої особливості деформування балки, а саме – однакових кутів повороту по обидві сторони від будь-якої проміжної опори (рис. 2.16).

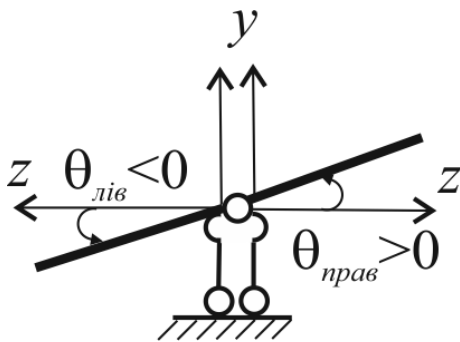


Рис. 2.16. Поворот балки на проміжній опорі

Знаки кутів повороту залежать від системи координат, в якій вони вимірюються. В правоїгвинтовій системі координат, що «діє» справа від опори на рис. 2.16, кут повороту балки $\theta_{\text{прав}}$ є додатним, адже проходить проти годинникової стрілки від недеформованого стану до положення після деформації. У лівоїгвинтовій системі лівої частини балки на рис. 2.16 кут повороту $\theta_{\text{лів}}$ є, навпаки, від'ємним (взагалі, знак кута повороту можна легко встановити за знаком його тангенсу). Разом із тим очевидно, що з умови нерозривності переміщень значення кутів повороту по обидві сторони від опори мають бути рівними, тобто $|\theta_{\text{лів}}| = |\theta_{\text{прав}}|$. Таким чином, сумісність кутових переміщень на проміжній опорі балки вимагає, щоб алгебраїчна сума кутів повороту зліва та справа, або так званий «взаємний» кут повороту на опорі, дорівнювали нулю: $\theta_{\text{лів}} + \theta_{\text{прав}} = 0$.

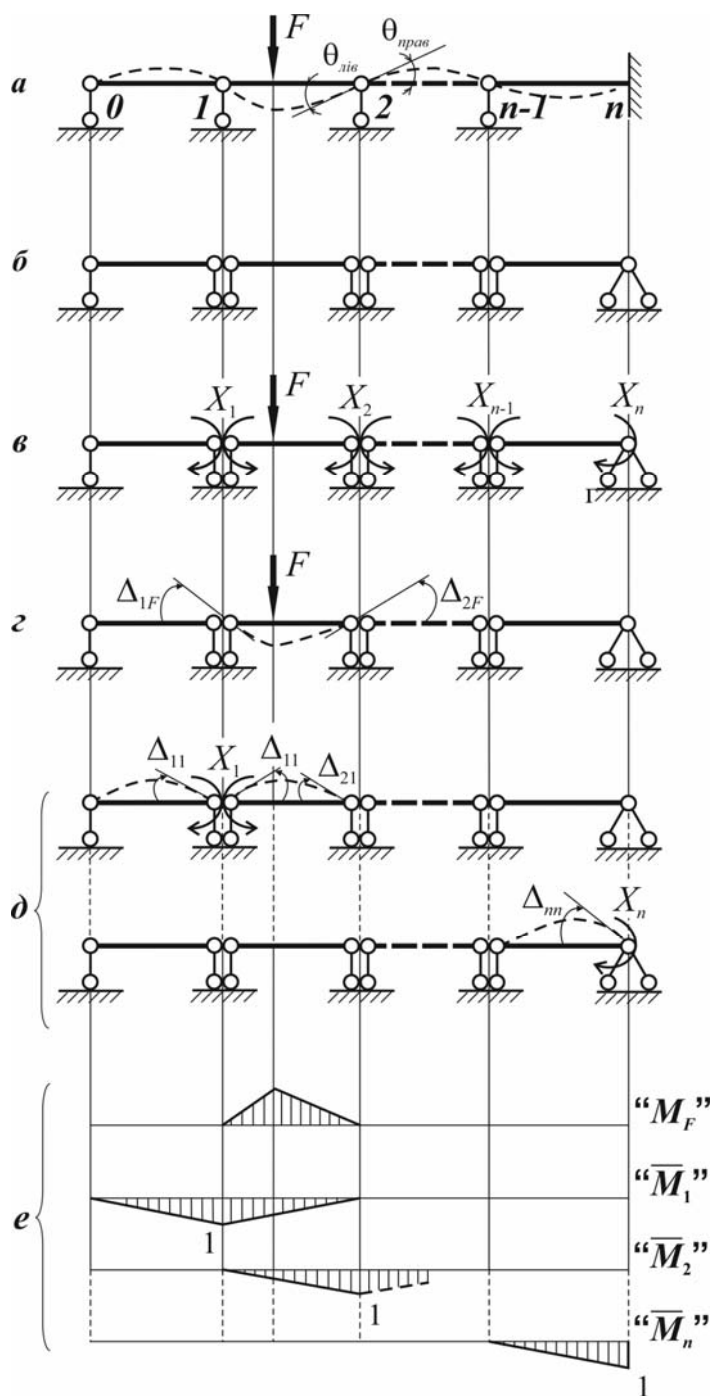


Рис. 2.17. Багатопрольотна статично невизначувана балка:
a – вихідна система; **б** – основна система;
в – відповідна еквівалентна система;
г – переміщення від зовнішнього навантаження; **д** – прогини від невідомих моментів X_i ; **е** – епюри моментів

Розглянемо статично невизначувану багатопрольотну балку на рис. 2.17 а, проміжні опори якої пронумеровані від 1 до $n-1$, а правий край жорстко защемлений.

Ступінь статичної невизначуваності балки:

$$C.C.H. = (n-1) + 4 - 3 = n.$$

Цього разу основну систему для балки утворимо таким чином: спочатку замінимо жорстке защемлення справа на нерухомий шарнір, а потім розділимо балку на низку однопрольотних або одноконсольних балок шляхом її розрізання та встановлення додаткових шарнірів на кожній проміжній опорі (рис. 2.17 б). Відкинувши таким чином n «зайвих» кутових зв'язків, отримаємо статично визначувану основну систему, в якій кути повороту на проміжних шарнірах та на правому краю можуть бути довільними, а вертикальні та горизонтальні лінійні зв'язки залишаються тими ж самими, що й у вихідній балці.

У відповідній еквівалентній системі в місцях розрізів потрібно прикласти невідомі моменти $X_1, \dots, X_{n-1}$, покликані вирівняти кути повороту суміжних прольотів балки і зробити їх такими ж, як у вихідній системі (рис. 2.17 в). Згідно з методом перерізів, на кожній з проміжних опор ці моменти мають бути взаємними, тобто однаковими за значенням та протилежно спрямованими. Також на правій опорі балки треба прикласти невідомий момент X_n , що відповідає реакції жорсткого защемлення (рис. 2.17 в).

У новій еквівалентній (основній) системі канонічні рівняння методу сил (2.11) або (2.12) набувають іншого фізичного змісту. Перші $n-1$ рівнянь канонічної системи означають нульові взаємні кути повороту балки на проміжних опорах, останнє рівняння – нульовий кут повороту балки у жорсткому защемленні на правому її краю. Але не менш важливим з практичної точки зору є значне скорочення обчислень при визначенні коефіцієнтів канонічних рівнянь за формулами (2.13) або (2.14) при такому виборі основної системи.

Розглянемо процес підрахунку коефіцієнтів детальніше із застосуванням правила Верещагіна на основі формул (2.14). Для цього скористуємось принципом суперпозиції та послідовно прикладемо до основної системи спочатку зовнішнє навантаження (рис. 2.17 г), а потім – по черзі – одиничні парні моменти X_i (рис. 2.17 д). Вантажна епюра моментів M_F від зовнішнього навантаження будується для кожного статично визначуваного прольоту основної системи окремо, а одиничні епюри моментів $\overline{M}_i$ мають характерний трикутний компактний вигляд, адже вони є відмінними від нуля тільки в межах прольотів, що примикають до відповідної шарнірної опори (рис. 2.17 е).

Таким чином, при даному виборі основної системи кількість складників у правих частинах формул (2.14) помітно зменшується. При обчисленні вільних членів Δ_{iF} рівнянь (2.11)–(2.12) можуть бути використані дані таблиці 1.1, тоді як підрахунок коефіцієнтів δ_{ik} відбувається, як правило, ще простіше.

По-перше, треба відмітити, що, коли індекси одиничних епюр моментів відрізняються більше, ніж на одиницю, тоді ці епюри взагалі «не перекриваються» одна одною по вертикалі (як, наприклад, епюри $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_n$ на рис. 2.17 е), отже, їх добуток має дорівнювати нулю. Тому в даному випадку коефіцієнти канонічних рівнянь відповідають умові:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & |i-k| \leq 1; \\ 0, & |i-k| > 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Властивість (2.15) призводить до того, що в кожному рівнянні системи (2.11)–(2.12) відмінними від нуля є тільки головний δ_{ii} та два найближчі побічні коефіцієнти – δ_{ii-1} і δ_{ii+1} (окрім першого та останнього рівнянь, в яких відповідно лівий та правий побічні коефіцієнти будуть відсутні). Такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають тридіагональними, а для їх розв’язку існують спеціальні методи (як, наприклад, метод прогонки), що дозволяють значно прискорити обчислення, особливо для систем великої розмірності.

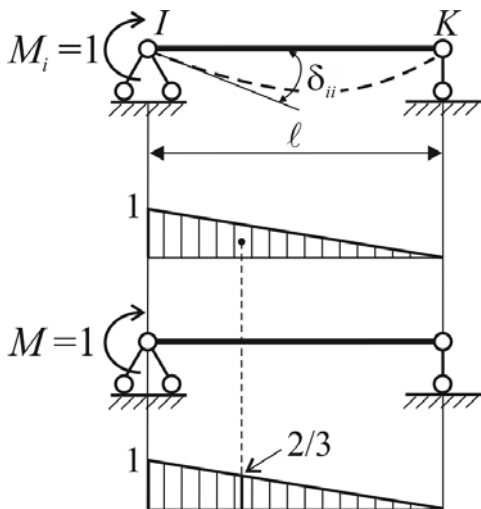


Рис. 2.18. Перемноження «співспрямованих» прямокутних трикутників

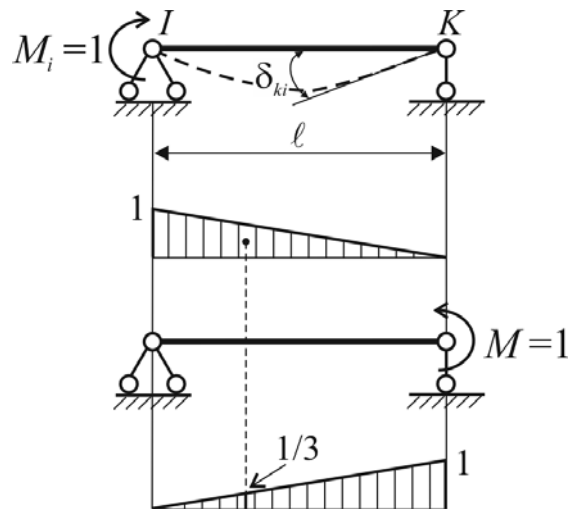


Рис. 2.19. Перемноження «протиспрямованих» прямокутних трикутників

По-друге, в обраному варіанті основної системи визначення ненульових коефіцієнтів δ_{ik} системи рівнянь (2.11)–(2.12) за правилом Верещагіна (2.14) зводиться до двох нескладних випадків: при обчисленні головних коефіцієнтів δ_{ii} треба «множити» прямокутні трикутники одиначної висоти самих на себе (рис. 2.18), а для підрахунку побічних коефіцієнтів δ_{ik} необхідно обчислювати добутки «різноспрямованих» прямокутних трикутників одиначної висоти (рис. 2.19). Відповідно, в першому випадку матимемо:

$$EI_x \delta_{ii} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell_i \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell_{i+1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\ell_i + \ell_{i+1}}{3}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.16)$$

тоді як у другому:

$$EI_x \delta_{i,i+1} = EI_x \delta_{i+1,i} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell_{i+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\ell_{i+1}}{6}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (2.17)$$

Визначивши з розв'язку системи (2.11)–(2.12) невідомі узагальнені зусилля X_i , слід побудувати сумарну епюру моментів для статично невизначуваної системи. Це можна зробити двома способами:

- застосовуючи метод перерізів до еквівалентної системи з визначеними зусиллями X_i ;
- на основі принципу суперпозиції за формулою

$$M_\Sigma = M_F + \sum_{i=1}^n \overline{M}_i \cdot X_i, \quad (2.18)$$

тобто шляхом складання вантажної епюри M_F та одиничних епюр моментів $\overline{M}_i$, помножених на відповідні зусилля X_i з урахуванням знаків останніх (адже від'ємне значення зусилля свідчить про помилковий вибір напрямку одиничного навантаження).

Сумарна епюра моментів M_Σ повинна відповідати усім обмеженням, які має статично невизначена система з боку накладених на неї зовнішніх та внутрішніх зв'язків. Цей факт можна використати для перевірки побудованої епюри M_Σ .

Найбільш ефективною перевіркою правильності рішення задачі є деформаційна (кінематична) перевірка. Вона полягає у визначенні переміщень системи у напрямках існуючих зв'язків, результатом чого має бути нуль, адже всі опорні точки системи повинні мати нульові переміщення в напрямках відповідних зовнішніх зв'язків, а всі точки розрізу – нульові взаємні переміщення. Для здійснення перевірки треба перемножити по правилу Верещагіна сумарну епюру моменту M_Σ (яка в статично невизначуваній системі виконує роль вантажної епюри M_F) на будь-яку одиничну епюру $\overline{M}_i$, побудовану у довільній основній системі (для виключення систематичної помилки при перевірці навіть рекомендується

використовувати іншу основну систему, яка не брала участі у розв'язанні задачі). Якщо при розкритті статичної невизначуваності системи мало місце округлення, результатом перевірки буде не точний нуль, а мале число, тобто

$$\Delta_i = \frac{1}{EI_x} \cdot [M_\Sigma \times \overline{M}_i] \approx 0, \quad (2.19)$$

в разі чого перевірка вважається пройденою, якщо відносна похибка результату (2.19) не перевищує 5%.

Для статично невизначуваних рамних конструкцій слід також перевірити виконання умов статичної рівноваги вузлів рами. Для цього необхідно вирізати кожний вузол рами (рис. 2.20 а) і дію відкинутих частин замінити моментами, які треба взяти з епюри M_Σ (рис. 2.20 б). При цьому стрілки, що позначають напрямки згинання, слід направляти у бік стиснутих волокон, що на них вказують побудовані епюри згинальних моментів. Алгебраїчна сума моментів повинна дорівнювати нулю:

$$\sum_i M_i = M_3 - M_1 - M_2 = 0. \quad (2.20)$$

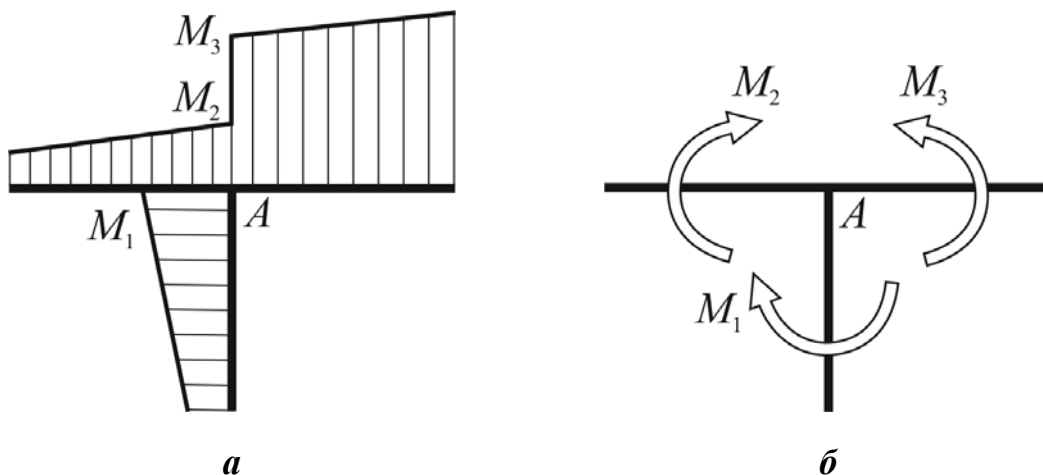


Рис. 2.20. Перевірка статичної рівноваги вузла рами:
а – сумарна епюра моментів поблизу вузла;
б – вирізаний вузол рами під дією внутрішніх моментів

2.4. Використання симетрії стрижневої системи

При наявності геометричної симетрії стрижневої системи (прямої або косої) можна значно спростити розв'язання задачі і знизити число розшукуваних силових факторів: $X_1, X_2, \dots, X_n$. Таке спрощення досягається переведенням зовнішньої статичної невизначуваності у внутрішню.

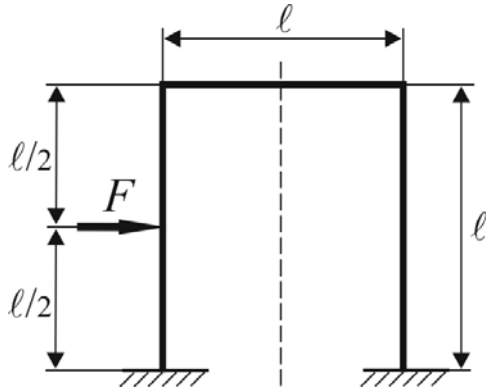


Рис. 2.21. Плоска симетрична рама

Розглянемо плоску раму, зображену на рис. 2.21. Вона має вертикальну вісь симетрії і є тричі зовнішньо статично невизначуваною. Канонічні рівняння методу сил (2.11)–(2.12) для тричі статично невизначуваної системи мають вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

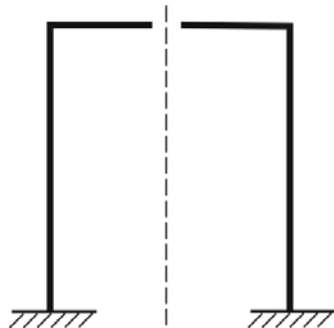


Рис. 2.22. Основна система рами, що зображена на рис. 2.21

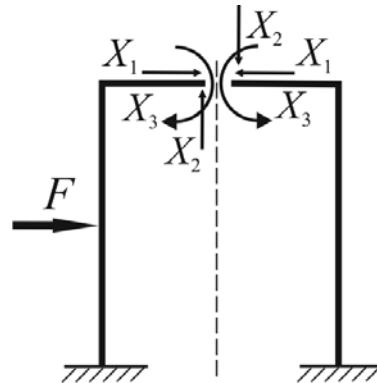


Рис. 2.23. Еквівалентна система рами, що зображена на рис. 2.21

Спробуємо утворити основну систему рами шляхом її розрізання по осі симетрії (рис. 2.22). Еквівалентну систему отримаємо, приклавши зовнішнє навантаження і три парні невідомі зусилля: X_1, X_2, X_3 , що мають забезпечити сумісність горизонтальних та вертикальних переміщень, а також кутів повороту берегів розрізу відповідно (рис. 2.23).

Можна помітити, що невідомі зусилля X_1 та X_3 симетричні відносно осі рами, тоді як зусилля X_2 антисиметрично, або має так звану косу симетрію. Згідно з процедурою методу сил побудуємо вантажну та оди-

ничні епюри моментів в основній системі, замінивши відповідні невідомі зусилля на одиничні (рис. 2.24). Неважко бачити, що симетричним зусиллям $\bar{X}_1$ та $\bar{X}_3$ відповідають симетричні епюри $\bar{M}_1$ і $\bar{M}_3$, а кососиметричній силі $\bar{X}_2$ – кососиметрична епюра $\bar{M}_2$.

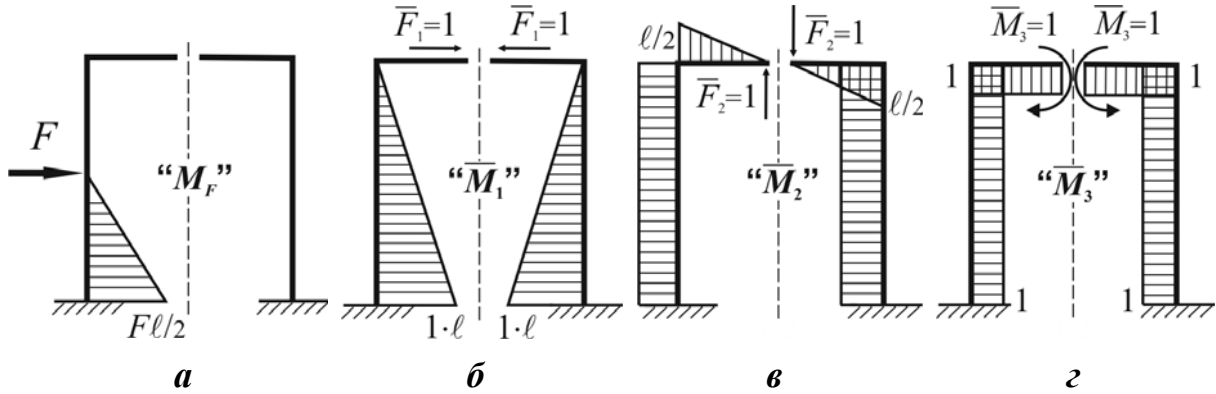


Рис. 2.24. Епюри моментів для системи, зображеної на рис. 2.22, 2.23:
а – вантажна; **б** – одинична від сили $\bar{X}_1 = 1$; **в** – одинична від сили $\bar{X}_2 = 1$;
г – одинична від моменту $\bar{X}_3 = 1$

Застосовуючи правило Верещагіна до визначення коефіцієнтів системи (2.21), можна відразу записати:

$$\begin{aligned} EI_x \delta_{12} = EI_x \delta_{21} &= [\bar{M}_1 \times \bar{M}_2] = 0; \\ EI_x \delta_{23} = EI_x \delta_{32} &= [\bar{M}_2 \times \bar{M}_3] = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

адже самий геометричний зміст цього правила дозволяє стверджувати, що *добуток симетричної та кососиметричної епюр завжди призводить до нульового результату*.

З урахуванням (2.22) система канонічних рівнянь (2.21) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Оскільки X_2 можна відразу визначити із другого рівняння системи (2.23) незалежно від інших невідомих, маємо спрощення системи трьох рівнянь для трьох невідомих (2.21) до системи з двома невідомими: X_1 та X_3 , що представлена першим та третім рівняннями (2.23). Таким чином, розмірність системи канонічних рівнянь знизилася на одиницю, відповідно на одиницю зменшилася і ступінь статичної невизначуваності системи.

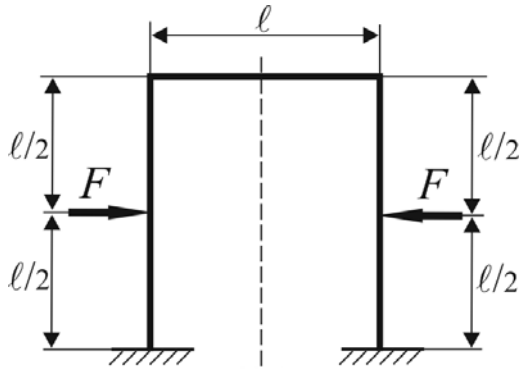


Рис. 2.25. Приклад симетричного навантаження рами

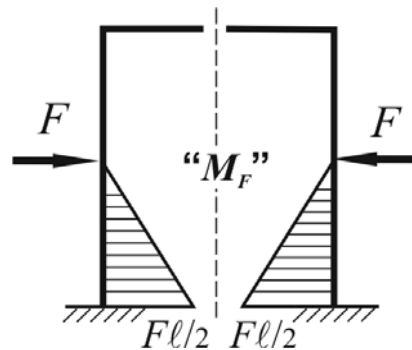


Рис. 2.26. Вантажна епюра M_F від симетричного навантаження

У разі, якщо зовнішнє навантаження рами є симетричним (рис. 2.25), вантажна епюра моментів M_F в обраній основній системі теж симетрична (рис. 2.26) і у добутку з косиметричною епюрою $\bar{M}_2$ дає

$$EI_x \Delta_{2F} = [\bar{M}_2 \times \bar{M}_F] = 0, \quad (2.24)$$

що на підставі другого рівняння системи (2.23) призводить до $X_2 = 0$.

Отриманий результат є наслідком загального правила, яке можна сформулювати таким чином. *Якщо механічна система симетрична геометрично і по навантаженню, в площині її симетрії мають бути відсутні косиметричні силові фактори. І навпаки, якщо симетричну систему завантажити косиметрично, тоді в площині її симетрії симетричні силові фактори дорівнюватимуть нулю.*

Продемонструємо справедливості останнього твердження на прикладі рами під косиметричним навантаженням (рис. 2.27), що у обраній основній системі рами призводить до епюри моменту M_F , наведеної на рис. 2.28.

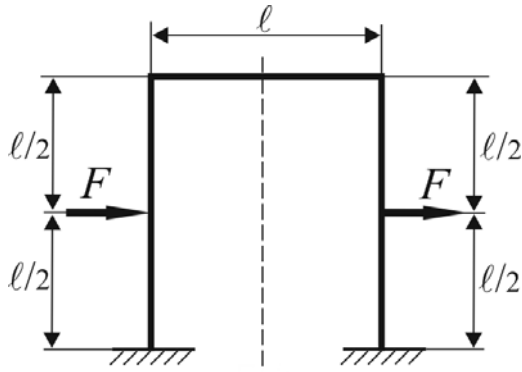


Рис. 2.27. Приклад кососиметричного навантаження рами

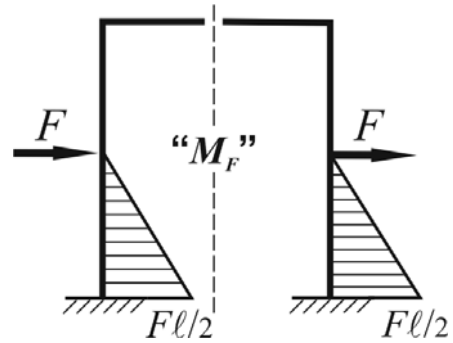


Рис. 2.28. Вантажна епюра M_F від кососиметричного навантаження

В такому разі, очевидно, $\Delta_{1F} = \Delta_{3F} = 0$, а рівняння (2.21) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

звідки відразу ж витікає, що $X_1 = X_3 = 0$.

Взагалі будь-яке навантаження, прикладене до симетричної рами, можна розкласти на симетричне та кососиметричне (рис. 2.29). Задача в цьому разі розпадається на дві частини, а невідомі зусилля X_1, X_2, X_3 визначаються як суперпозиція обох рішень.

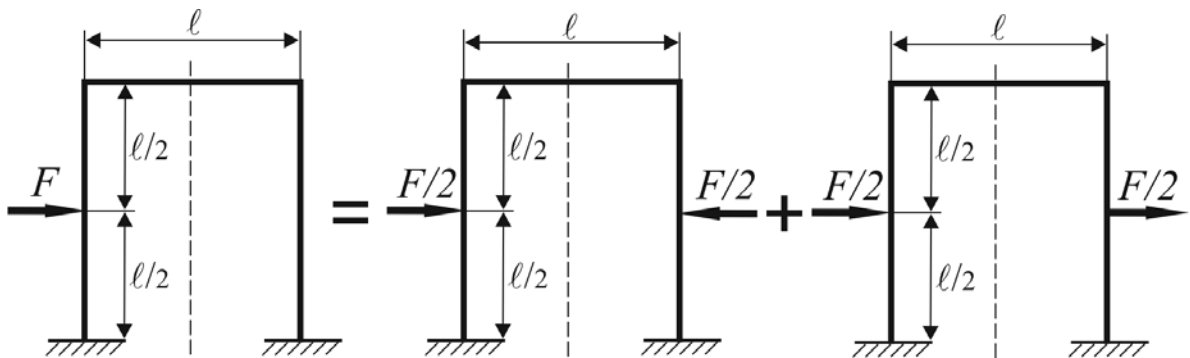


Рис. 2.29. Представлення зовнішнього навантаження у вигляді суми симетричної та кососиметричної складових

2.5. Плоско-просторові статично невизначувані стрижневі системи

Плоско-просторові рами належать до плоских стрижневих конструкцій, що їх зовнішнє навантаження діє у площинах, не співпадаючих з площиною самої рами. В таких випадках прийнято розкладати зовнішні сили на компоненти у площині рами (позначаються індексом H) та ортогональні до неї (отримують індекс V).

Нехай площина рами співпадає з площиною xz системи координат. Тоді від навантаження у площині рами в її поперечних перерізах відмінними від нуля будуть внутрішні силові фактори M_y , Q_x , N , які діють саме у цій площині, а решта внутрішніх зусиль будуть відсутні, тобто $M_x = M_z = Q_y = 0$ (рис. 2.30 а). У протилежному випадку, коли навантаження є ортогональним до площини конструкції, в її перерізах виникатимуть відповідні внутрішні силові фактори M_x , M_z , Q_y , а інші зусилля дорівнюватимуть нулю: $M_y = Q_x = N = 0$ (рис. 2.30 б).

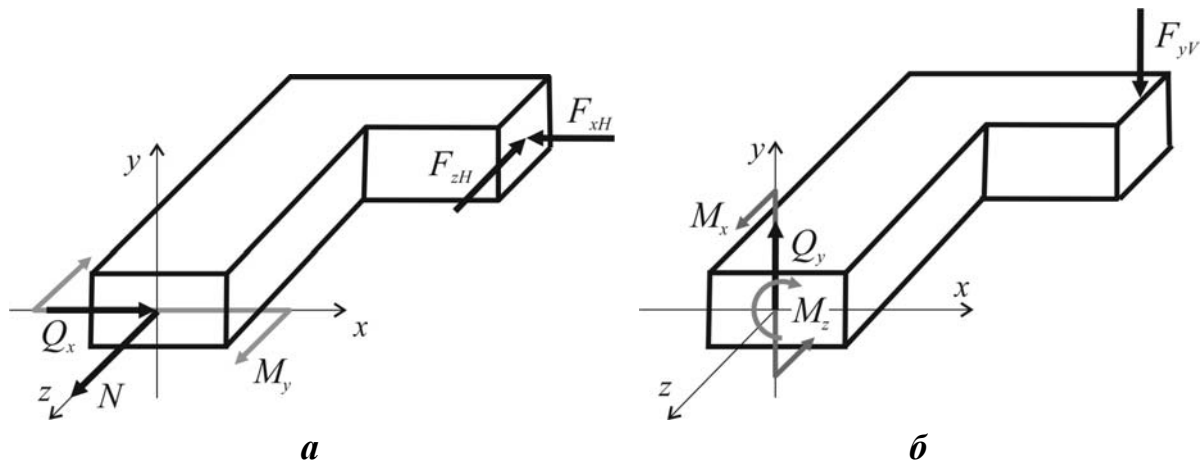


Рис. 2.30. Зовнішнє навантаження і внутрішні зусилля у плоско-просторовій рамі: **а** – в площині рами; **б** – ортогонально до власної площини

То ж якщо до плоскої рами прикладені довільні просторові зовнішні сили, систему внутрішніх зусиль завжди можна розділити на дві вищевказані групи. Згідно з принципом незалежності дії зусиль загальне рішення такої комплексної задачі є суперпозицією результатів, отриманих для плоскої рами під плоским (H), та антиплоским (V) завантаженнями.

Так само і ступінь статичної невизначуваності n плоско-просторової рами складається з відповідних характеристик двох рішень:

$$n = n_1 + n_2, \quad (2.26)$$

де n_1, n_2 – кількість зайвих зв'язків, накладених в площині рами та ортогональних до неї відповідно, які, в свою чергу, обчислюються як

$$n_1 = n_1^* - 3; \quad n_2 = n_2^* - 3. \quad (2.27)$$

У співвідношеннях (2.27) n_1^*, n_2^* – загальна кількість зв'язків, накладених на раму у її власній площині і ортогональних до неї відповідно.

Аналогічним чином система канонічних рівнянь методу сил також розпадається на дві незалежні системи:

$$\sum_{k=1}^{n_1} \delta_{ik} X_k + \Delta_{iF_H} = 0, \quad i = (\overline{1, n_1}); \quad (2.28)$$

$$\sum_{m=1}^{n_2} \delta_{jm} X_m + \Delta_{jF_V} = 0, \quad j = (\overline{1, n_2}), \quad (2.29)$$

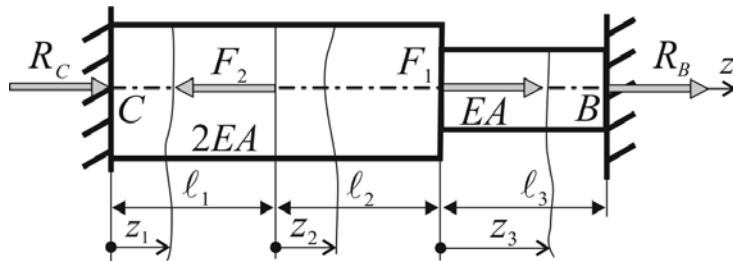
де X_k – невідомі узагальнені зусилля в площині рами; X_m – невідомі сили та моменти, перпендикулярні до площини рами.

У випадку, коли зовнішнє навантаження є антиплоским ($F = F_V, F_H = 0$), вантажні коефіцієнти «плоскої» системи (2.28) Δ_{iF_H} дорівнюють нулю, що призводить до нульових рішень для зусиль X_k в площині рами. Тому в цьому разі елементи плоскої рами «працюють» на кручення і згинання в напрямках, ортогональних до її площини, а значення коефіцієнтів в канонічних рівняннях системи (2.29), згідно з формулами (1.35) та (2.14), будуть залежати від співвідношення згинальної EI_x та крутильної GI_k жорсткостей елементів стрижневої конструкції.

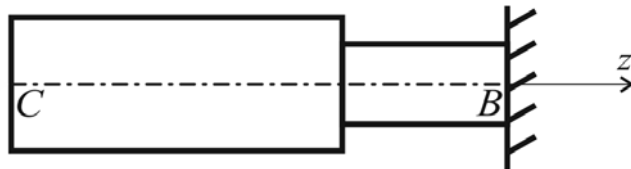
Ненульовий згинальний момент M_x означає наявність нормальних напружень σ , а крутний момент M_k – присутність дотичних напружень τ . Таким чином, напружений стан плоско-просторової рами є складним і потребує обчислення відповідних еквівалентних напружень згідно із обраною гіпотезою міцності (як правило, III або IV).

2.6. Розв'язання статично невизначуваних задач розтягання-стискування

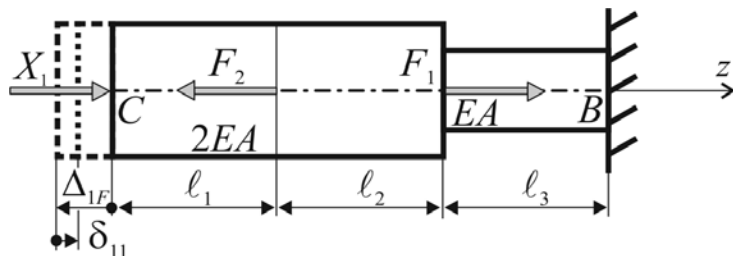
Метод сил є одним з найбільш універсальних методів механіки. Зокрема, він з успіхом може бути застосований в задачах розтягання-стискування стрижнів. Розглянемо це на прикладі розрахунку статично невизначуваного бруса (рис. 2.31 а), традиційне розв'язання якого наводиться в [3] (стор. 69).



а



б



в

Рис. 2.31. Статично невизначуваний брус:
а – вихідна система; **б** – основна система;
в – еквівалентна система

Вихідні дані приймаємо ті ж самі, що і в оригінальній задачі [3]:

$$F_1 = 200 \text{ кН}; F_2 = 500 \text{ кН};$$

$$l_1 = 0,4 \text{ м}; l_2 = 0,4 \text{ м};$$

$$l_3 = 0,1 \text{ м}.$$

1) Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності:

$$n = 2 - 1 = 1.$$

2) Канонічне рівняння методу сил для даної задачі має вигляд

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0, \quad (2.30)$$

де невідоме зусилля X_1 фактично являє собою реакцію лівої опори R_C .

3) Основну систему отримаємо, відки-

нувши ліву опору стрижня в точці C (рис. 2.31 б). Відповідна еквівалентна система показана на рис. 2.31 в.

4) Використовуючи принцип суперпозиції, прикладаємо в основній системі спочатку тільки зовнішнє навантаження і будуємо вантажну епюру N_F (рис. 2.32).

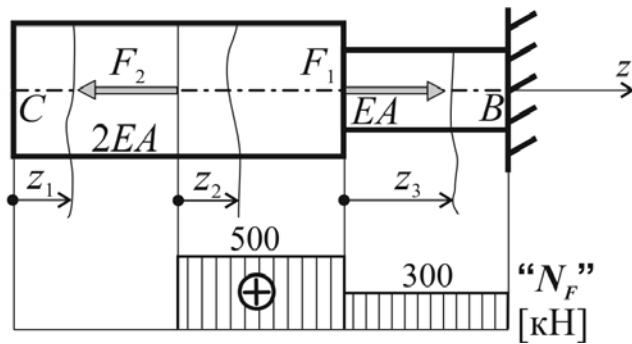


Рис. 2.32. Основна система під зовнішнім навантаженням та епюра N_F

5) Тепер навантажимо основну систему одиничною силою $\bar{X}_1$ у напрямку невідомого зусилля X_1 та визначимо відповідну одиничну епюру $\bar{N}_1$ (рис. 2.33).

6) Обчислюємо коефіцієнти рівняння (2.29) за правилом Верещагіна:

$$\delta_{11} = [\bar{N}_1 \times \bar{N}_1] = \frac{1}{2EA} (1 \cdot 0.4 \cdot 1 + 1 \cdot 0.4 \cdot 1) + \frac{1}{EA} (1 \cdot 0.1 \cdot 1) = \frac{0.5}{EA};$$

$$\Delta_{1F} = [\bar{N}_1 \times N_F] = -\frac{1}{2EA} (500 \cdot 0.4 \cdot 1) - \frac{1}{EA} (300 \cdot 0.1 \cdot 1) = -\frac{130}{EA}$$

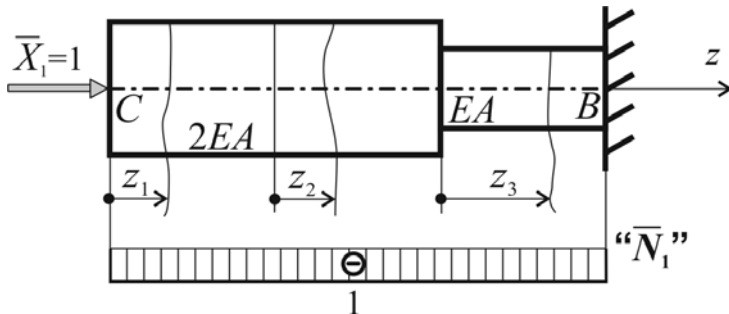


Рис. 2.33. Основна система під одиничним навантаженням та епюра $\bar{N}_1$

та визначаємо шукану реакцію:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{130}{0.5} = 260 \text{ kN}.$$

7) Наприкінці рішення масштабуємо епюру $\bar{N}_1$, домножуючи її на X_1 , та будуємо результуючу (сумарну) епюру поздовжніх сил в стрижні (рис. 2.34):

$$N_{\Sigma} = N_F + \bar{N}_1 \cdot X_1.$$

Як видно, вона повністю співпадає з результатом, отриманим в [3].

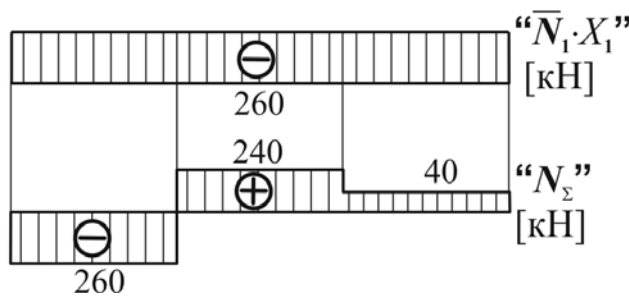


Рис. 2.34 Епюра поздовжніх сил для бруса

Зауважимо, що рівняння (2.30) у даному випадку відіграє роль умови сумісності деформацій в класичному рішенні [3]. Фізичним змістом рівняння (2.30) є нульове осьове переміщення перерізу C стрижня внаслідок жорсткого закріплення.

У разі існування додаткових факторів у вигляді зазору (натягу) або температурного розширення (зменшення), рівняння (2.30) методу сил слід доповнити, додавши в алгебраїчну суму переміщень ще одну складову:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} + \delta = 0, \quad (2.31)$$

де δ – додаткове подовження бруса в основній системі (рис. 2.31 б), обумовлене недосконалістю його виготовлення або зміною температури. Іншими словами, це є переміщення, яке здійснив би торець бруса C при звільненні від закріплення та внаслідок вказаних факторів. Знак δ відповідає знаку деформації, тобто в разі подовження (нагрів або натяг) $\delta > 0$, а при скороченні (охолодження або зазор) – $\delta < 0$. Якщо має місце одночасна комбінація додаткових факторів, то δ – їх алгебраїчна сума.

Вплив додаткових факторів можна також розглядати незалежно від зовнішнього навантаження. Відповідне рівняння безпосередньо впливає з (2.31), якщо покласти $\Delta_{1F} = 0$. Тоді для визначення додаткових сил, обумовлених наявністю в системі монтажних або температурних відхилень, отримаємо формулу

$$X_1^\delta = -\frac{\delta}{\delta_{11}}. \quad (2.32)$$

Знак мінус у формулі (2.32) підкреслює той факт, що переміщення δ торця бруса в разі його відкріплення та відповідне реактивне зусилля X_1^δ завжди різноспрямовані (адже друге компенсує перше).

При сумісній дії зовнішнього навантаження та додаткових факторів статична невизначуваність бруса може, очевидно, бути вирішена у вигляді суперпозиції розв’язків цих двох задач. У результаті в довільному перерізі i бруса буде, зокрема, виконуватись:

$$N_{\Sigma i} = N_i(F) + N_i(\delta). \quad (2.33)$$

За допомогою методу сил можна також ефективно розв'язувати статично невизначені задачі для стрижневих систем, які «працюють» на розтягання-стискання. Наприклад, розглянемо статично невизначувану стрижневу систему на рис. 2.35а, класичний розв'язок якої також представлений в [3] (стор. 43).

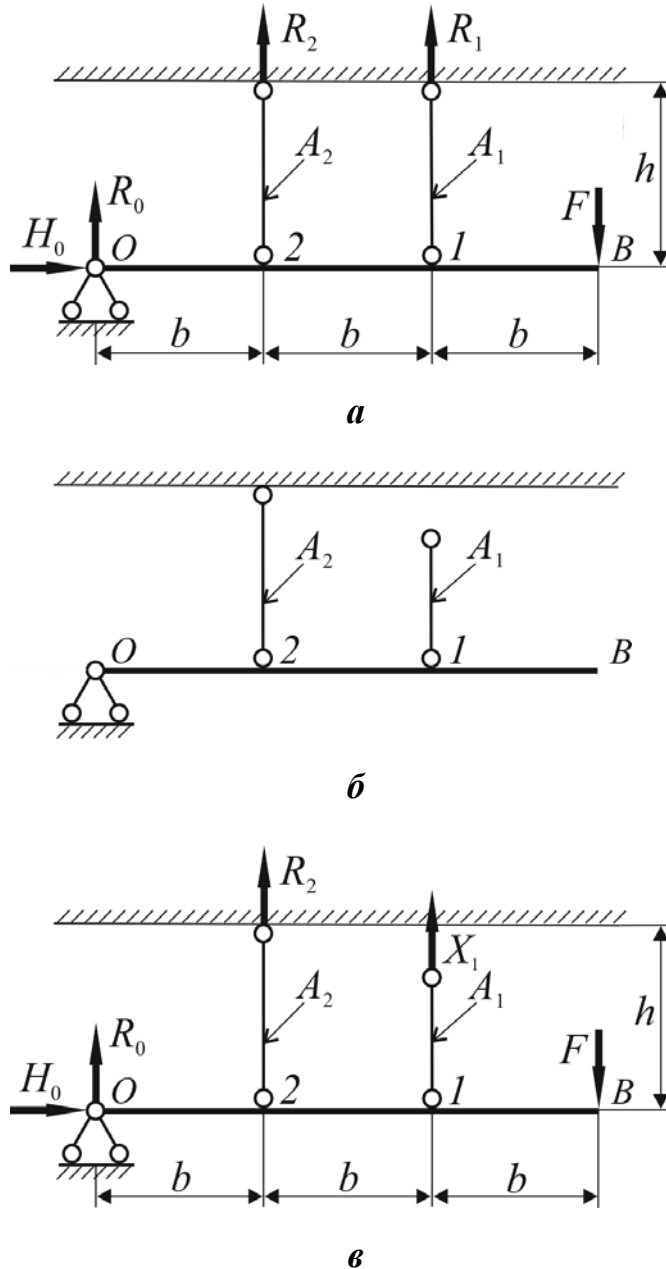


Рис. 2.35. Статично невизначена стрижнева система
(а – вихідна система; б – основна система;
в – еквівалентна система)

Жорстка балка OB в точці O спирається на нерухомий шарнір, а до стелі вона закріплена двома металевими стрижнями з площею поперечного перерізу A_1 та A_2 відповідно. У точці B балка навантажена силою F . Необхідно визначити внутрішні зусилля в стрижнях.

1) Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи. Невідому за напрямом реакцію нерухомого шарніра O зображуємо у вигляді її компонентів R_O та H_O у вертикальному та горизонтальному напрямках відповідно.

Стрижні 1 і 2 є стрижнями-зв'язками, бо приймають та передають навантаження через кінцеві шарніри. Як відомо з теоретичної механіки, зусилля в таких елементах завжди спрямоване вздовж власної осі, то ж напрямки реакцій R_1 та R_2 заздалегідь відомі.

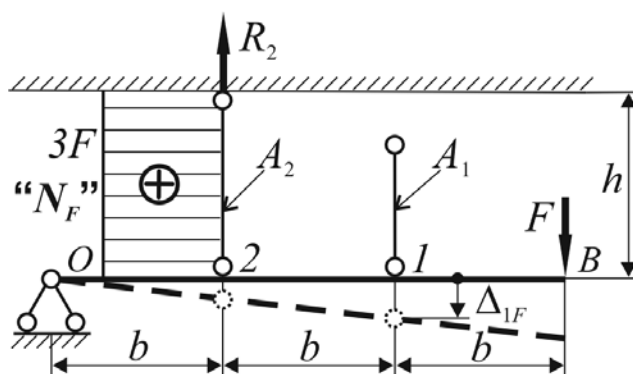


Рис. 2.36. Вантажна епюра N_F

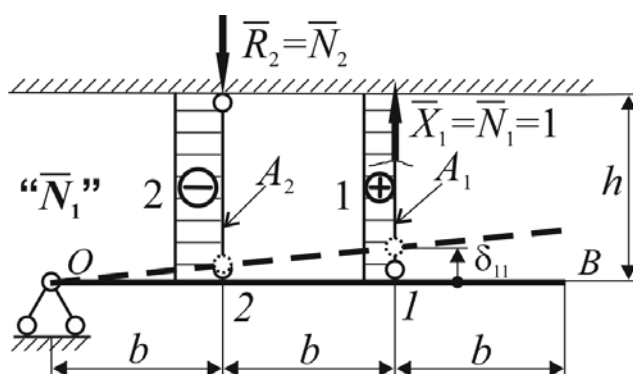


Рис. 2.37. Одинична епюра $\bar{N}_1$

Отже, ступінь статичної невизначуваності системи становить:

$$n = 4 - 3 = 1.$$

2) Канонічне рівняння методу сил для один раз статично невизначуваної системи має вигляд (2.30):

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

3) Для створення основної системи треба відкинути один «зайвий» зв'язок, наприклад, так, як показано на рис. 2.35 б. Тоді відповідна еквівалентна система матиме вигляд, зображений на рис. 2.35 в, причому невідома сила X_1 (що являє собою реакцію R_1) за

методом перерізів має дорівнювати внутрішньому зусиллю N_1 в стрижні 1. Так само, для стрижня 2 реакція R_2 може бути замінена на N_2 .

4) За принципом суперпозиції прикладаємо в основній системі спочатку зовнішнє навантаження та, визначивши зусилля N_2 з рівняння рівноваги

$$\sum M_O = 0: N_2 \cdot b - F \cdot 3b = 0; \quad N_2 = 3F,$$

будуємо вантажну епюру N_F (рис. 2.36).

5) Тепер розглянемо основну систему під дією одиничної сили $\bar{X}_1$, прикладеної у напрямку невідомого зусилля X_1 . Очевидно, для стрижня 1 маємо $\bar{N}_1 = \bar{X}_1 = 1$, тоді як для стрижня 2 з умови рівноваги одержимо:

$$\sum M_O = 0: -\bar{N}_2 \cdot b + \bar{X}_1 \cdot 2b = 0; \quad \bar{N}_2 = 2,$$

після чого зобразимо відповідну одиничну епюру поздовжніх сил (рис. 2.37).

б) За правилом Верещагіна знаходимо коефіцієнти канонічного рівняння методу сил:

$$\delta_{11} = [\bar{N}_1 \times \bar{N}_1] = \frac{4h}{EA_2} + \frac{h}{EA_1}; \quad EA_2 \delta_{11} = h \left(4 + \frac{A_2}{A_1} \right);$$

$$\Delta_{1F} = [N_1 \times N_F] = -\frac{6Fh}{EA_2}; \quad EA_2 \Delta_{1F} = -6Fh$$

та визначаємо невідоме зусилля: $X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{6Fh}{h(4 + A_2/A_1)}$.

У разі, якщо $A_1 = A_2$, $X_1 = \frac{6}{5}F$.

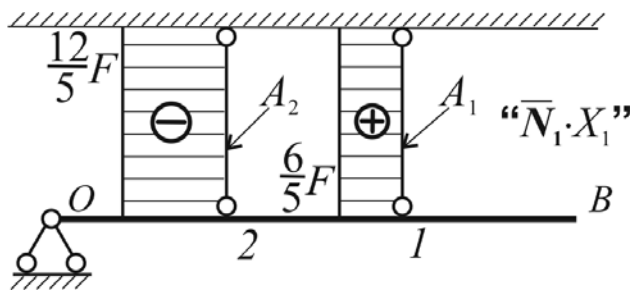


Рис. 2.38. Скоригована епюра $\bar{N}_1 \cdot X_1$

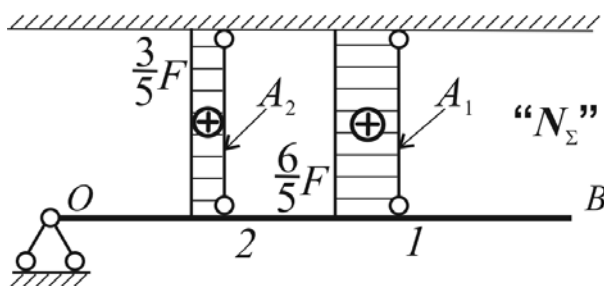


Рис. 2.39. Результируюча епюра N_Σ

7) На завершення, корегуємо одиничну епюру $\bar{N}_1$ шляхом її помноження на X_1 (рис. 2.38) та отримуємо сумарну (результируючу) епюру поздовжніх сил у системі (рис. 2.39):

$$N_\Sigma = N_F + \bar{N}_1 \cdot X_1$$

– результат, що співпадає з розв’язком [3].

Як і в попередній задачі, в стрижневій системі також можна врахувати додаткові фактори у вигляді зазору (натягу) або температурного розширення (зменшення) її елементів. Рівняння

методу сил у цьому разі доповнюються додатковими подовженнями δ елементів конструкції, які обумовлені недосконалістю виготовлення або наявністю перепадів температури.

2.7. Розв'язання статично невизначуваних задач кручення

З математичної точки зору статично невизначувана задача кручення є тотожною аналогічній задачі розтягання-стискання. Якщо замінити позовжні сили F_i на скручувальні моменти M_i , подовження Δl_i – на кути закручування $\Delta \varphi_i$, а жорсткості на розтягання-стискання EA_i – на крутильні жорсткості GI_{ki} , то вказані задачі – принаймні в частині розрахунку внутрішніх силових факторів – повністю співпадають.

Розглянемо статично невизначувану задачу кручення (рис. 2.40 а), розібрану в [4] (стор. 80) на основі традиційної методики, та застосуємо до неї процедуру методу сил.

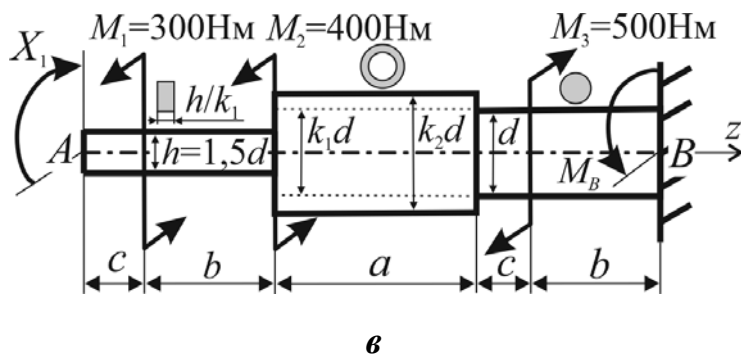
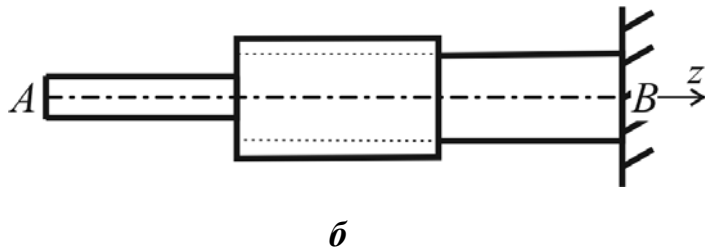
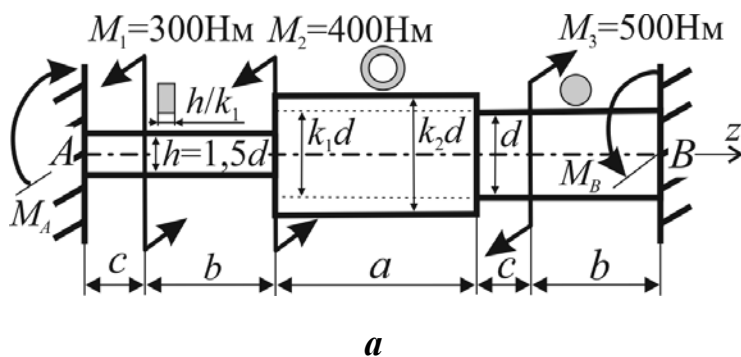


Рис. 2.40. Статично невизначуваний вал:
а – вихідна система; б – основна система;
в – еквівалентна система

1) З точки зору статички подана задача є одноосною із двома зовнішніми зв'язками у вигляді жорстких защемлень. То ж ступінь статичної невизначуваності системи

$$n = 2 - 1 = 1.$$

2) Застосовуємо канонічне рівняння методу сил для один раз статично невизначуваної системи в добре відомій формі (2.30):

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

3) Відкидаючи закріплення в перерізі А, отримаємо статично визначувану основну систему (рис. 2.40 б), на базі якої утворимо відповідну еквівалентну

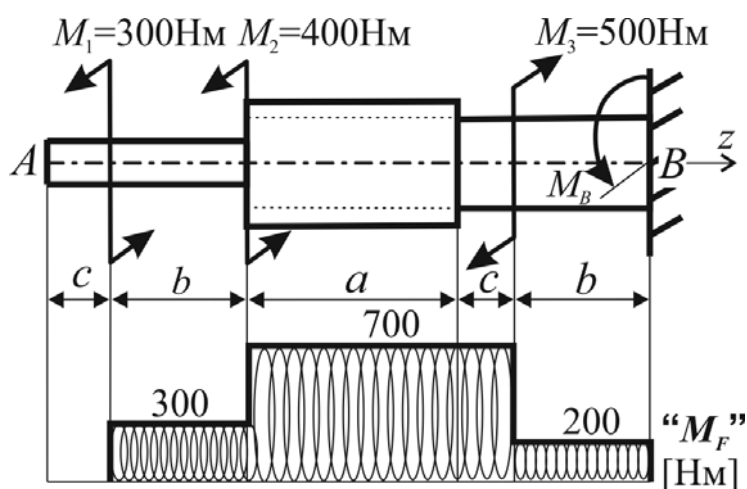


Рис. 2.41. Вантажна епюра M_F

систему для вала (рис. 2.40 в).

4) Прикладаючи до основної системи спочатку зовнішні скручувальні моменти, а потім одиничний момент $\bar{X}_1$ замість невідомого моменту X_1 , будемо відповідні епюри – вантажну M_F (рис. 2.41) та одиничну $\bar{M}_1$ (рис. 2.42).

5) Перед тим, як приступити до визначення коефіцієнтів канонічного рівняння методу сил, необхідно обчислити моменти інерції кручення кожної з трьох ділянок вала (рис. 2.40 а). враховуючи [4] та приймаючи $k_1 = 1,3$, $k_2 = 1,6$, матимемо:

- для круглої частини момент інерції кручення дорівнює полярному моменту інерції перерізу, отже

$$I_p^k = \frac{\pi d^4}{32} = 0,098d^4;$$

- аналогічно, для трубної частини

$$I_p^r = \frac{\pi d^4 (k_2^4 - k_1^4)}{32} = 0,363d^4;$$

- для прямокутної частини вала момент інерції кручення визначається за формулою $I_k = \beta \cdot h \cdot b^3$, в якій табличний коефіцієнт β залежить від співвідношення сторін прямокутника. Згідно з [4], в даному випадку при $h/b = k_1 = 1,3$ $\beta = 0,177$, тому

$$I_k = 0,177 \cdot 1,5 \cdot d \cdot 1,15^3 \cdot d^3 = 0,404d^4.$$

6) Знаходимо коефіцієнти рівняння (2.30), перемножуючи відповідні епюри на рис. 2.41 та 2.42 за правилом Верещагіна:

$$\delta_{11} = \frac{[\overline{M}_1 \times \overline{M}_1]}{GI_{ki}} = \frac{1}{GI_{\kappa}}(b+c) \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{GI_p^r} \cdot a \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{GI_p^{\kappa}}(b+c) \cdot 1 \cdot 1;$$

$$\Delta_{1F} = \frac{[\overline{M}_1 \times M_F]}{GI_{ki}} = -\frac{300 \cdot b \cdot 1}{GI_{\kappa}} - \frac{700 \cdot a \cdot 1}{GI_p^r} - \frac{700 \cdot c \cdot 1}{GI_p^{\kappa}} - \frac{200 \cdot b \cdot 1}{GI_p^{\kappa}};$$

$$Gd^4 \delta_{11} = 19.34 \text{ м}; \quad Gd^4 \Delta_{1F} = -7103 \text{ Нм}^2$$

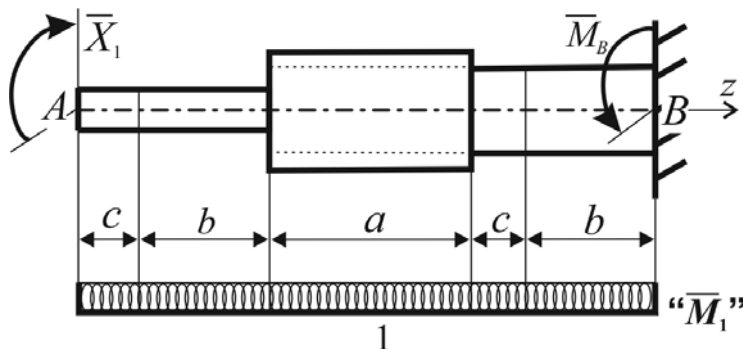


Рис. 2.42. Одиначна епюра $\overline{M}_1$

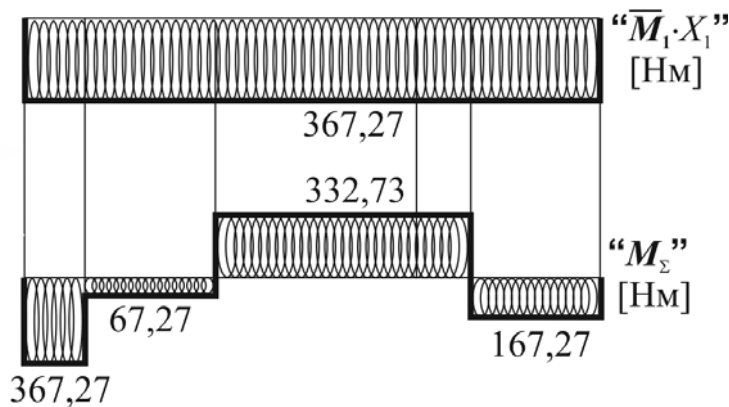


Рис. 2.43. Скоригована одиначна епюра $\overline{M}_1 \cdot X_1$ та результуюча епюра M_{Σ}

та визначаємо шуканий момент:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = 367,27 \text{ Нм.}$$

У даному прикладі Δ_{1F} – це кут повороту перерізу A основної системи вала від дії зовнішніх моментів (M_1 , M_2 , M_3), що, з огляду на епюру M_F , має відбуватися проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку осі z .

Зважаючи на умови закріплення вихідної системи, невідомий реактивний момент X_1 має розвернути переріз A на той самий кут, але в протилежному напрямку

(тобто за годинниковою стрілкою). То ж коефіцієнт δ_{11} у даному випадку – кут повороту цього перерізу від дії одиничного моменту $\overline{M}_1$, а фізичний зміст самого рівняння (2.30) – забезпечити нульовий кут повороту вала в точці A .

7) На останньому кроці корегуємо одиничну епюру $\overline{M}_1$, помножуючи її на X_1 , і будуємо сумарну (результуючу) епюру крутних моментів $M_\Sigma = M_F + \overline{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 2.43). Очевидно, цей результат співпадає з розв'язанням, наведеним в [4].

2.8. Приклад розкриття статичної невизначуваності балки

Потрібно розкрити статичну невизначуваність та побудувати епюри внутрішніх силових факторів для балки на рис. 2.44 при наступних вихідних даних: $F = 25$ кН; $M = 10$ кНм; $b = 1,0$ м; $EI_x = \text{const}$.

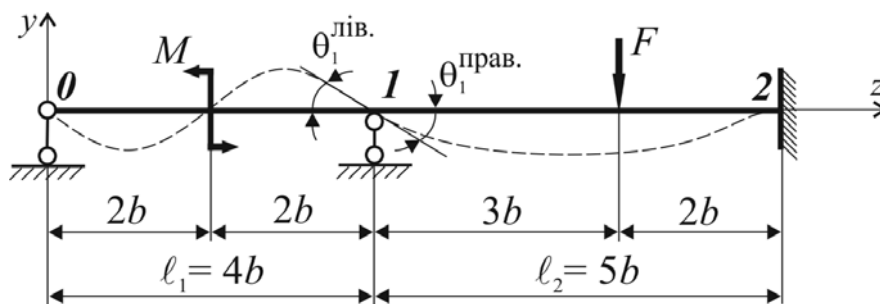


Рис. 2.44. Статично невизначувана балка

1) Встановлення ступеня статичної невизначеності системи. У вигляді шарнірних опор 0 і 1 на балку накладені два зовнішні зв'язки, що забороняють зміщення у вертикальному напрямку (прогин), а жорстке защемлення у точці 2 унеможливує не тільки лінійні зміщення в обох координатних напрямках, а також поворот у власній площині балки. То ж граничні умови для даної балки можна сформулювати як

$$\Delta_0^{\text{верт.}} = 0; \quad \Delta_1^{\text{верт.}} = 0; \quad \Delta_2^{\text{верт.}} = 0; \quad \Delta_2^{\text{гор.}} = 0; \quad \theta_2 = 0.$$

Таким чином, при п'яти зовнішніх зв'язках ступень статичної невизначуваності балки становить:

$$n = 5 - 3 = 2.$$

2) Побудова основної системи. Шляхом врізання додаткового шарніра в проміжній опорі 1 розбиваємо вихідну двопрольотну балку на дві однопрольотні, знижуючи таким чином ступінь статичної невизначуваності системи на одиницю. Остаточо позбавимося статичної невизначува-

ності, замінивши у точці 2 правої балки жорстке защемлення на нерухомий шарнір. Таким чином, отримаємо основну систему у вигляді двох статично визначених балок (рис. 2.45).

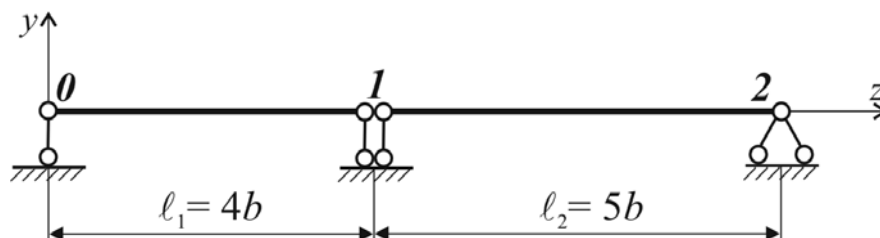


Рис. 2.45. Основна система балки, показаної на рис. 2.44

Зауважимо, що балки основної системи не є незалежними, адже при будь-якому зовнішньому навантаженні безперервність переміщень у вихідній системі вимагає, щоб деформована вісь балки у точці 1 (див. пункт на рис. 2.44) мала єдину дотичну. Отже, має виконуватись умова

$$\theta_1^{\text{лів.}} = \theta_1^{\text{прав.}}$$

3) Побудова еквівалентної системи. Відповідність переміщень вихідної та еквівалентної систем забезпечується прикладанням до останньої як зовнішнього навантаження, так і відповідних невідомих зусиль, що замінюють дію усунутих зв'язків (рис. 2.46). У випадку останніх це, по-перше, парні моменти X_1 , які повинні «дбати» про однаковість кутів повороту балок у точці 1, а по-друге, – момент X_2 , що має забезпечити нульовий кут повороту балки в точці 2.

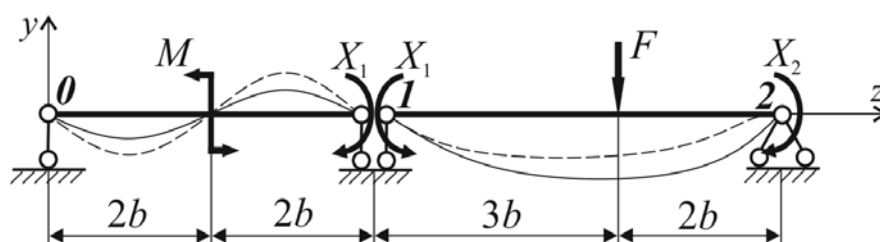


Рис. 2.46. Еквівалентна система балки, зображеної на рис. 2.44

Напрямок дії невідомих моментів X_1 та X_2 можна прийняти довільним. Якщо в результаті вирішення задачі будь-який з них виявиться від'ємним, це означатиме, що дійсний напрямок його дії є протилежним.

Проте, у розгляданому випадку можна заздалегідь вказати правильні напрямки дії невідомих моментів, порівнюючи прогини балки у вихідній (пунктир на рис. 2.44) та еквівалентній системах, позначені на рис. 2.46 пунктирною і тонкою лініями відповідно.

Так, порівнюючи кути повороту балки в точці 2 цих двох систем, можна безпомилково вказати напрямок дії невідомого моменту X_2 , адже він повинен ліквідувати добутий кут повороту в точці 2 від дії зовнішньої сили F для виконання граничної умови $\theta_2 = 0$.

Напрямок дії парних моментів X_1 залежить від співвідношення зовнішнього навантаження та геометричних розмірів балки. Кути поворотів балок в точці 1 можна оцінити, збудувавши вантажну епюру моментів M_F (рис. 2.47). Вважаючи, що значення кута повороту пропорційне площі епюри M_F , визначаємо що $\Delta_{1F}^{\text{прав.}} \gg \Delta_{1F}^{\text{лів.}}$. То ж напрямок дії невідомих парних моментів X_1 треба встановити таким, щоб зменшити кут повороту правої балки в точці 1 і водночас збільшити кут повороту лівої балки (рис. 2.46).

Для визначення невідомих моментів X_1 , X_2 записуємо відповідну кількість канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0, \end{cases}$$

що їхні коефіцієнти будемо визначати за формулами (2.14) на підставі відповідних епюр моментів.

4) Побудова вантажної та одиничних епюр моментів. Розглянемо основну систему під зовнішнім навантаженням та отримаємо відповідну вантажну епюру моментів (рис. 2.47), визначивши спочатку реакції опор:

- на ділянці 0–1:

$$\sum M_0 = 0: R_1 \cdot 4b - M = 0; \quad R_1 = \frac{M}{4b} = \frac{10}{4b} = 2,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_1 = 0: R_0 \cdot 4b - M = 0; \quad R_0 = \frac{M}{4b} = \frac{10}{4b} = 2,5 \text{ кН};$$

$$\text{перевірка: } \sum F_y = 0: R_0 - R_1 = 0;$$

- на ділянці 1–2:

$$\sum M_1 = 0: F \cdot 3b - R_2 \cdot 5b = 0; \quad R_2 = \frac{3Fb}{5b} = \frac{3F}{5} = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_2 = 0: F \cdot 2b - R_1^{\text{II}} \cdot 5b = 0; \quad R_1^{\text{II}} = \frac{2Fb}{5b} = \frac{2F}{5} = 10 \text{ кН};$$

$$\text{перевірка: } \sum F_y = 0: R_1^{\text{II}} - F + R_2 = 0.$$

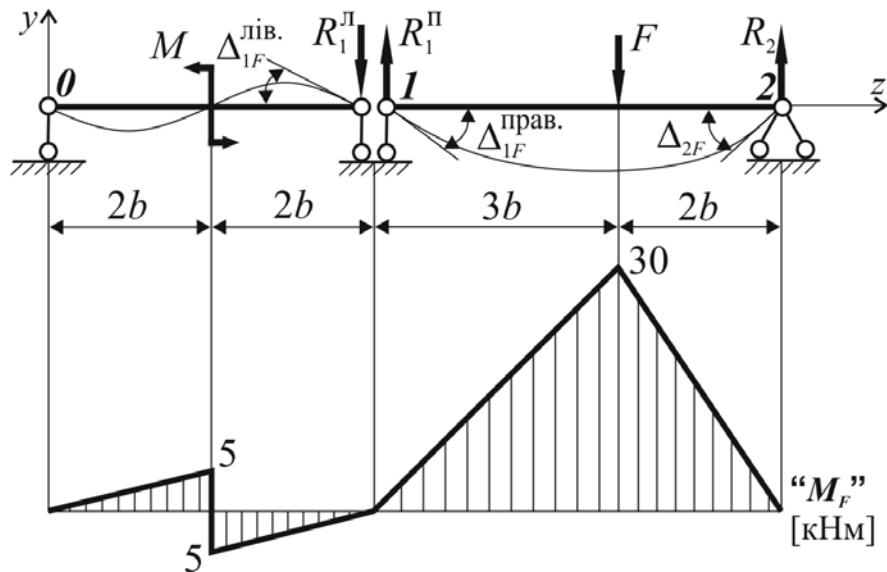


Рис. 2.47. Зовнішнє навантаження основної системи та вантажна епюра згинальних моментів

Тепер замість невідомих моментів X_1 , X_2 по черзі прикладаємо до основної системи співспрямовані одиничні навантаження $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ та будуємо відповідні одиничні епюри $\bar{M}_1$ (рис. 2.48) та $\bar{M}_2$ (рис. 2.49).

5) Обчислюємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил за формулами (2.14), застосовуючи для перемноження епюр правило Верещагіна та формулу трапеції:

$$\begin{aligned} EI_x \Delta_{1F} &= [\bar{M}_1 \times M_F] = -\frac{1}{2} 2b \cdot 5 \frac{2}{3} 0,5 + \frac{2b}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 0,5 \cdot 0) - \\ &- \frac{3b}{6} (2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0,4 \cdot 30 + 1 \cdot 30 + 0 \cdot 0,4) - \frac{1}{2} 2b \cdot 30 \frac{2}{3} 0,4 = \\ &= -\frac{10b}{6} + \frac{20b}{6} - \frac{162b}{6} - \frac{48b}{6} = -\frac{200b}{6} = -\frac{100b}{3}; \end{aligned}$$

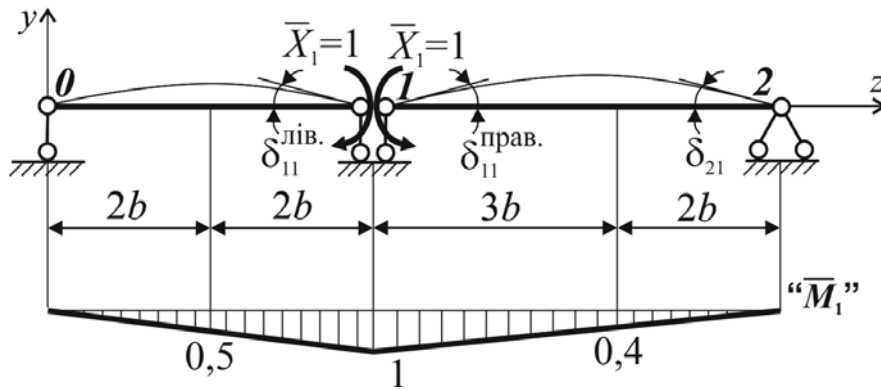


Рис. 2.48. Одиничне навантаження $\bar{X}_1$ та епюра $\bar{M}_1$

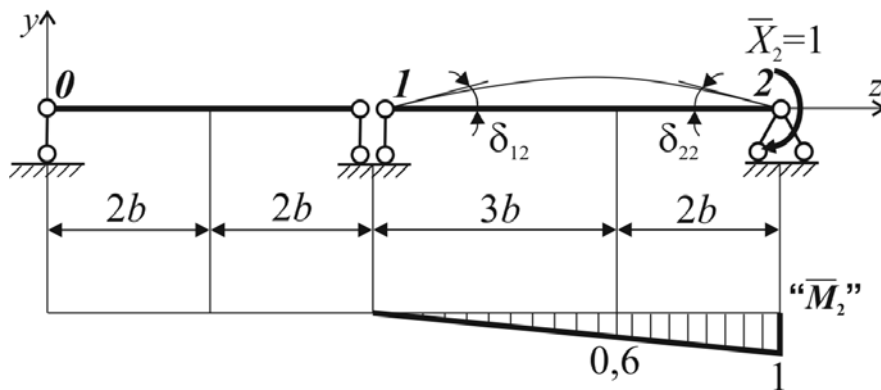


Рис. 2.49. Одиничне навантаження $\bar{X}_2$ та епюра $\bar{M}_2$

$$EI_x \Delta_{2F} = [\bar{M}_2 \times M_F] = -\frac{1}{2} 3b \cdot 30 \frac{2}{3} 0,6 - \frac{2b}{6} (2 \cdot 0,6 \cdot 30 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 0 \cdot 0,6) =$$

$$= -\frac{108b}{6} - \frac{132b}{6} = -\frac{240b}{6} = -40b;$$

$$EI_x \delta_{11} = [\bar{M}_1 \times \bar{M}_1] = \frac{1}{2} 4b \cdot 1 \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{2} 5b \cdot 1 \frac{2}{3} 1 = \frac{8b}{6} + \frac{10b}{6} = \frac{18b}{6} = 3b;$$

$$EI_x \delta_{22} = [\bar{M}_2 \times \bar{M}_2] = \frac{1}{2} 5b \cdot 1 \frac{2}{3} 1 = \frac{10b}{6} = \frac{5b}{3};$$

$$EI_x \delta_{12} = EI_x \delta_{21} = [\bar{M}_1 \times \bar{M}_2] = \frac{1}{2} 5b \cdot 1 \frac{1}{3} 1 = \frac{5b}{6}.$$

Коефіцієнти δ_{11} , δ_{22} та δ_{12} можна дещо простіше вирахувати за формулами (2.16) та (2.17) відповідно:

$$EI_x \delta_{11} = [\overline{M}_1 \times \overline{M}_1] = \frac{\ell_1}{3} + \frac{\ell_2}{3} = \frac{4b}{3} + \frac{5b}{3} = \frac{9b}{3} = 3b;$$

$$EI_x \delta_{22} = [\overline{M}_2 \times \overline{M}_2] = \frac{\ell_2}{3} = \frac{5b}{3};$$

$$EI_x \delta_{12} = EI_x \delta_{21} = [\overline{M}_1 \times \overline{M}_2] = \frac{\ell_2}{6} = \frac{5b}{6}.$$

6) Кінцевий вигляд та розв'язок канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} 3bX_1 + \frac{5b}{6}X_2 - \frac{100b}{3} = 0; \\ \frac{5b}{6}X_1 + \frac{5b}{3}X_2 - 40b = 0. \end{cases}$$

Скорочуємо кожне рівняння на b та вирішуємо способом Крамера:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5/6 \\ 5/6 & 5/3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \frac{5}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{155}{36};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 100/3 & 5/6 \\ 40 & 5/3 \end{vmatrix} = \frac{100}{3} \cdot \frac{5}{3} - 40 \cdot \frac{5}{6} = \frac{800}{36};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 100/3 \\ 5/6 & 40 \end{vmatrix} = 3 \cdot 40 - \frac{5}{6} \cdot \frac{100}{3} = \frac{3320}{36};$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{800}{155} = 5,2 \text{ кНм}; \quad X_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3320}{155} = 21,4 \text{ кНм}.$$

7) Будуємо скореговані епюри $\overline{M}_1 \cdot X_1$ та $\overline{M}_2 \cdot X_2$ (рис. 2.50).

8) Обчислюємо результуючу епюру згинальних моментів як алгебраїчну суму епор: $M_\Sigma = M_F + \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2$ (рис. 2.51).

9) Деформаційна перевірка №1 – визначаємо взаємний кут повороту балки в точці 1:

$$\begin{aligned}
EI_x \Delta_1 &= [\overline{M}_1 \times M_\Sigma] = \frac{1}{2} 2b \cdot 0,5 \frac{2}{3} 2,4 + \\
&+ \frac{2b}{6} (2 \cdot 1 \cdot (-5,2) + 2 \cdot 0,5 \cdot (-7,6) + 1 \cdot (-7,6) + 0,5 \cdot (-5,2)) + \\
&+ \frac{3b}{6} (2 \cdot 1 \cdot (-5,2) + 2 \cdot 0,4 \cdot 15,1 + 1 \cdot 15,1 + 0,4 \cdot (-5,2)) + \\
&+ \frac{2b}{6} (2 \cdot 0,4 \cdot 15,1 + 2 \cdot 0 \cdot (-21,4) + 0 \cdot 15,1 + 0,4 \cdot (-21,4)) = \\
&= \frac{b}{6} (4,8 - 56,4 + 44,1 + 7,2) = \frac{b}{6} (56,1 - 56,4).
\end{aligned}$$

$$\text{Похибка } \eta_1 = \frac{|56,1 - 56,4|}{(56,1 + 56,4)/2} \cdot 100\% = \frac{0,3}{56,25} \cdot 100\% \approx 0,5\% < 5\%.$$

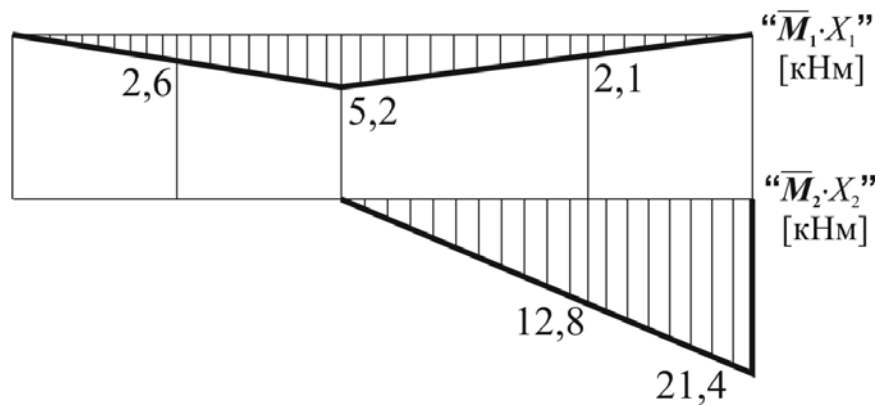


Рис. 2.50. Скореговані одиничні епюри $\overline{M}_1 \cdot X_1$ та $\overline{M}_2 \cdot X_2$

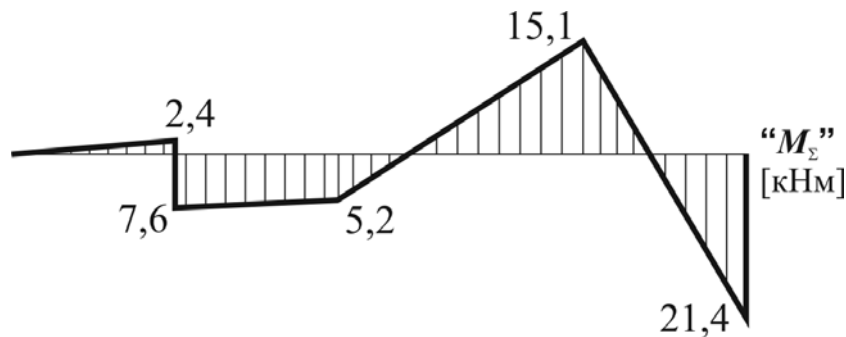


Рис. 2.51. Сумарна епюра згинальних моментів M_Σ

10) Деформаційна перевірка №2 – обчислюємо кут повороту балки в точці 2:

$$\begin{aligned} EI_x \Delta_2 &= [\overline{M}_2 \times M_\Sigma] = \\ &= \frac{3b}{6} (2 \cdot 0 \cdot (-5,2) + 2 \cdot 0,6 \cdot 15,1 + 0 \cdot 15,1 + 0,6 \cdot (-5,2)) + \\ &+ \frac{2b}{6} (2 \cdot 0,6 \cdot 15,1 + 2 \cdot 1 \cdot (-21,4) + 1 \cdot 15,1 + 0,6 \cdot (-21,4)) = \\ &= \frac{b}{6} (45,0 - 44,84). \end{aligned}$$

$$\text{Похибка } \eta_2 = \frac{|45,0 - 44,84|}{(45,0 + 44,84)/2} \cdot 100\% = \frac{0,16}{44,92} \cdot 100\% \approx 0,4\% < 5\%.$$

11) Побудова епюри поперечних сил Q_y (рис. 2.52):

- на ділянці 0–1:

$$\sum M_0 = 0: \quad R_1^n \cdot 4b - M + X_1 = 0; \quad R_1^n = \frac{M_1 - X_1}{4b} = \frac{10 - 5,2}{4 \cdot 1} = 1,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_1 = 0: \quad R_0 \cdot 4b - M + X_1 = 0; \quad R_0 = \frac{M_1 - X_1}{4b} = \frac{10 - 5,2}{4 \cdot 1} = 1,2 \text{ кН};$$

$$\text{перевірка: } \sum F_y = 0: \quad R_0 - R_1^n = 0;$$

- на ділянці 1–2:

$$\sum M_1 = 0: \quad -X_1 + F \cdot 3b - R_2 \cdot 5b + X_2 = 0;$$

$$R_2 = \frac{-X_1 + 3Fb + X_2}{5b} = \frac{-5,2 + 3 \cdot 25 \cdot 1 + 21,4}{5 \cdot 1} = 18,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_2 = 0: \quad -X_1 - F \cdot 2b + R_1^n \cdot 5b + X_2 = 0;$$

$$R_1^n = \frac{X_1 + 2Fb - X_2}{5b} = \frac{5,2 + 2 \cdot 25 \cdot 1 - 21,4}{5 \cdot 1} = 6,8 \text{ кН};$$

$$\text{перевірка: } \sum F_y = 0: \quad R_1^n - F + R_2 = 6,8 - 25 + 18,2 = 0;$$

- реакція проміжної опори: $R_1 = -R_1^n + R_1^n = -1,2 + 6,8 = 5,6 \text{ кН}.$

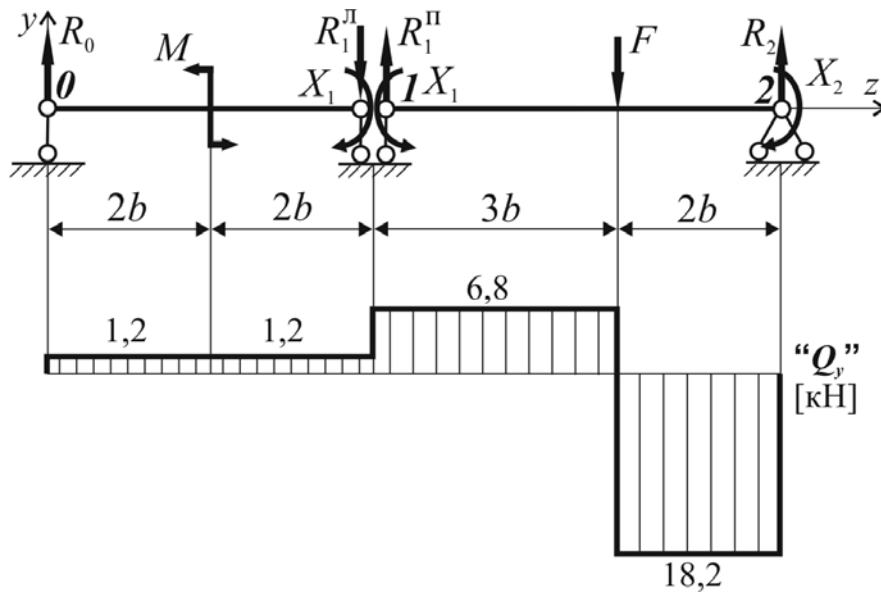


Рис. 2.52. Елюра поперечних сил Q_y

2.9. Приклад розкриття статичної невизначуваності рами

Розкрити статичну невизначуваність та побудувати епюри внутрішніх силових факторів в рамі на рис. 2.53, якщо відомо, що $M = 10$ кНм, $F = 20$ кН, $b = 1,0$ м, $EI_x = \text{const}$.

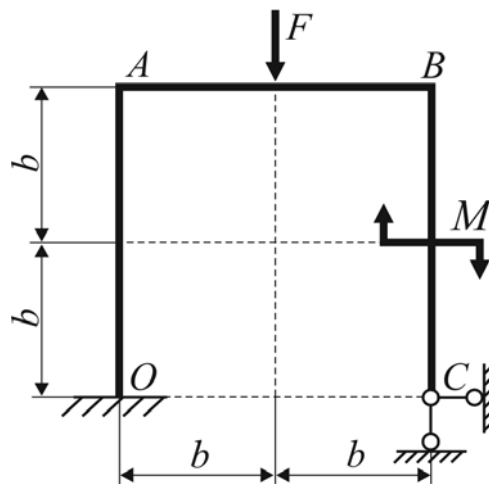


Рис. 2.53. Статично невизначувана рама

1) Визначення ступеня статичної невизначеності вихідної системи. Жорстке затиснення у точці O накладає три зовнішні зв'язки на переміщення цієї точки:

$$\Delta_O^{\text{гор.}} = 0; \quad \Delta_O^{\text{верт.}} = 0; \quad \theta_O = 0.$$

У точці B заборонені ще два лінійні зміщення у площині рами:

$$\Delta_B^{\text{гор.}} = 0; \quad \Delta_B^{\text{верт.}} = 0.$$

Таким чином, рама має п'ять зовнішніх зв'язків і тому ступень її станичної невизначуваності n становить:

$$n = 5 - 3 = 2.$$

2) Побудова основної системи. Для розгляданої двічі статично невизначуваної рами основна система має бути створена шляхом відкидання будь-яких двох зв'язків, що, вочевидь, можна зробити у різний спосіб. Але найбільш раціональним є відкидання двох шарнірів у точці B , внаслідок чого основна система стає консольною (рис. 2.54).

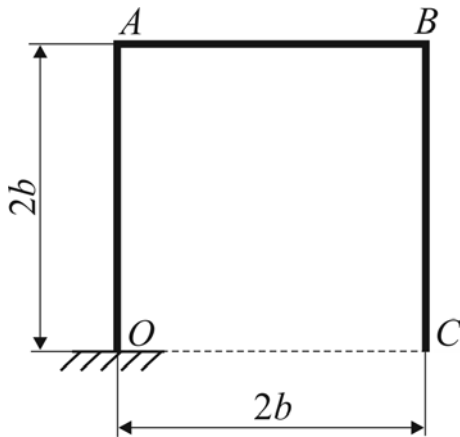


Рис. 2.54. Основна система рами, зображеної на рис. 2.53

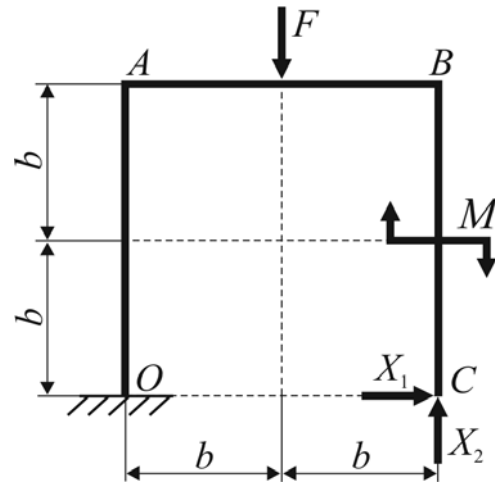


Рис. 2.55. Еквівалентна система рами, показаної на рис. 2.53

Перевага такого обрання основної системи полягає в простоті побудови епюр моментів, які в консольній системі не потребують визначення опорних реакцій, якщо починати обхід рами з вільного краю.

3) Побудова еквівалентної системи. Завантажуємо основну систему заданими зовнішніми зусиллями, а також невідомими силами X_1 , X_2 у напрямках відкинутих лінійних зв'язків (рис. 2.55).

Взагалі, невідомі зусилля можуть бути спрямовані у будь-який бік вздовж напрямків відповідних переміщень, у разі чого на правильність початкового спрямування вказує знак зусилля, що його отримують в процесі розв’язання задачі. В деяких простих випадках, коли можна легко уявити собі деформований вигляд вантажної системи, правильні напрямки дії невідомих зусиль можна встановити одразу. Наприклад, вантажна епюра M_F для розглядуваної рами (рис. 2.56 б), яку прийнято завжди будувати на стислих волокнах, дає змогу відтворити якісну картину її деформації (див. пунктир на рис. 2.56 а). Зрозуміло, що невідомі зусилля X_1 та X_2 слід спрямувати назустріч відповідним переміщенням Δ_{1F} та Δ_{2F} точки B основної системи від зовнішнього навантаження, як це показано на рис. 2.55.

Таким чином, для визначення невідомих зусиль X_1 , X_2 маємо сформувати та розв’язати систему з двох лінійних рівнянь методу сил канонічного виду:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0, \end{cases}$$

що являють собою граничні умови в точці B рами у горизонтальному та вертикальному напрямках відповідно ($\Delta_B^{\text{гор.}} = 0$; $\Delta_B^{\text{верт.}} = 0$).

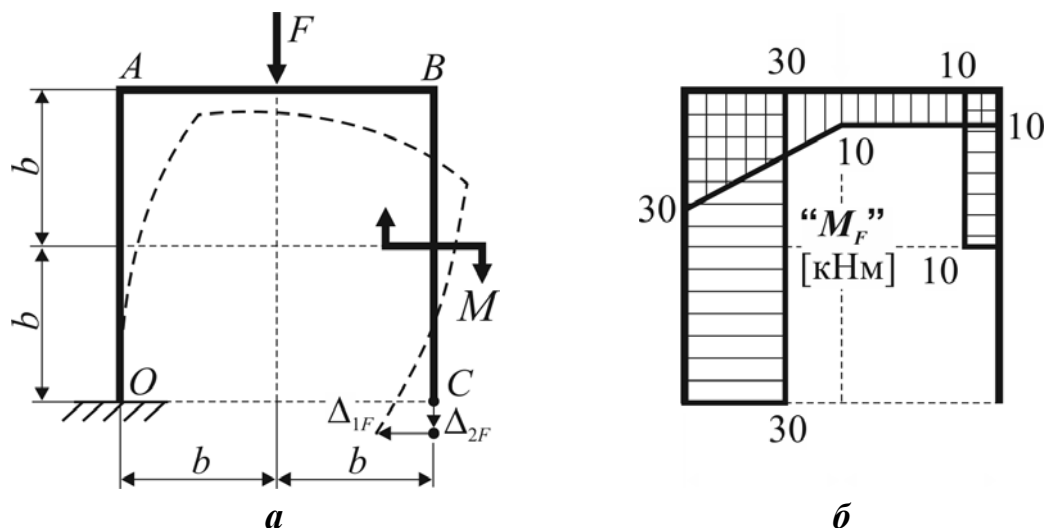


Рис. 2.56. Зовнішнє навантаження основної системи (а)
та вантажна епюра моментів M_F (б)

4) Визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь методу сил. Дотримуючись процедури методу сил, будемо епюри згинальних моментів в основній системі від дії зовнішнього навантаження (рис. 2.56), а також відповідних одиничних сил $\bar{X}_1$ (рис. 2.57) та $\bar{X}_2$ (рис. 2.58).

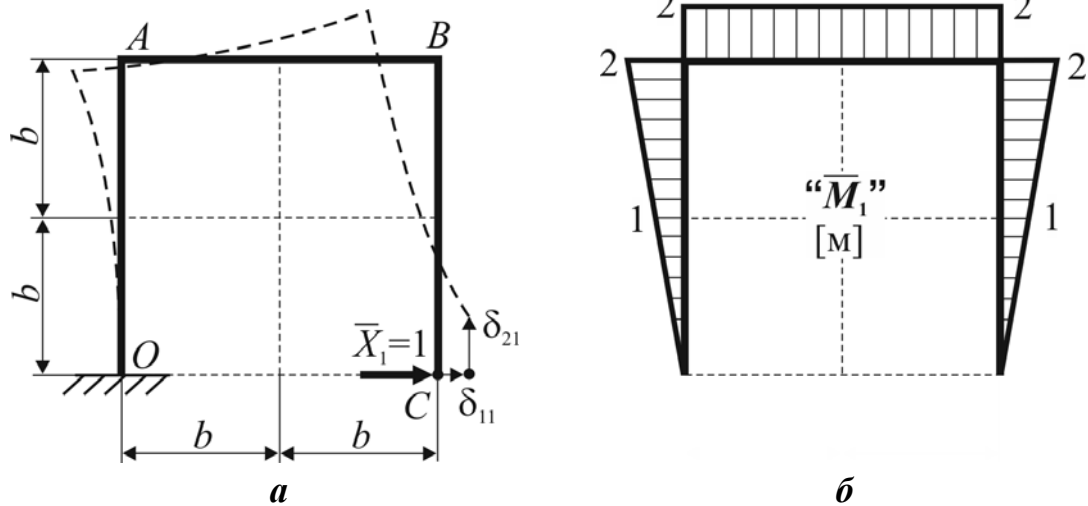


Рис. 2.57. Одиничне навантаження $\bar{X}_1$ в основній системі (а) та одинична епюра моментів $\bar{M}_1$ (б)

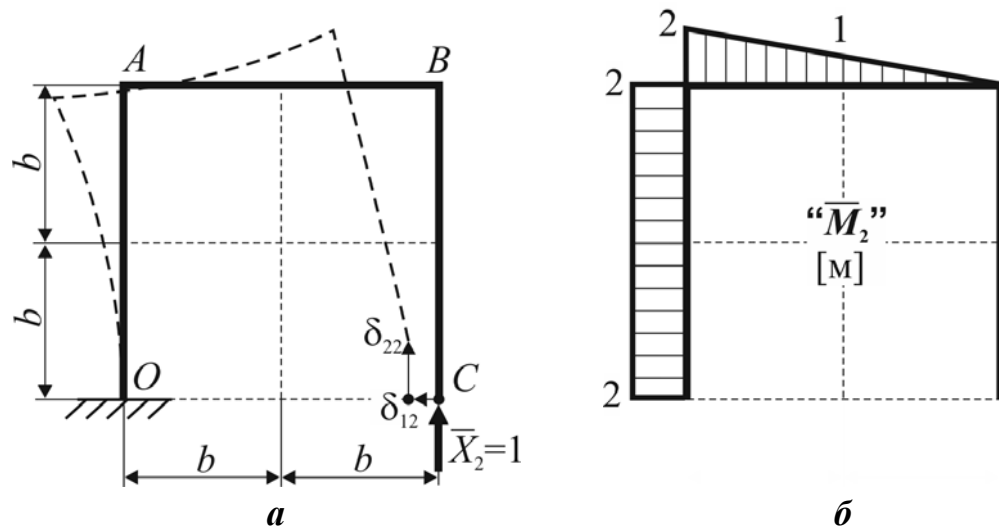


Рис. 2.58. Одиничне навантаження $\bar{X}_2$ в основній системі (а) та одинична епюра моментів $\bar{M}_2$ (б)

Обчислюємо коефіцієнти системи рівнянь методу сил шляхом перемноження епюр моментів за правилом Верещагіна та формулою трапеції:

$$EI_x \delta_{11} = [\overline{M}_1 \times \overline{M}_1] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3} + 8 + \frac{8}{3} = \frac{40}{3};$$

$$EI_x \delta_{12} = EI_x \delta_{21} = [\overline{M}_2 \times \overline{M}_1] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8;$$

$$EI_x \delta_{22} = [\overline{M}_2 \times \overline{M}_2] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3};$$

$$\begin{aligned} EI_x \Delta_{1F} &= [\overline{M}_1 \times M_F] = -\frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10) - 10 \cdot 1 \cdot 2 - \\ &\quad - \frac{1}{6} (2 \cdot 2 \cdot 30 + 2 \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 30 = \\ &= -\frac{90}{6} - 20 - \frac{240}{6} - 60 = -\frac{810}{6} = -\frac{405}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_x \Delta_{2F} &= [\overline{M}_2 \times M_F] = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 - \frac{1}{6} (2 \cdot 2 \cdot 30 + 2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 30) - \\ &\quad - 2 \cdot 2 \cdot 30 = -5 - \frac{190}{6} - 120 = -\frac{940}{6} = -\frac{470}{3}. \end{aligned}$$

5) Формуємо та вирішуємо канонічну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{40}{3} X_1 + 8 X_2 - \frac{405}{3} = 0; \\ 8 X_1 + \frac{32}{3} X_2 - \frac{470}{3} = 0. \end{cases}$$

Після помноження на 3 та нескладних перестановок отримуємо:

$$\begin{cases} 40 X_1 + 24 X_2 = 405; \\ 24 X_1 + 32 X_2 = 470. \end{cases}$$

Рішення системи проводимо за правилом Крамера:

$$D = \begin{vmatrix} 40 & 24 \\ 24 & 32 \end{vmatrix} = 40 \cdot 32 - (24)^2 = 704;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 405 & 24 \\ 470 & 32 \end{vmatrix} = 405 \cdot 32 - 470 \cdot 24 = 1680;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 40 & 405 \\ 24 & 470 \end{vmatrix} = 40 \cdot 470 - 24 \cdot 405 = 9080;$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1680}{704} = 2,4 \text{ кН}; \quad X_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9080}{704} = 12,9 \text{ кН}.$$

Додатні значення X_1 , X_2 підтверджують правильність вибору напрямків дії цих зусиль.

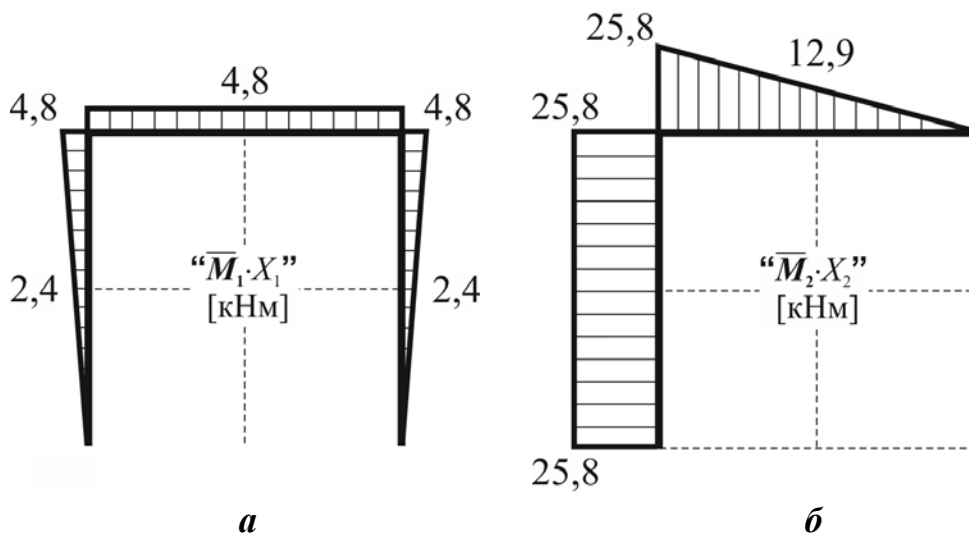


Рис. 2.59. Скореговані одиничні епюри $\overline{M}_1 \cdot X_1$ (а) та $\overline{M}_2 \cdot X_2$ (б)

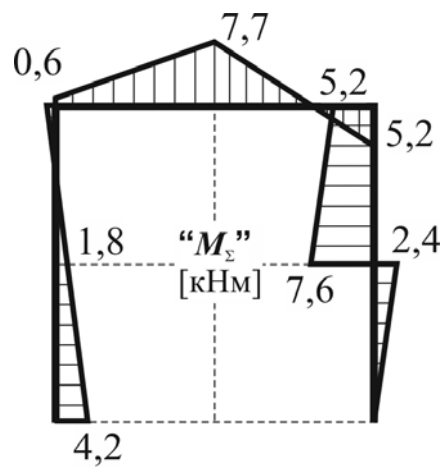


Рис. 2.60. Сумарна епюра згинальних моментів M_z

6) Корегуємо одиничні епюри моментів (рис. 2.59).

7) Будуємо результуючу епюру згинальних моментів, що обчислюється як алгебраїчна сума виду (рис. 2.60):

$$M_{\Sigma} = M_F + \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2.$$

8) Деформаційна перевірка №1 – визначаємо горизонтальне переміщення точки B :

$$\begin{aligned} EI_x \Delta_B^{cop} &= [\overline{M}_1 \times M_{\Sigma}] = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 - \\ &- \frac{1}{6} [2 \cdot 1 \cdot 7,6 + 2 \cdot 2 \cdot 5,2 + 1 \cdot 5,2 + 2 \cdot 7,6] + \\ &+ \frac{1}{6} [-2 \cdot 2 \cdot 5,2 + 2 \cdot 2 \cdot 7,7 - 2 \cdot 5,2 + 2 \cdot 7,7] + \\ &+ \frac{1}{6} [2 \cdot 2 \cdot 7,7 + 2 \cdot 2 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,6 + 2 \cdot 7,7] + \\ &+ \frac{2}{6} [2 \cdot 2 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0 \cdot 4,2 - 2 \cdot 4,2 + 0,6 \cdot 0] = \\ &= \frac{2,4}{3} - \frac{28,2}{3} + \frac{7,5}{3} + \frac{24,9}{3} - \frac{6}{3} = \frac{34,8 - 34,2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Похибка } \eta_1 = \frac{|34,8 - 34,2|}{(34,8 + 34,2)/2} \cdot 100\% = \frac{0,6}{34,5} \cdot 100\% \approx 1,7\% < 5\%.$$

Деформаційна перевірка №2 – обчислюємо вертикальне переміщення точки B :

$$\begin{aligned} EI_x \Delta_B^{верт} &= [\overline{M}_2 \times M_{\Sigma}] = \frac{1}{6} [2 \cdot 0 \cdot 5,2 + 2 \cdot 1 \cdot 7,7 - 1 \cdot 5,2 + 0 \cdot 7,7] + \\ &= \frac{1}{6} [2 \cdot 1 \cdot 7,7 + 2 \cdot 2 \cdot 0,6 + 2 \cdot 7,7 + 1 \cdot 0,6] + \\ &+ \frac{2}{6} [2 \cdot 2 \cdot 0,6 - 2 \cdot 2 \cdot 4,2 + 2 \cdot 0,6 - 2 \cdot 4,2] = \\ &= \frac{5,1}{3} + \frac{16,9}{3} - \frac{21,6}{3} = \frac{22 - 21,6}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Похибка } \eta_2 = \frac{|22 - 21,6|}{(22 + 21,6)/2} \cdot 100\% = \frac{0,4}{21,8} \cdot 100\% \approx 1,8\% < 5\%.$$

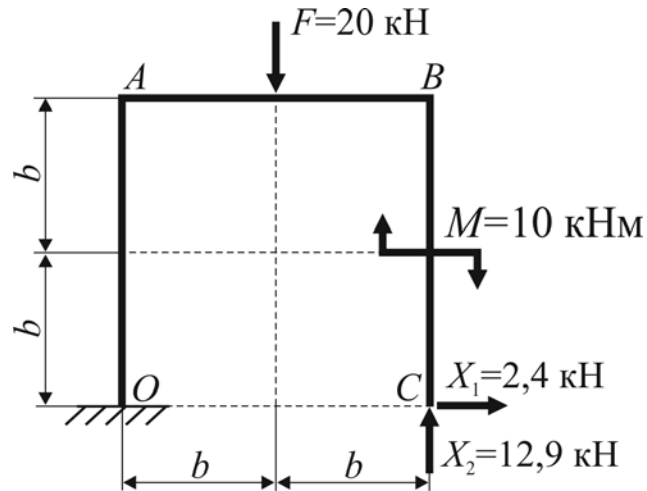


Рис. 2.61. Зовнішнє навантаження рами в еквівалентній системі

9) Побудова епюр поздовжніх та поперечних сил. Будуємо ці епюри в еквівалентній системі, зовнішнє навантаження якої тепер повністю визначене (рис. 2.61), обходячи раму у напрямку від вільного краю до затиснення.

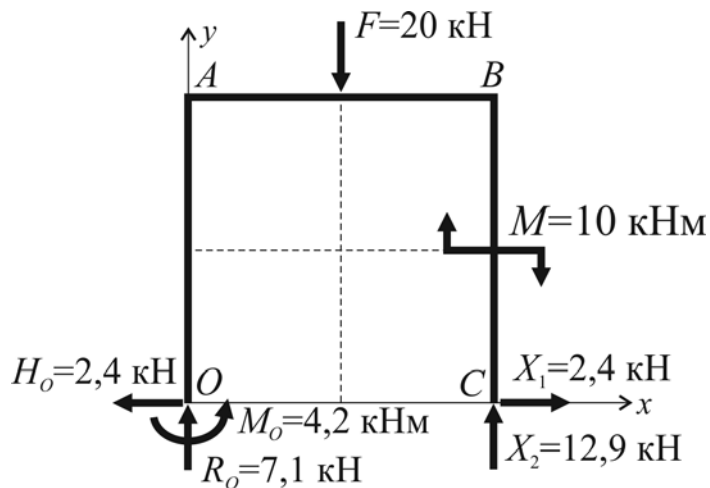


Рис. 2.62. Повна система навантажень рами

Напрямок обходу ділянок рами може бути довільним, якщо попередньо визначити реактивні сили в защемленні O з рівнянь рівноваги (рис. 2.62):

$$\sum F_x = 0: -H_o + X_1 = 0; \quad H_o = X_1 = 2,4 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0: R_o + X_2 - F = 0; \quad R_o = F - X_2 = 20 - 12,9 = 7,1 \text{ кН}.$$

Реактивний момент в затисненні M_o для побудови епюр зусиль знати в принципі не потрібно. З іншого боку, фактично він вже був визначений в результаті побудови епюри M_Σ у відповідній її точці (див. рис. 2.60). Напрямок дії цього моменту на рис. 2.62 вказує на стислі волокна рами (тобто в один бік з епюрою M_Σ).

Результат побудови епюр поздовжніх та поперечних сил в рамі представлений на рис. 2.63 а та б відповідно.

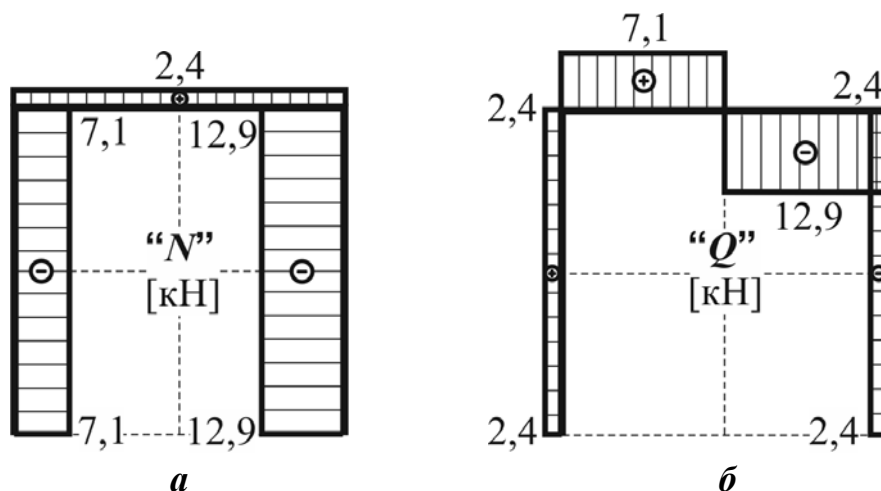


Рис. 2.63. Епюри поздовжніх сил N (а) та поперечних сил Q (б)

2.10. Розрахунково-проектувальне завдання

При вивченні розділу «Статично невизначувані системи» в курсі «Опір матеріалів» ставиться мета навчити студентів основам інженерного розрахунку статично невизначуваних елементів конструкцій машин і механізмів на міцність і жорсткість при дії статичного навантаження.

Для кращої організації і більш ефективної самостійної роботи студентів, згідно з вимогами програми курсу «Опір матеріалів», студентам пропонується до виконання розрахунково-проектувальне завдання (РПЗ) за темою «Розкриття статичної невизначуваності стрижневих систем». Виконуючи цю роботу, студент практично знайомиться зі всіма етапами розв'язання статично невизначуваних задач методом сил, а також засто-

совує раніше засвоєні підходи та правила обчислення переміщень, побудови епюр моментів, поперечних і поздовжніх сил в пружних стрижневих системах.

2.10.1 Зміст розрахунково-проектувального завдання

Розрахунково-проектувальне завдання складається з трьох етапів:

1. Розв'язання запропонованих задач за вказаними викладачем варіантами розрахункових схем і вихідних даних, оформлення їх за вимогами кафедри «Механіки суцільних середовищ та опору матеріалів».
2. Написання контрольних робіт за темою РПЗ.
3. Захист РПЗ. Захист включає в себе пояснення методів і принципів розв'язання задач, а також відповідь на контрольні теоретичні запитання. Кількість та об'єм цих запитань визначається викладачем індивідуально для кожного студента.

Мета роботи – розкриття статичної невизначуваності запропонованих розрахункових схем методом сил, визначення внутрішніх силових факторів та побудова відповідних епюр.

Вхідними даними для задач є такі:

1. Схеми статично невизначуваних багатопрольотних балок постійної жорсткості із наданням їх геометричних розмірів і зовнішнього навантаження – таблиці 2.1, 2.2.
2. Схеми плоских рам з постійною згинальною жорсткістю елементів із завданням довжини ділянок та зовнішнього навантаження – таблиці 2.3, 2.4.

РПЗ складається з двох обов'язкових для розв'язання задач:

1. *Розкриття статичної невизначуваності багатопрольотної балки.* Для заданої нерозрізної багатопрольотної балки розкрити статичну невизначуваність методом сил та побудувати епюри згинального моменту і поперечної сили.

Варіанти розрахункових схем подані в таблиці 2.1, числові дані надаються в таблиці 2.2.

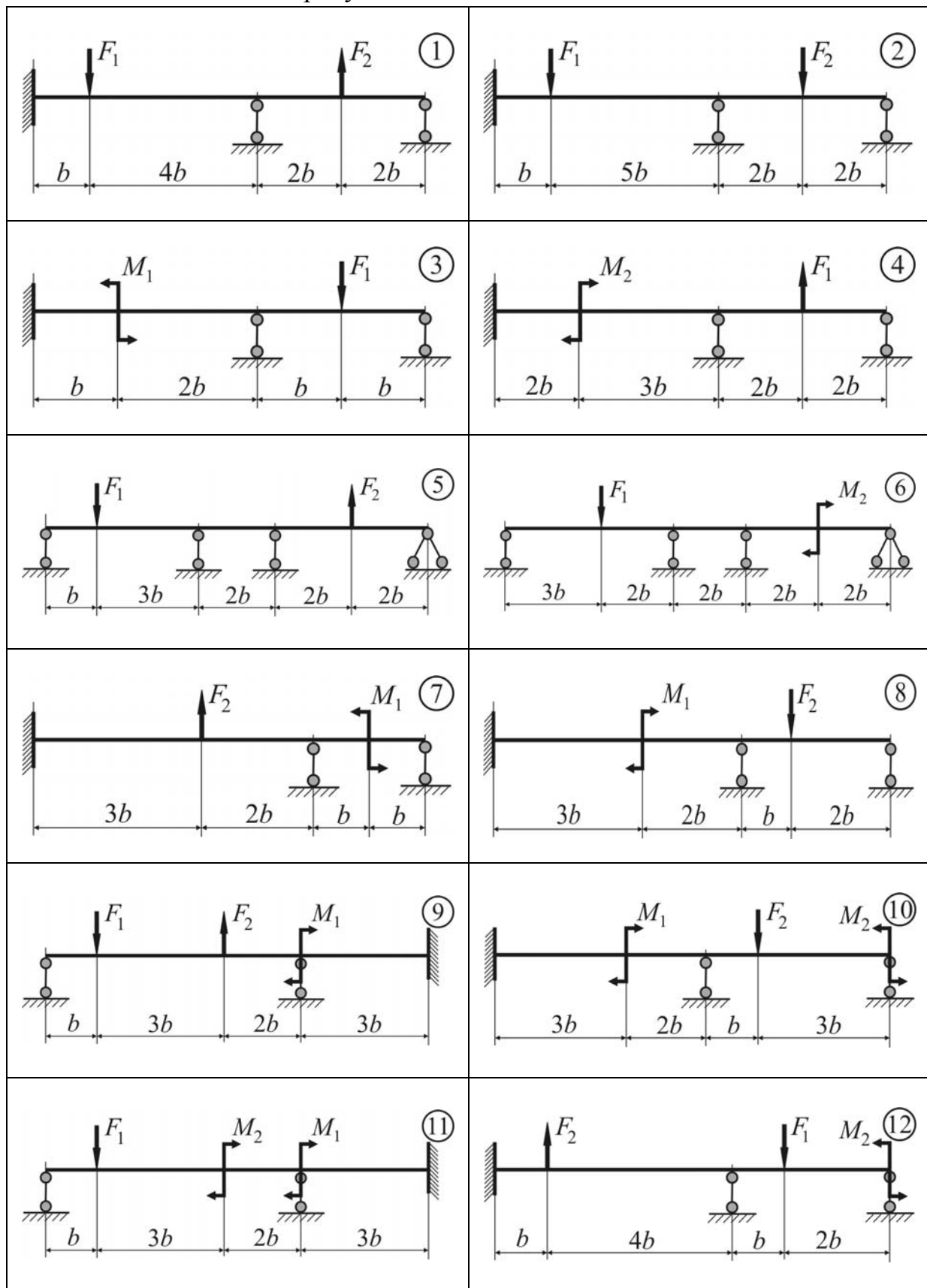
2. *Розкриття статичної невизначуваності плоскої рами.* Для вказаної плоскої рами розкрити статичну невизначуваність методом сил, а також побудувати епюри згинального моменту, поперечної та поздовжньої сил.

Варіанти розрахункових схем наведені в таблиці 2.3, числові дані містяться в таблиці 2.4.

2.10.2. Порядок виконання завдання

1. Згідно з номером варіанта виписати числові дані та в певному масштабі накреслити схему заданої системи із зазначенням її лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.
2. Встановити ступінь статичної невизначуваності системи n .
3. Розглянути можливі варіанти вибору основної системи і визначити найбільш раціональний із них для проведення подальших розрахунків.
4. Створити еквівалентну систему на базі основної.
5. Скласти систему канонічних рівнянь методу сил для обраного варіанта основної системи.
6. Побудувати епюри моментів від заданих навантажень та одиничних зусиль в основній системі.
7. Обчислити коефіцієнти канонічних рівнянь методу сил.
8. Розв'язати систему канонічних рівнянь, визначивши невідомі зусилля $X_1, X_2, \dots, X_n$.
9. Провести деформаційну перевірку правильності розв'язку задачі шляхом обчислення переміщень, що входять у відповідні граничні умови для розгляданої системи.
10. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданої статично невизначуваної системи.

Таблиця 2.1 – Розрахункові схеми до задачі 1



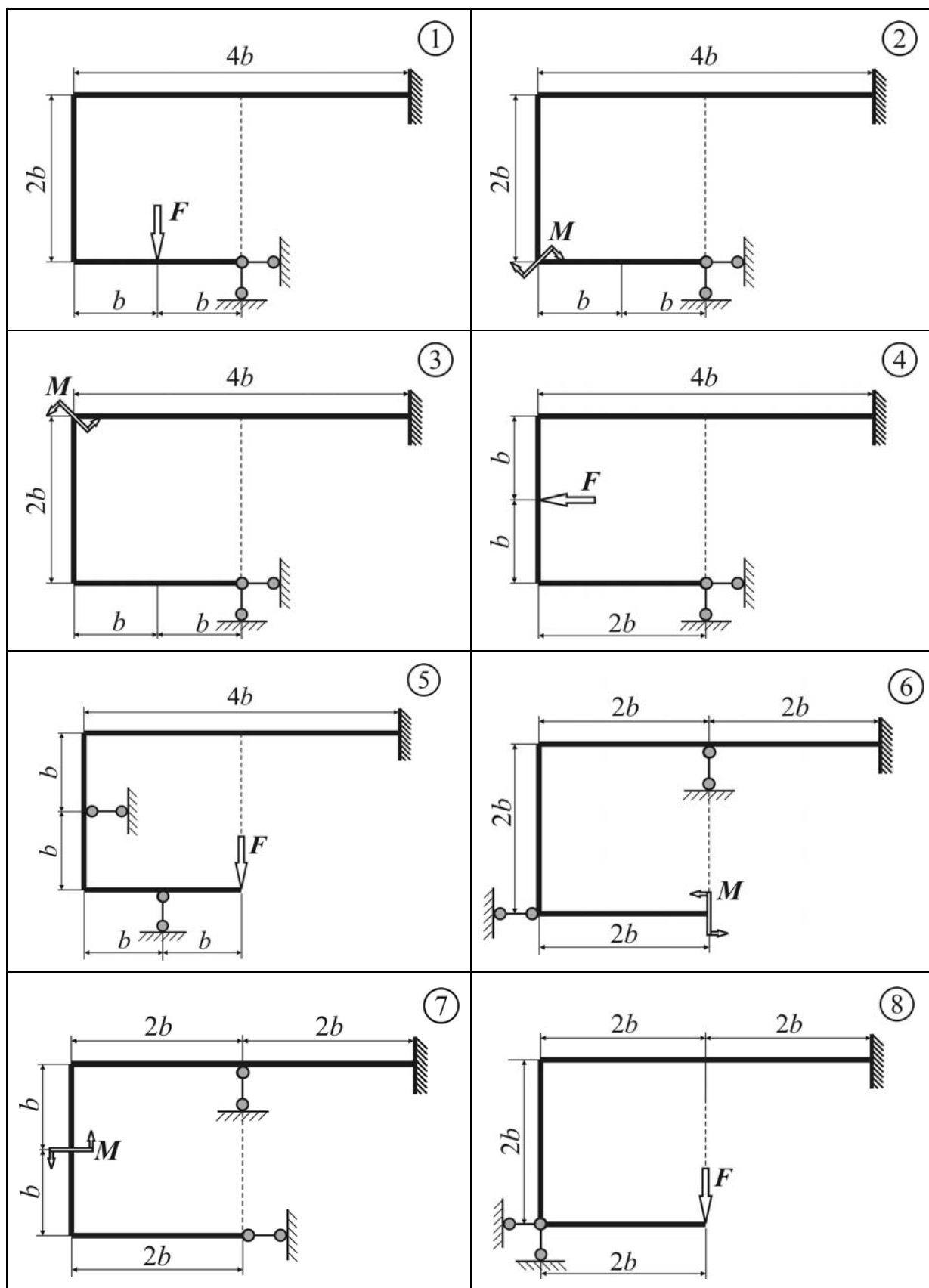
Закінчення таблиці 2.1

13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24

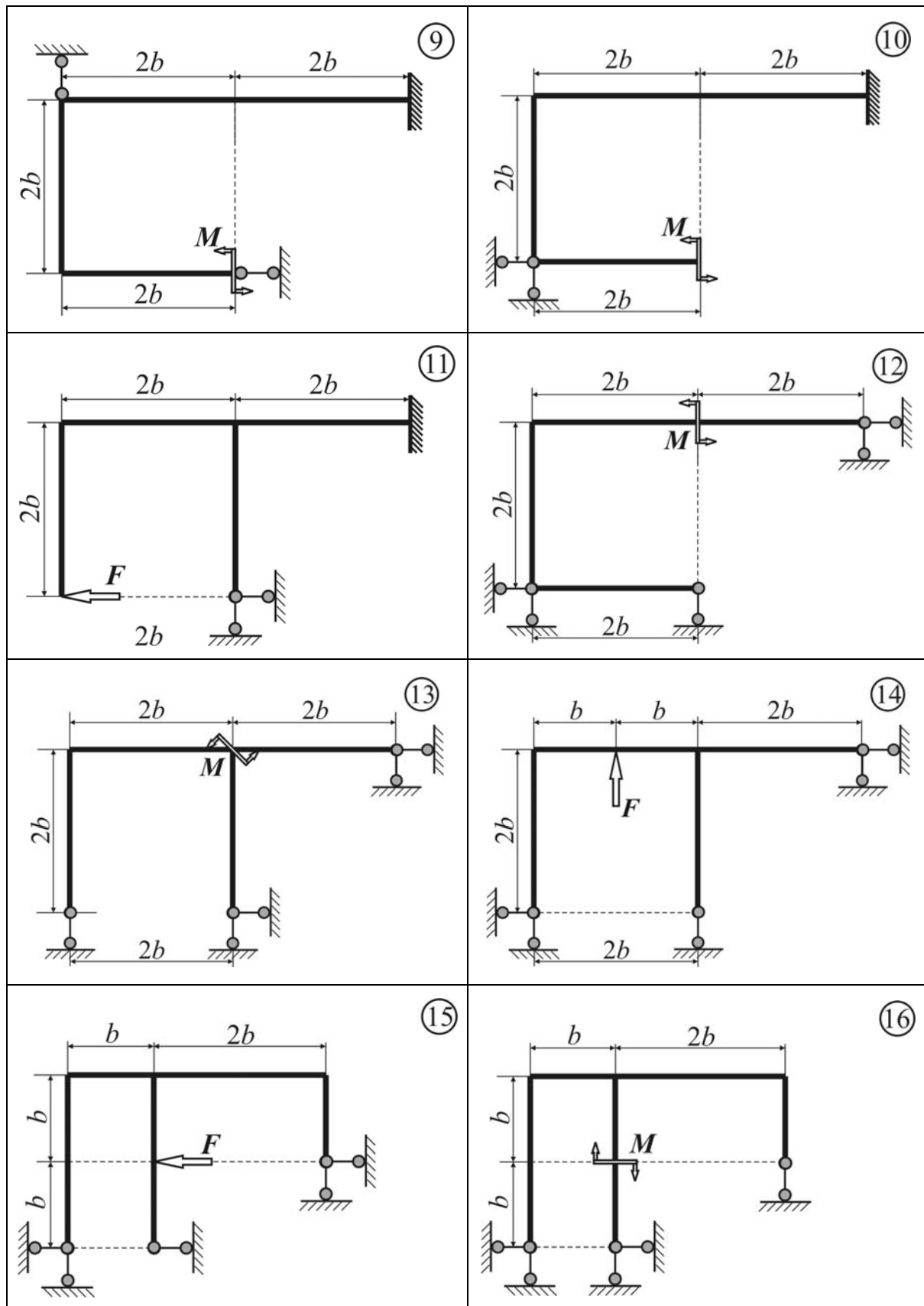
Таблиця 2.2 – Числові дані до задачі 1

№ вар.	F_1 , кН	F_2 , кН	M_1 , кНм	M_2 , кНм	b , м
1	20	10	5	6	0,7
2	14	12	3	-4	0,6
3	5	15	5	6	0,8
4	8	20	8	5	0,5
5	10	5	5	3	0,6
6	8	5	7	5	0,4
7	10	-6	10	4	0,8
8	12	15	10	-7	0,7
9	5	-20	8	9	0,6
10	20	-7	15	10	0,5
11	25	8	7	12	0,4
12	15	10	3	-9	0,3
13	10	22	-6	5	0,7
14	5	15	-8	15	0,8
15	-7	12	5	4	0,5
16	3	17	8	7	0,6
17	6	20	6	4	0,7
18	9	10	3	-9	0,4
19	10	15	20	12	0,3
20	20	9	15	5	0,8
21	23	-9	5	20	0,6
22	-15	12	9	10	0,7
23	10	7	7	-4	0,4
24	8	15	10	-5	0,5

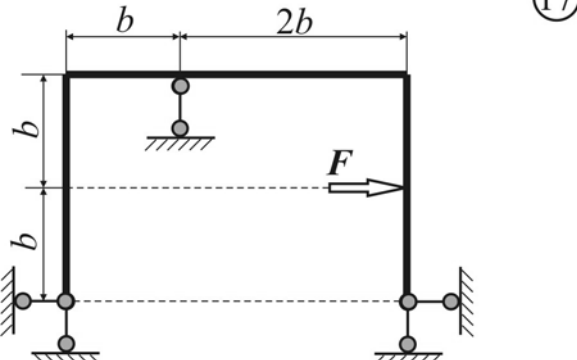
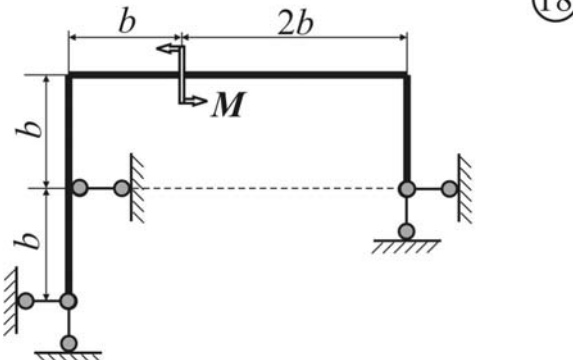
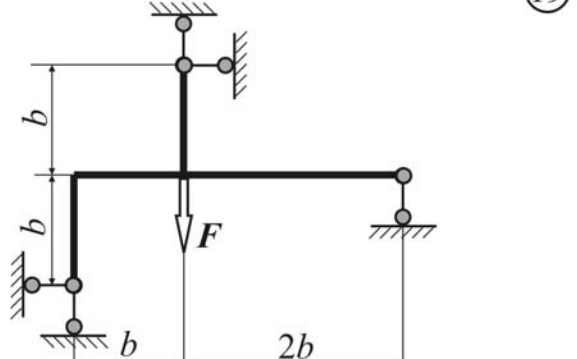
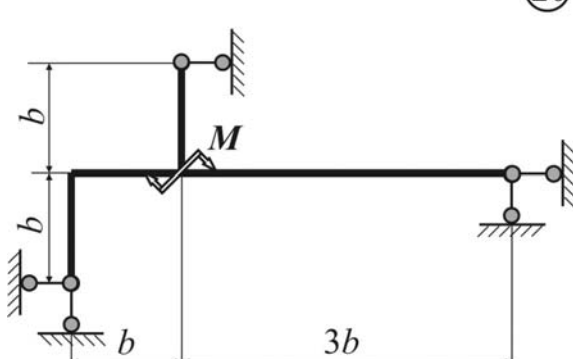
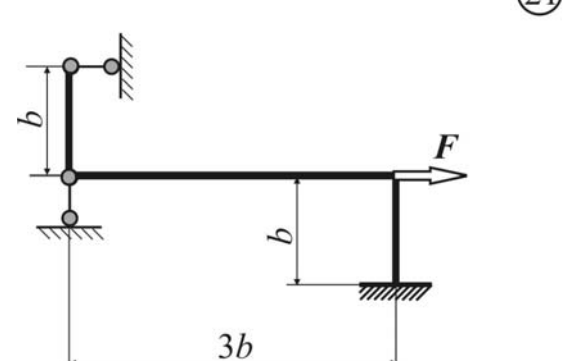
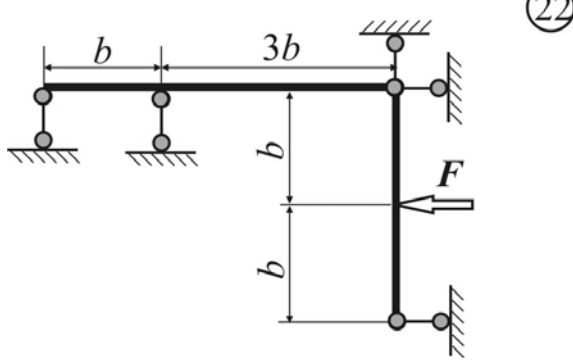
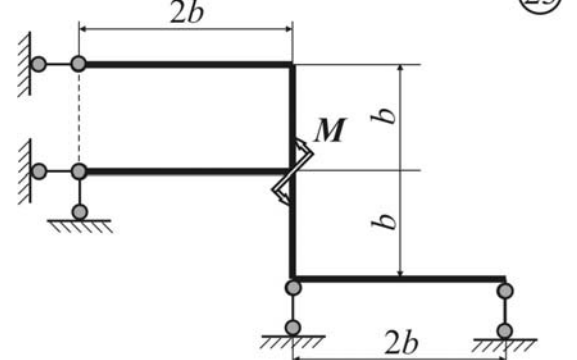
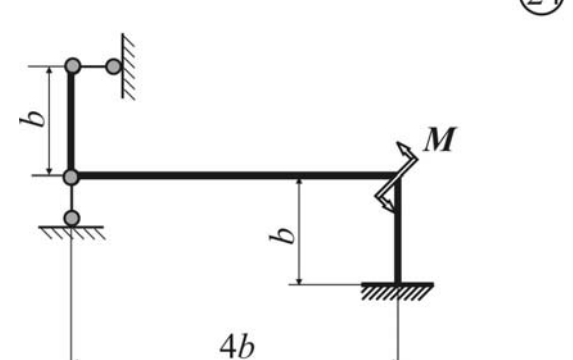
Таблиця 2.3 – Розрахункові схеми до задачі 2



Продовження таблиці 2.3



Закінчення таблиці 2.3

 17	 18
 19	 20
 21	 22
 23	 24

Таблиця 2.4 – Числові дані до задачі 2

№ вар.	F , кН	M , кНм	b , м
1	20	8	0,4
2	10	–4	0,3
3	50	6	0,5
4	80	5	0,5
5	10	3	0,4
6	80	5	0,4
7	10	4	0,2
8	60	–7	0,3
9	50	9	0,4
10	20	10	0,5
11	20	2	0,6
12	40	–3	0,3
13	10	5	0,2
14	50	4	0,4
15	40	5	0,5
16	20	4	0,2
17	10	–7	0,6
18	60	8	0,6
19	30	2	0,2
20	–20	4	0,3
21	–30	–5	0,4
22	40	6	0,7
23	–20	9	0,6
24	80	–5	0,8

Контрольні запитання

1. Сформулюйте закон збереження енергії для консервативних механічних систем.
2. За якою формулою визначається потенційна енергія деформації пружної системи при розтяганні-стисканні?
3. За якою формулою визначається потенційна енергія деформації пружної системи при крученні?
4. За якими формулами визначається потенційна енергія деформації пружної системи при поперечному та чистому згинанні?
5. Запишіть формулу для потенційної енергії пружної деформації стрижневої системи в загальному випадку просторового деформування.
6. Розкрийте зміст теореми Кастільяно.
7. Яким чином теорема Кастільяно застосовується для визначення переміщень будь-якої точки пружної системи?
8. Як визначити лінійне переміщення в точці?
9. Як визначити кутове переміщення в точці?
10. Який вигляд має інтеграл Мора в окремих випадках плоского згинання, розтягання-стискання, кручення?
11. Запишіть загальний вигляд інтеграла Мора при просторовому навантаженні стрижневої системи.
12. В чому полягає сутність правила Верещагіна для обчислення інтеграла Мора?
13. Який вигляд має формула трапеції для обчислення інтеграла Мора? В якому випадку вона застосовується?
14. Який вигляд має формула Сімпсона – Карнаухова для обчислення інтеграла Мора? Коли її застосування є доцільним?
15. Розкрийте зміст теореми про взаємність робіт.
16. Поясніть твердження теореми про взаємність переміщень.
17. Які системи називаються статично невизначуваними?
18. Що таке зайвий зв'язок і зайве невідоме зусилля?
19. Що називається ступенем статичної невизначуваності системи?
20. Що таке внутрішня статична невизначуваність системи? У чому її відмінність від зовнішньої статичної невизначуваності?
21. Який ступінь статичної невизначуваності замкнутого контуру? Поясніть чому.

22. В чому полягає ідея методу сил?
23. В якому порядку виконується розрахунок статично невизначуваних систем методом сил (методика розрахунку)?
24. Що таке основна система?
25. Що таке еквівалентна система?
26. Поясніть фізичний зміст коефіцієнтів і самих канонічних рівнянь методу сил.
27. Якими двома способами можуть бути побудовані остаточні епюри внутрішніх зусиль?
28. Що слід розуміти під раціональним вибором основної системи?
29. В чому полягає сутність деформаційної (кінематичної) перевірки правильності рішення статично невизначуваної задачі? Яким чином здійснюється ця перевірка?

Список літератури

1. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
3. Конохов В.И., Хавин В.Л., Киркач А.Б. Расчеты на прочность стержней при центральном растяжении-сжатии / учебно-методическое пособие по разделу курса «Соппротивление материалов». – Харьков, НТУ «ХПИ», 2017. – 84с.
4. Конохов В.И., Хавин В.Л., Автономова Л.В. Розрахунки стержнів при крученні. / навчально-методичний посібник з розділу курсу «Опір матеріалів». – Харків, НТУ «ХПИ», 2011. – 75с.

Зміст

Вступ	3
1. ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ	4
1.1. Потенційна енергія пружної деформації стрижневих систем	4
1.2. Теорема Кастільяно	9
1.3. Інтеграл Мора	10
1.4. Правило Верещагіна обчислення інтегралу Мора (спосіб «перемноження епюр»)	16
1.5. Використання формул чисельного інтегрування для «перемноження» епюр	22
1.6. Теореми про взаємність робіт та переміщень	24
1.7. Приклад розрахунку переміщень та кутів повороту при поперечному плоскому згинанні балки	27
1.8. Приклад розрахунку переміщень в просторовій стрижневій системі	33
1.9. Розрахунково-проектувальне завдання	38
2. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СТРИЖНЕВІ СИСТЕМИ.	
МЕТОД СИЛ	47
2.1. Основні поняття та визначення	47
2.2. Метод сил	51
2.3. Канонічні рівняння методу сил	54
2.4. Використання симетрії стрижневої системи	66
2.5. Плоско-просторові статично невизначувані стрижневі системи	70
2.6. Розв'язання статично невизначуваних задач розтягання- стискання	72
2.7. Розв'язання статично невизначуваних задач кручення	78
2.8. Приклад розкриття статичної невизначуваності балки	81
2.9. Приклад розкриття статичної невизначуваності рами	89
2.10. Розрахунково-проектувальне завдання	97
Контрольні запитання	107
Список літератури	108

Навчальне видання

КИРКАЧ Борис Миколайович
КИРКАЧ Олексій Борисович
ХАВІН Валерій Львович
КОНОХОВ Володимир Іванович
ПОГОРІЛОВ Сергій Юрійович

ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.
МЕТОД СИЛ

Навчально-методичний посібник
з розділу курсу «Опір матеріалів»
для студентів машинобудівних спеціальностей

Роботу до видання рекомендував доц. Шелковий С.К.
Відповідальний за випуск проф. Хавін В.Л.

Редактор М.П. Єфремова

План 2017 р., поз. 150

Підп. до друку 2017 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк.
Наклад 100 прим. Зам. № Ціна договірна.

Видавець і виготовлювач
видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Багалія, 21