ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

УДК 519.8 doi:10.20998/2413-4295.2018.45.19

ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ ДВУХЭТАПНОГО ПРОИЗВОДСТВА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МОЩНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЙ ПЕРВОГО ЭТАПА

С. А. УС[1], О. Д. СТАНИНА[2*]

[1] *кафедра системного анализа и управления, НТУ «Днепровская политехника», Днепр, УКРАИНА*
[2] *кафедра информационных систем, ГВУЗ «Украинский химико-технологический университет»», Днепр, УКРАИНА*
[*] *e-mail: stanina@i.ua*

АННОТАЦИЯ *Задачи оптимального размещения предприятий - благодатная почва для разработки новых методов моделирования, инновационных алгоритмов решения и интересных применений. В статье описывается задача размещения двухэтапного производства с ограничениями на мощности предприятий первого этапа. Такие задачи возникают, например, при стратегическом планировании развития региона, решении задач оптимального размещении предприятий и определении зон их влияния, и представляют практический интерес для коммерческих (размещение складов, магазинов, точек обслуживания и пр.) и государственных (школы, больницы, пожарные станции и пр.) компаний. Целью работы является построение математической модели двухэтапной задачи оптимального размещения-распределения при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа, краткое описание метода ее решения и формулирование алгоритма решения. В качестве критерия оптимальности решения задачи размещения была выбрана совокупная стоимость доставки продукта. Методы решения основаны на принципах бесконечномерной оптимизации и теории двойственности. Подход к решению такой задачи основан на решении задачи оптимального разбиения множеств и дискретной многоэтапной задачи размещения. Единый подход к решению задач оптимального разбиения множеств заключается в преобразовании исходных задач в задачи бесконечномерного математического программирования с помощью характеристических функций, а затем в конечномерную задачу оптимизации с использованием функционала Лагранжа. Разработан итерационный алгоритм решения задачи. Он объединяет метод потенциалов, применяемый для классической задачи линейного программирования транспортного типа и алгоритм Н.З. Шора, позволяющий решить задачу оптимизации негладкой функции. Был разработан программный продукт для решения двухэтапных задач оптимального размещения предприятий с непрерывно распределенным ресурсом. Результаты, полученные авторами, позволяют решать ряд практических задач, связанных со стратегическим планированием в сфере производственной и социально-экономической деятельности.*
Ключевые слова: *оптимальное разбиение множеств; задачи размещения-распределени;, многоэтапные задачи размещении; транспортно-производственные задачи; r-алгоритм Шора; задача линейного программирования транспортного типа*

THE PROBLEM OF PLACING A TWO-STAGE PRODUCTION WITH RESTRICTIONS ON THE CAPACITY OF THE FIRST STAGE ENTERPRISES

S. US[1], O. STANINA[2]

[1] *Department of System Analysis and Management, NTU «Dnipro Polytechnic», Dnipro, UKRAIINE*
[2] *Department of Information Systems, SHEI Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro, UKRAIINE*

ABSTRACT *Facility location problems are a fertile ground for the development of new modelling techniques, innovative solution algorithms and exciting applications. The article describes a problem of placing a two-stage production with restrictions on the capacity of the first stage enterprises. Such problems arise, for example, in strategic planning of development of the region. The problems of optimal placement companies and identifying areas of their influence are interesting for business (allocation of warehouses, shops, service outlets, etc.) and public companies (schools, hospitals, fire stations and so forth.) The tasks of research were to construct the mathematical model for a two-stage of optimal location-allocation problem considering the restrictions on the capacity of enterprises of the first stage; to describe the solution method and to formulate an algorithm. In this paper, authors gave the mathematical model of the problem, a brief description of the solution method and algorithm. Aggregate cost of product delivery was chosen as a criterion for optimal location problem. Solving methods are based on principles of infinite-dimensional optimization and duality theory. The approach to solution of this type of problem is based on the solution of the problem of optimal partitioning set and discrete multi-stage location problem. A unified approach to solving optimal partitioning set problems lies in the conversion of the initial problems into infinite-dimensional mathematical programming problems by means of the characteristic functions, and then into the finite optimization problem using Lagrangian functional. Iterative algorithm to solve the problem has been elaborated. The algorithm combines a method of potentials being applied for classical problem of linear programming of transportation type and N.Z. Shor's algorithm making it possible to solve optimization problem of nonsmooth function. Software product has been developed to solve two-stage problems of optimal location of enterprises with continuously resources. The results obtained by authors make it possible to solve a range of practical problems connected with strategic planning in the sphere of production, social and economic activities.*
Keywords: *optimal partitioning set; location-allocation problem; multi-stage location problem; transport and production problem; Shor's r-algorithm; transport linear programming problem*

Введение

Исследование задач размещения многоэтапного производства является одним из активно развивающихся направлений современного исследования операций. Интерес к таким задачам вызван прежде всего тем, что являясь обобщением задач производственно транспортного планирования они дают возможность построения моделей к которым в математической постановке сводится достаточно широкий класс теоретических и практических задач оптимизации. Заметим, что подобные задачи часто возникают на практике. Примером таких задач могут быть процессы добычи и обработки природного сырья – нефти, руды и т.п. Характерной особенностью такого производства является наличие нескольких этапов, которые реализуются на предприятиях разного типа. Таким образом, производственный процесс включает в себя несколько стадий (этапов), для выполнения которых требуются различные производственные ресурсы. Кроме того, при размещении предприятий первого этапа, важно учитывать распределение сырья в рассматриваемой области.

Многоэтапные задачи в дискретной постановке рассматривались в работах [1–4]. Математические модели многоэтапных задач размещения в дискретном варианте рассматривались в работах [5,6], в непрерывных варианте в работах [7,8]. Важной особенностью таких задач является учет непрерывного распределения ресурса в заданной области, которое часто встречается у предприятий работающих с природным сырьем. Авторами также были предложены подходы к их решению. В данной работе рассмотрена задача размещения двухэтапного производства с непрерывно распределенным ресурсом при наличии ограничений на мощности предприятий первого этапа, которая возникает на одном из этапов решения непрерывной многоэтапной задачи размещения производства

Цель работы

Целью работы является построение математической модели двухэтапной задачи оптимального размещения-распределения при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа, краткое описание метода ее решения и формулирование алгоритма решения.

Изложение основного материала

Содержательную постановку двухэтапной задачи оптимального размещения-распределения при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа можно сформулировать следующим образом. Пусть имеем некоторое производство, связанное с субъектами, которые получают сырье от поставщиков непрерывно распределенных на определенной территории, перерабатывают его и отправляют для реализации (или дальнейшей переработки) в пункты, расположение которых заранее известно. Пункты, перерабатывающие сырье, будем называть пунктами первичной переработки или предприятиями первого этапа, а пункты дальнейшей переработки, сортировки, фасовки - пунктами дальнейшей переработки или предприятиями второго этапа.

Предположим, что каждый поставщик сырья $x \in \Omega$ связан только с одним предприятием первого этапа τ_i^I, $i = \overline{1, N}$, который в свою очередь может быть связан с одним или несколькими предприятиями второго этапа τ_j^{II}, $j = \overline{1, M}$.

Необходимо разместить предприятия первого этапа, определить для них зоны обслуживания и объемы перевозок между предприятиями первого и второго этапов таким образом, чтобы обеспечить минимальную суммарную стоимость доставки сырья и конечной продукции. Будем считать, что поставщики сырья и предприятия первого и второго этапов находятся в одной и той же области, которая в свою очередь разделена между пунктами первичной переработки сырья на зоны обслуживания.

Для построения математической модели введем следующие предположения и обозначения: Ω – заданная область; N – количество предприятий первого этапа; τ_i^I, $i = 1, 2, \ldots$ – координаты размещения предприятий первого этапа, Ω_i – зона обслуживания i-го предприятия первого этапа $i = 1, 2, \ldots$; M – количество предприятий второго этапа; $\tau_1^{II}, \ldots, \tau_M^{II}$ – координаты размещения предприятий второго этапа; v_{ij} – объем перевозки от предприятия первого этапа с координатами τ_i^I до предприятия τ_j^{II} второго этапа, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2 \ldots$; b_i^I – мощность i -го предприятия I- го этапа; b_j^{II} – мощность j -го предприятия II- го этапа; $c_i^I(x, \tau_i^I)$ – стоимость доставки единицы сырья с точки $x \in \Omega$ к i-му предприятию I этапа; $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ – стоимость доставки единицы сырья от i- го предприятия I этапа к j- му предприятию II этапа; $\rho(x)$ – количество ресурса в точке x области Ω;

Сформулируем соответствующую математическую модель сохраняя обозначения и терминологию, введенную в монографиях [9, 10].

В соответствии с [11, 12] определим разбиение множеств следующим образом. Пусть Ω – замкнутое, ограниченное, выпуклое, измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n. Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ из $\Omega \subset E_N$ будем называть разбиением множества Ω на N подмножеств, если выполняются такие условия:

$$\bigcup \quad ,$$

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \; i \neq j, \; i, j = \overline{1, N},$$

где $mes(\cdot)$ – мера Лебега.

Класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств обозначим через $\sum_{\Omega}^{N}$, т.е.

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

$$\Sigma_{\Omega}^{N} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\Omega_1,...,\Omega_N\} : \bigcup_{i=1}^{N} & (\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,N} & \end{array} \right\}.$$

Сформулируем теперь математическую постановку задачи.

Задача 1. (Двухэтапная задача оптимального размещения-распределения при наличии ограничений на мощность предприятий первого этапа). Нужно найти такое разбиение множества Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые), определить координаты $\tau_i^I, ..., \tau_N^I$ центров этих подмножеств, и такие объемы перевозок $v_{11},...,v_{NM}$, которые обеспечивают минимум функционала

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1^I,...,\tau_N^I\},\{v_{11},...v_{NM}\}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij},$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = b_i^I, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = b_i^I, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1,M},$$

$$\{\Omega_1,...,\Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^{N},$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,...,N, \quad j = 1,2,...,M,$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \tau_2^I, ..., \tau_N^I), \quad \tau^I \in \Omega^N,$$

Функции $c_i^I(x,\tau_i^I)$, $i = \overline{1,N}$ – действительные, ограниченные, измеримые по аргументу x на Ω; $\rho(x)$ – действительная, интегрируемая, определенная на Ω функция; τ_i^I, $i = \overline{1,N}$, τ_j^{II}, $j = \overline{1,M}$ – заданные точки области Ω; $c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,M}$ – заданные неотрицательные числа; $b_i^I, i = \overline{1,N}$, b_j^{II}, $j = \overline{1,M}$ – заданные действительные неотрицательные числа.

Интегралы понимаются в смысле Лебега.

Решение этой задачи основано на методе ОРМ, описанном в монографии [1]. Его идея состоит в переходе от исходной задачи, через характеристические функции $\lambda_i(\cdot)$ подмножеств Ω_i, $i = 1,2,...,N$, к задаче с булевыми переменными и затем к задаче со значениями $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1,2,...,N$ из отрезка [0,1], а именно:

Задача 2. Найти

$$\min_{\lambda(\cdot),\tau,v} I(\lambda(\cdot),\tau,v)$$

При ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1, \quad \text{п.в для } x \in \Omega,$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)\lambda_i(x)dx = b_i^I, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = b_i^I, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1,M},$$

$$\lambda(x) \in \Gamma_1, \quad \tau^I \in \Omega^N, \quad v \in R_{NM}^{+},$$

где

$$I(\lambda(\cdot),\tau,v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} c_i^I(x,\tau_i)\rho(x)\lambda_i(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij}$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = \lambda_1(x),...,\lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1,N},$$
$$\text{п.в для } x \in \Omega\}$$

Обсуждение результатов

Результат решения задачи 2 можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Оптимальное решение $\{\lambda^*(\cdot),\tau^*,v^*\}$ задачи 2 определяется следующим образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega = \{x \in \Omega : c_i^I(x,\tau_i^{I*}) + \psi_i^* = \\ & = \min_k (c_k^I(x,\tau_k^{I*}) + \psi_k^*)\}, \\ 0, & \text{в другом случае}, \quad i = \overline{1,N}, \end{cases}$$

а компоненты $\tau^*, v^*, \varphi^*, \psi^*, \eta^*$ являются оптимальным решением двойственной задачи, приведенной к виду:

$$G(\{\varphi,\psi,\eta\}) = \min_{\{\tau,v\}\in\Omega^N\times R_{NM}^+} G_1(\{\tau,v\},\{\varphi,\psi,\eta\}) =$$
$$= \min_{\{\tau,v\}\in\Omega^N\times R_{NM}^+} \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \min_k (c_k^I(x,\tau_k^I) + \psi_i)\rho(x) + \right.$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} (c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II}) - \varphi_i - \eta_j)v_{ij} +$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i b_i^I + \sum_{j=1}^{M} \eta_j b_j^{II} \right] \to \max$$

Опишем алгоритм решения задачи, который предусматривает использование r-алгоритмом Шора.

Шаг 0. Область Ω заключаем в параллелепипед П, стороны которого параллельны осям декартовой системы координат. Полагаем $\rho(x) = 0$ для точек $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед П покрываем прямоугольной.

1. Пусть $k = 0$. Задаем начальное приближение координат центров $\tau^I = \tau^{I(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$ и вектор-функции $\lambda(x) = \lambda(x)^{(k)}$ для всех точек сетки $x \in \Omega$.

2. Вычисляем значение $\lambda(x)^{(k)}$ в узлах сетки по следующей формуле:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } \left(c_i^I(x,\tau_i^I) + \psi_i\right)\rho(x) = \\ \quad = \min\limits_m (c_m^I(x,\tau_m^I) + \psi_m)\rho(x), \\ 1, \text{ в другом случае,} \end{cases}$$

3. Определяем начальные значения $v_{ij}^{(k)}$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$, решая методом потенциалов следующую транспортную задачу 3:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})\nu_{ij}^k \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij}^k = b_j^{II},\ j=1,2,...,M,$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij}^k = b_i^{I(k)},\ i=1,2,...,N$$

$$\nu_{ij}^k \ge 0,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}.$$

В качестве значений двойственных переменных $\eta_j^{(k)}$, $j=\overline{1,M}$, і $\psi^{(k)}$, $i=\overline{1,N}$, выбираем значения соответствующих потенциалов, полученные на последней итерации метода потенциалов.

Пусть в результате k шагов алгоритма $k=1,2,\ldots$ полученные значения потенциалов $\psi_1^k,\psi_2^k,...,\psi_N^k$. Опишем $(k+1)$-й шаг.

Шаг $(k+1)$.

4. Вычисляем значение $\lambda_i^{k+1}(x)$ в узлах сетки по формуле (3.41) при $\psi=\psi^{(k)}$, $v=v^{(k)}$, $\eta=\eta^{(k)}$.

5. Вычисляем значение $v_{ij}^{(k+1)}$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$, решая методом потенциалов транспортную задачу 3. В качестве значений двойственных переменных $\eta_j^{(k+1)}$, $j=\overline{1,M}$, і $\psi_i^{(k+1)}$, $i=\overline{1,N}$, выбираем значения потенциалов, соответствующих оптимальному решению задачи (3.42).

6. Вычисляем компоненты субградиента $g_G^{\tau^I}(v,\psi,\eta)$ в узлах сетки по формуле:

$$g_G^{\tau_i^I} = \int_\Omega \rho(x) g_{c^I}^{\tau_i^I}\lambda_i(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} g_{c^{II}}^{\tau_i^I} v_{ij},\ i=\overline{1,N}$$

где $g_{c^I}^{\tau_i^I}$ – i-я компонента $2N$-мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau_i^I}$ функции c_i^I в точке τ^I, $g_{c^{II}}^{\tau_i^I}$ – i-я компонента $2N$-мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau_i^I}$ функции c_{ij}^{II} в точке τ^I при $\tau^I=\tau^{I(k)}$, $\psi=\psi^{(k)}$, $\lambda_i(x)=\lambda_i^{k+1}(x)$, $v=v^{(k+1)}$, $\eta=\eta^{(k+1)}$.

7 Выбираем шаг $h_i>0$ r-алгоритма и находим:

$$\tau^{I(k+1)} = P_\Pi\left(\tau^{I(k)} - h_k B_k^\tau g_G^\tau(\tau^{I(k)},\nu^{(k+1)},\psi^{(k+1)})\right)$$

где P_Π – оператор проектирования на П, B_k^τ – оператор преобразования пространства в основное пространство E_N, который имеет вид:

$$B_k^\tau = B_{k-1}^\tau(I + (\frac{1}{\alpha}-1)\Theta_{k-1}^\tau(\Theta_{k-1}^\tau)^T))$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности, Θ_{k-1}^τ – соответствует нормированному вектору разности двух последовательных субградиентов в преобразованном пространстве, то есть:

$$\Theta_{k-1}^\tau = \frac{(B_{k-1}^\tau)^T\left(g_G^\tau(\tau^{I(k)},\nu^{(k+1)},\psi^{(k+1)}) - g_G^\tau(\tau^{I(k-1)},\nu^{(k)},\psi^{(k)})\right)}{\left\|(B_{k-1}^\tau)^T\left(g_G^\tau(\tau^{I(k)},\nu^{(k+1)},\psi^{(k+1)}) - g_G^\tau(\tau^{I(k-1)},\nu^{(k)},\psi^{(k)})\right)\right\|}$$

при условии, что $\left\|(B_{k-1}^\tau)^T\left(g_G^\tau(\tau^{I(k)},\nu^{(k+1)},\psi^{(k+1)}) - g_G^\tau(\tau^{I(k-1)},\nu^{(k)},\psi^{(k)})\right)\right\| \le \varepsilon$, и $\Theta_{k-1}^\tau = 0$ в других случаях. Здесь ε – точность представления нуля ЭВМ.

8 Если условие

$$\left\|\left(\tau^{I(k)},\nu^{(k)},\psi^{(k)},\eta^{(k)}\right) - \left(\tau^{I(k+1)},\nu^{(k+1)},\psi^{(k+1)},\eta^{(k+1)}\right)\right\| \le \varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$ выполняется, то переходим к п.9, если нет - осуществляется переход на $(k+2)$ шаг.

9. Рассчитываем значение целевого и двойственного функционалов. Конец алгоритма.

Алгоритм описан.

Предложенный алгоритм был программно реализован и апробирован на модельных задачах. Результаты численных экспериментов показали возможность его применения для решения практических задач.

Выводы

В данной работе сформулирована математическая модель задачи размещения двухэтапного производства с непрерывно распределенным ресурсом и предложен алгоритм ее решения, составной частью которого является r-алгоритм Н.З. Шора и метод потенциалов. Предложенный алгоритм, был апробирован на модельных задачах. Новый инструментарий позволяет не только осуществлять размещение предприятий более эффективно, но и создает новые направления в исследованиях непрерывных задач оптимального разбиения множеств и размещения предприятий.

Список литературы

1. **Farahani, R. Z.** Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies / **R. Z. Farahani, M. Hekmatfar.** – Springer-Verlag, Berlin, 2009. – p. 549. – doi: 10.1007/978-3-7908-2151-2.
2. **Wollenweber, J.** A multi-stage facility location problem with staircase costs and splitting of commodities: model, heuristic approach and application / **J. Wollenweber.** – OR Spectrum, 2008. – doi: 10.1007/s00291-007-0114-3.

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

3. **Bischoff, M.** The Multi-Facility Location-Allocation Problem with Polyhedral Barriers / **M. Bischoff, T. Fleischmann, K. Klamroth** // *Computers & Operations Research.* – 2009. – Vol. 36. – P. 1376–1392. – doi: 10.1016/j.cor.2008.02.014.
4. **Korać, V.** An Improved Genetic Algorithm for the Multi Level Uncapacitated Facility Location Problem / **V. Korać, J. Kratica, A. Savić** // *Int. J. Comput. Commun.* – 2013. – 8(6). – P. 845-853. – doi: 10.15837/ijccc.2013.6.134.
5. **Irawan, C. A.** Formulation and solution of a two-stage capacitated facility location problem with multilevel capacities / **C. A. Irawan, D. Jones** // *Ann. Oper. Res.* – 2018. – P. 1-27. – doi: 10.1007/s10479-017-2741-7.
6. **Camilo, O**. Multi-level facility location problems / **O. Camilo, I. Contreras, G. Laporte.** // *European Journal of Operational Research.* – 2017. – 267. – P. 791-805. – doi: 10.1016/j.ejor.2017.10.019.
7. **Us, S. A.** On some mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry / **S. A Us**, **O. D. Stanina** // *Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Mining.* – 2015. – P. 419-424.
8. **Ус, С. А.** О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий / **С. А. Ус, О. Д. Станина** // *Питання прикладної математики і математичного моделювання.* Видавництво ДНУ. – 2014. – С. 258-268.
9. **Киселева, Е. М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / **Е. М. Киселева, Н. З. Шор.** – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
10. **Киселева, Е. М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств / **Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина.** – К.: Наук. думка, 2013. – 606 с.
11. **Kiseleva, E. M.** Theory of Continuous Optimal set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. Algorithms for Constructing Voronoi Diagrams Based on the Theory of Optimal set Partitioning / **E. M. Kiseleva, L. S. Koriashkina** // *Cybernetics and Sys. Anal.* – 2015. – 51, 4. – P. 489-499. – doi: 10.1007/s10559-015-9740-y.
12. **Kiseleva, E. M.** Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations / **E. M. Kiseleva, L. S. Koriashkina** // *Cybernetics and Sys. Anal.* – 2015. – 51. – 3. – P. 325-335. – doi: 10.1007/s10559-015-9725-x.

References (transliterated)

1. **Farahani, R. Z., Hekmatfar, M.** Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies. Springer-Verlag, 2009, 549, doi: 10.1007/978-3-7908-2151-2.
2. **Wollenweber, J.** A multi-stage facility location problem with staircase costs and splitting of commodities: model, heuristic approach and application. OR Spectrum, 2008, doi: 10.1007/s00291-007-0114-3.
3. **Bischoff, M., Fleischmann, T., Klamroth, K.** The Multi-Facility Location-Allocation Problem with Polyhedral Barriers, *Computers & Operations Research*, 2009, **36**, 1376–1392, doi: 10.1016/j.cor.2008.02.014.
4. **Korać, V., Kratica, J., Savić, A.** An Improved Genetic Algorithm for the Multi Level Uncapacitated Facility Location Problem. *Int. J. Comput. Commun.*, 2013, **8**(6), 845-853, doi: 10.15837/ijccc.2013.6.134.
5. **Irawan, C. A., Jones, D.** Formulation and solution of a two-stage capacitated facility location problem with multilevel capacities. *Ann Oper Res*, 2018, 1-27, doi: 10.1007/s10479-017-2741-7.
6. **Camilo, O., Contreras, I., Laporte, G.** Multi-level facility location problems. *European Journal of Operational Research*, 2017, **267,** 791-805, doi: 10.1016/j.ejor.2017.10.019.
7. **Us, S. A.**, **Stanina, O. D.** On some mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry, *Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Mining*, 2015, 419-424.
8. **Us, S. A., Stanina, O. D.** O matematicheskih modeljah mnogojetapnyh zadach razmeshhenija predprijatij. *Pitanija prikladnoї matematiki i matematichnogo modeljuvannja: zb.nauk.pr*., Vid-vo «Lira», 2014, 258-268.
9. **Kiseleva, E. M., Shor, N. Z.** Nepreryvnye zadachi optimal'nogo razbienija mnozhestv: teorija, algoritmy, prilozhenija: Monografija. K.: Naukova dumka, 2005, 564.
10. **Kiseleva, E. M., Koriashkina, L. S.** Models and methods for solving continuous problems of optimal partitioning of sets, K.: Naukova Dumka, 2013, 606.
11. **Kiseleva, E. M., Koriashkina, L. S.** Theory of Continuous Optimal set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations I. Algorithms for Constructing Voronoi Diagrams Based on the Theory of Optimal set Partitioning. *Cybernetics and Sys. Anal*., 2015, **51**, 4, 489-499, doi: 10.1007/s10559-015-9740-y.
12. **Kiseleva, E. M., Koriashkina, L. S.** Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations I. Theoretical Foundations. *Cybernetics and Sys. Anal.*, 2015, **51**, 3, 325-335, doi: 10.1007/s10559-015-9725-x.

Сведения об авторах (About authors)

Ус Светлана Альбертовна – кандидат физико-математических, доцент, НТУ «Днепровская политехника», профессор кафедры системного анализа и управления; г. Днепр, Украина; ORCID: 0000-0003-0311-9958; e-mail: ussvetlanna@gmail.com.

Svetlana Us – Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent, NTU «Dnipro Polytechnic», Professor at the Department of System Analysis and Management, Dnipro, Ukraine; ORCID: 0000-0003-0311-9958; e-mail: ussvetlanna@gmail.com.

Станина Ольга Дмитриевна – ДВНЗ «Украинский химико-технологический университет», ассистент кафедры информационных систем, г. Днепр, Украина; e-mail: stanina@i.ua.

Olga Stanina – Ukrainian State University of Chemical Technology, Teaching Assistant of Department of Information Systems, Dnipro, Ukraine; e-mail: stanina@i.ua.

Пожалуйста, ссылайтесь на эту статью следующим образом:
Ус, С. А. Задача размещения двухэтапного производства с ограничениями на мощности предприятий первого этапа / **С. А. Ус, О. Д. Станина** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Новые решения в современных технологиях*. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2018. – № 45 (1321). – С. 142-147. – doi:10.20998/2413-4295.2018.45.19.

Please cite this article as:
Us, S., Stanina, O. The problem of placing a two-stage production with restrictions on the capacity of the first stage enterprises. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2018, **45** (1321), 142–147, doi:10.20998/2413-4295.2018.45.19.

Будь ласка, посилайтесь на цю статтю наступним чином:
Ус, С. А. Задача розміщення двоетапного виробництва з обмеженнями на потужності підприємств першого етапу / **С. А. Ус, О. Д. Станіна** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – № 45 (1321). – С. 142-147. – doi:10.20998/2413-4295.2018.45.19.

АНОТАЦІЯ *Задача оптимального розміщення підприємств – сприятлива область для розробки нових методів моделювання, інноваційних алгоритмів розв'язку і цікавих застосувань. У статті описується задача розміщення двоетапного виробництва з обмеженнями на потужності підприємств першого етапу. Такі задачі виникають, наприклад, при стратегічному плануванні розвитку регіону, вирішенні задач оптимального розміщенні підприємств і визначенні зон їх впливу, і становлять практичний інтерес для комерційних (розміщення складів, магазинів, точок обслуговування та ін.) і державних (школи, лікарні, пожежні станції та ін.) компаній. Метою роботи є побудова математичної моделі двоетапної задачі оптимального розміщення-розподілу при наявності обмежень на потужність підприємств першого етапу, короткий опис методу її розв'язування і формулювання алгоритму розв'язку. В якості критерію оптимальності розв'язку задачі розміщення була обрана сукупна вартість доставки продукту. Методи розв'язування засновані на принципах нескінченновимірної оптимізації та теорії двоїстості. Підхід до розв'язування такої задачі заснований на вирішенні задачі оптимального розбиття множин і дискретної багатоетапної задачі розміщення. Єдиний підхід до вирішення задачі оптимального розбиття множин полягає в перетворенні вихідної задачі до задачі нескінченновимірного математичного програмування за допомогою характеристичних функцій, а потім в скінченновимірну задачі оптимізації з використанням функціоналу Лагранжа. Розроблено ітераційний алгоритм розв'язання задачі. Він об'єднує метод потенціалів, застосовуваний для класичної задачі лінійного програмування транспортного типу і алгоритм Н.З. Шора, що дозволяє вирішити задачу оптимізації негладкою функції. Був розроблений програмний продукт для вирішення двоетапних задач оптимального розміщення підприємств з нескінченно розподіленим ресурсом. Результати, які отримані авторами, дозволяють вирішувати ряд практичних завдань, пов'язаних зі стратегічним плануванням у сфері виробничої, соціальної та економічної діяльності.*

Ключові слова: *оптимальне розбиття множин; задача розміщення-Розподілу; багатоетапні задачі розміщенні; транспортно-виробничі задачі; r-алгоритм Шора; задача лінійного програмування транспортного типу*

Поступила (received) 18.11.2018