

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
“ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**до лабораторних занять з курсу**  
**“ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ”**

для студентів спеціальностей  
121 “Інженерія програмного забезпечення”,  
122 “Комп’ютерні науки”

Харків 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
“ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**до лабораторних занять з курсу**  
**“ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ”**

для студентів спеціальностей  
121 “Інженерія програмного забезпечення”,  
122 “Комп’ютерні науки”

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол №3 від 26.10.2022

Харків НТУ “ХПІ” 2023



## ВСТУП

Метою лабораторного практикуму є закріплення студентами теоретичних знань і набуття практичних навичок до розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації.

У загальному випадку формально задача багатокритеріальної оптимізації, ключовою особливістю якої є суперечливість множини функцій мети (критеріїв), може бути подана в такому вигляді:

$$f_i(x) \rightarrow \max, i \in I_1,$$

$$f_i(x) \rightarrow \min, i \in I_2,$$

$$\varphi_j(x) \leq 0, j \in J,$$

де  $I_1$  та  $I_2$  – множини індексів функцій мети  $f_i(x)$ , які відповідно максимізуються і мінімізуються, причому  $I = I_1 \cup I_2$ ;  $J$  – множина індексів функцій  $\varphi_j(x)$ , що визначають обмеження задачі та формують множину припустимих варіантів альтернатив;  $x$  – вектор змінних задачі багатокритеріальної оптимізації, з яким пов'яжемо поняття альтернативи – варіанта розв'язку, що задовольняє обмеження задачі і є способом досягнення поставлених цілей.

При розв'язанні задач багатокритеріальної оптимізації необхідно розв'язувати питання про знаходження альтернатив, які були б кращими щодо деякої множини цільових функцій. Для розв'язання цього питання використовують два поняття: домінуюча та недомінуюча альтернатива. Якщо  $x \succ y$ , то альтернатива  $x$  переважніша за альтернативу  $y$ , тому що при переході від  $y$  до  $x$  ми нічого не програємо за жодним із критеріїв. Можна говорити в цьому випадку, що  $x$  домінує  $y$ . Якщо в множині припустимих варіантів альтернатив для деякої альтернативи  $x$  існує хоча б одна альтернатива  $\hat{x}$  така, що  $\hat{x} \succ x$ , то альтернатива  $x$  називається такою, що домінується. Якщо ж такої альтернативи  $\hat{x}$  не існує, то  $x$  називається недомінуючою або ефективною.

У термінах цільових функцій поняття ефективної альтернативи може бути визначене в такий спосіб. Альтернатива  $x^*$  називається ефективною на множині припустимих варіантів альтернатив  $A = \{\varphi_j(x) \leq 0, j \in J\}$ , якщо не існує такої альтернативи  $\hat{x}$ , для якої одночасно виконувалися б нерівності:

$$f_i(\hat{x}) \geq f_i(x^*) \quad \forall i \in I_1,$$

$$f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*) \quad \forall i \in I_2$$

і хоча б одна з них була б строгою. Іншими словами, ніяка інша альтернатива не може “поліпшити” значення деяких функцій мети, не “погіршуючи” при цьому значень хоча б однієї з функцій мети, що залишилися. Тому іноді ефективну альтернативу називають такою, яку не можна поліпшити відносно множини функцій мети, або оптимальною за Парето.

До пошуку ефективних альтернатив застосовуються методи, які належать до особливого класу методів, що забезпечують розв’язання саме задач багатокритеріальної оптимізації.

У лабораторному практикумі наводяться теоретичні основи підходів до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації, приклади їхнього використання, контрольні завдання та посилання на літературу, що рекомендується.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

**Тема.** Розв’язання багатокритеріальної задачі щодо знаходження ефективних альтернатив за допомогою теореми Карліна.

Основні положення теореми Карліна формулюються не для первісно заданої множини функцій мети  $\{f_i(x), i \in I\}$ , а для множини функцій  $\{\omega_i(x) = \omega_i(f_i(x)), i \in I\}$ , що складається з монотонних перетворень окремих функцій мети  $f_i(x)$ , які приводять їх до безрозмірного вигляду.

Коротко зупинимось на зазначених перетвореннях. За останні можна взяти одну з монотонних функцій такого вигляду:

$$\omega_i(f_i(x)) = \begin{cases} \frac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0 - f_{i(\min)}}, & i \in I_1 \\ \frac{f_i(x) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0}, & i \in I_2 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\omega_i(f_i(x)) = \begin{cases} \frac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0}, & i \in I_1 \\ \frac{f_i(x) - f_i^0}{f_i^0}, & i \in I_2 \end{cases}, \quad (2)$$

$$\bar{\omega}_i(f_i(x)) = (\omega_i(f_i(x)))^\mu, \quad i \in I, \quad (3)$$

де  $f_{i(\min)}$ ,  $f_{i(\max)}$  – найменші і найбільші значення функцій мети, які відповідно максимізуються і мінімізуються на множині припустимих варіантів альтернатив;  $f_i^0$  – оптимальне значення  $i$ -ї функції мети на множині припустимих варіантів альтернатив;  $\mu$  – число, що визначає степінь, на яку підноситься перетворення (1) або (2).

З урахуванням вищевикладеного матеріалу формулюється теорема Карлина.

**Теорема Карлина.** Якщо множина припустимих альтернатив  $A$  опукла та замкнена, а функції мети  $\omega_i(f_i(x))$  увігнуті, то для будь-якої ефективної альтернативи  $x^*$  існує такий вектор вагових коефіцієнтів  $\{\rho_i, i \in I\}$  з компонентами  $\rho_i > 0$ ,  $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$ , що критерій:

$$F(x) = \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i(f_i(x))$$

досягає мінімуму на  $A$  при  $x = x^*$ .

Отже, множина ефективних альтернатив для множини функцій мети  $\{f_i(x), i \in I\}$  може бути знайдена шляхом розв'язання наступної задачі:

$$F(x) = \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i(f_i(x)) \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$x \in A, \quad (5)$$

$$\rho_i > 0, i \in I, \quad (6)$$

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1. \quad (7)$$

У тому випадку, коли функції  $\omega_i(f_i(x))$  не є увігнутими, або множина припустимих варіантів альтернатив неопукла, розв'язання задачі (4–7) з урахуванням варіювання компонент вектора  $\{\rho_i, i \in I\}$  не дозволяє відшукати всієї множини ефективних альтернатив.

Зазначимо, що  $i$ -та компонента  $\{\rho_i, i \in I\}$  визначає важливість  $f_i(x)$  функції мети, і чим більшого значення набуває  $\rho_i$ , тим більше значення буде мати відповідна функція мети.

**Ілюстративний приклад.** Нехай область припустимих варіантів альтернатив задана обмеженнями такого вигляду:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 1 &\geq 0, & 2x_1 + x_2 - 4 &\geq 0, \\ x_1 - x_2 + 1 &\geq 0, & x_1 - 4x_2 + 13 &\geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$-4x_1 + x_2 + 23 \geq 0.$$

Нехай множина функцій мети складається з двох функцій:

$$f_1(x) = -3x_1 + 6x_2, \quad (9)$$

$$f_2(x) = 3x_1 - x_2, \quad (10)$$

і перша функція максимізується, а друга – мінімізується.

Графічно область припустимих альтернатив зображено на рисунку 1.1.

Неважко бачити, що область припустимих варіантів альтернатив опукла, функції мети лінійні. Отже, до розв'язання задачі може бути застосована теорема Карлина.

Попередньо виконаємо допоміжні розрахунки. Нехай для монотонних перетворень функцій мети  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  буде використане монотонне перетворення (1). Тоді  $f_1^0$  може бути знайдене шляхом розв'язання задачі максимізації (9) при обмеженнях (8),  $f_2^0$  визначиться з розв'язання задачі мінімізації (10) при обмеженнях (8). Відповідно найменше значення функції мети (9) і найбільше значення функцій мети (10), що досягаються ними на множині припустимих варіантів альтернатив (8), можна буде знайти, розв'язавши такі задачі: мінімізувати (9) при обмеженнях (10) і максимізувати (10) при обмеженнях (8).

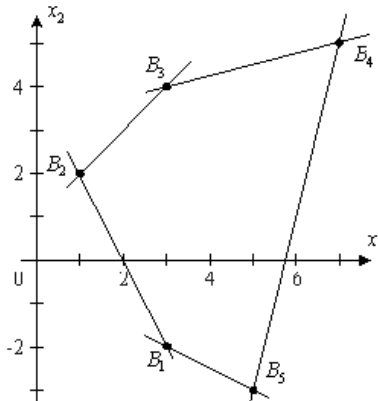


Рисунок 1.1

Результати допоміжних розрахунків наведені в таблиці 1.1.

Для пошуку ефективної альтернативи відповідно до положень

теореми Карлина на основі (4) сформуємо критерій  $F(x)$ :

Таблиця 1.1 – Вихідна інформація для побудови монотонних перетворень (1)

Показник	Значення	Точка
$f_1^0$	15	$B_3$
$f_2^0$	1	$B_2$
$f_{1(\min)}$	-33	$B_5$
$f_{2(\max)}$	18	$B_5$

$$F(x) = \rho_1 \frac{15 - (-3x_1 + 6x_2)}{15 - (-33)} + \rho_2 \frac{3x_1 - x_2 - 1}{18 - 1} \rightarrow \min. \quad (11)$$

Для розв'язання задачі (8), (11) необхідно задати числові значення кожному компоненту вектора вагових коефіцієнтів. Якщо  $\rho_1 = 0,7$  і  $\rho_2 = 0,3$ , то буде знайдена ефективна альтернатива (3; 4), у випадку, якщо  $\rho_1 = 0,3$  та  $\rho_2 = 0,7$ , то ефективною альтернативою буде альтернатива (1; 2).

Оскільки множина ефективних альтернатив визначається ребром  $B_2B_3$ , то при будь-яких  $\rho_1, \rho_2 > 0, \rho_1 + \rho_2 = 1$  у результаті мінімізації узагальненого критерію (11) буде знайдено не більше двох альтернатив.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

**Тема.** Розв'язання багатокритеріальної задачі щодо знаходження ефективних альтернатив за допомогою теореми Гермейєра.

Основні положення теореми Гермейєра аналогічно теоремі Карлина формулюються не для первісно заданої множини функцій мети  $\{f_i(x), i \in I\}$ , а для множини функцій  $\{\omega_i(x) = \omega_i(f_i(x)), i \in I\}$ , що складається з монотонних перетворень окремих функцій мети  $f_i(x)$ , які приводять їх до безрозмірного вигляду. За останні можна вибрати одну з монотонних функцій вигляду (1–3).

З урахуванням вищевикладеного матеріалу формулюється теорема Гермейєра.

**Теорема Гермейєра.** Нехай  $x^*$  – ефективна альтернатива множини функцій мети  $\{\omega_i(f_i(x)), i \in I\}$ , причому нехай  $\{\omega_i(f_i(x)) > 0, i \in I\}$ . Тоді існує

вектор  $\{\rho_i, i \in I\}$  з компонентами  $\rho_i > 0, \sum_{i \in I} \rho_i = 1$  такий, що критерій:

$$F(x) = \max_{i \in I} \rho_i \omega_i(f_i(x)) \quad (12)$$

досягає мінімуму на множині припустимих варіантів альтернатив  $A$ , при  $x = x^*$ . Як компонент  $\rho_i$  можна взяти  $\lambda_i / \lambda$ , де:

$$\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i, \quad \lambda_i = \frac{1}{\omega_i(f_i(x))}.$$

Також вектор вагових коефіцієнтів  $\{\rho_i, i \in I\}$  може бути заданий апріорно, виходячи з фізичного змісту задачі дослідження.

Особливістю даної теореми є той факт, що ніякі умови на вигляд функцій  $\omega_i(f_i(x))$  і обмежень, що описують множину припустимих варіантів альтернатив  $A$ , не накладаються.

Таким чином, множина ефективних альтернатив може бути знайдена з використанням теореми Гермейєра шляхом розв'язання наступної задачі:

$$F(x) = \max_{i \in I} \rho_i \omega_i(f_i(x)) \rightarrow \min, \quad (13)$$

при обмеженнях (5) і умовах (6–7). Причому  $\omega_i(f_i(x))$  – монотонне перетворення  $i$ -ї функції мети  $f_i(x)$ , побудоване на основі одного із припустимих варіантів (1–3).

**Ілюстративний приклад.** Як приклад, що ілюструє порядок застосування теореми Гермейєра до розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, розглянемо задачу (8–10). Також для формування  $\{\omega_i(f_i(x)), i = \overline{1,2}\}$  скористаємося результатами, поданими в таблиці 1.1.

Як приклад для побудови перетворення  $\{\omega_i(f_i(x)), i = \overline{1,2}\}$  виберемо перетворення двох типів (1) і (2).

Для перетворення (1) одержимо:

$$\left\{ \omega_1(f_1(x)) = \frac{15 - (-3x_1 + 6x_2)}{15 - (-33)}, \quad \omega_2(f_2(x)) = \frac{3x_1 - x_2 - 1}{18 - 1} \right\}. \quad (14)$$

Для перетворення (2) одержимо:

$$\left\{ \omega_1(f_1(x)) = \frac{15 - (-3x_1 + 6x_2)}{15}, \quad \omega_2(f_2(x)) = \frac{3x_1 - x_2 - 1}{1} \right\}. \quad (15)$$

Якщо відшукати ефективні альтернативи при вагових коефіцієнтах  $\rho_1 = 0,8, \rho_2 = 0,2$ , то для перетворень (14) і (15) будуть знаходитись різні ефективні альтернативи. Для (14) мінімум (13) буде досягатися в точці

(2,36; 3,36), а для (15) мінімум (13) досягається в точці (1,57; 2,57) ребра  $B_2B_3$ , що формує множину ефективних альтернатив. Якщо ж вибрати вагові коефіцієнти  $\rho_1 = 2/3$ ,  $\rho_2 = 1/3$ , то мінімум критерію (13) для (14) досягається в точці (2,03; 3,03) ребра  $B_2B_3$ , а для (15) – у точці (1,33; 2,33). Якщо для перетворення  $\{\omega_i(f_i(x)), i = \overline{1,2}\}$  вибрати перетворення вигляду (3), основане на (1), і задати  $\mu = 2$ , то при  $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$  мінімум критерію (13) знаходиться в точці (1,69; 2,69), у той час як при цих же вагових коефіцієнтах для перетворення (3), заснованого на (2), мінімум (13) знаходиться в точці (1,18; 2,18).

### ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

**Тема.** Розв'язання багатокритеріальної задачі за допомогою третьої теореми щодо знаходження ефективних альтернатив.

Особливістю третьої теореми в порівнянні з теоремою Карлина та теоремою Гермейера є те, що її основні положення формулюються для первісно заданої множини функцій мети  $\{f_i(x), i \in I\}$ , що не вимагає виконання додаткових перетворень, що приводять функції мети до безрозмірного вигляду.

З урахуванням вищевикладеного матеріалу формулюється третя теорема зі знаходження ефективних альтернатив.

**Теорема 3.** Якщо  $x^*$  – ефективна альтернатива множини функцій мети  $\{f_i(x), i \in I\}$ , то справедливо для кожного  $l \in I_1$ :

$$\begin{aligned} f_l(x^*) &= \max f_l(x), \\ f_i(x) &\geq f_i(x^*), i \in I_1, i \neq l, \\ f_i(x) &\leq f_i(x^*), i \in I_2, \\ x &\in A, \end{aligned}$$

або для кожного  $l \in I_2$ :

$$\begin{aligned} f_l(x^*) &= \min f_l(x), \\ f_i(x) &\geq f_i(x^*), i \in I_1, \\ f_i(x) &\leq f_i(x^*), i \in I_2, i \neq l, \\ x &\in A. \end{aligned}$$

Причому  $l$ -м критерієм, як правило, виступає критерій, оптимум якого досягається тільки в ефективних точках, а також має більшу значущість. У зв'язку з цим даний підхід до розв'язання багатокритеріальних задач називають методом головного критерію.

Таким чином, множина ефективних альтернатив для множини функцій мети  $\{f_i(x), i \in I\}$  може бути знайдена при розв'язанні задачі параметричного програмування (16–17) щодо параметрів  $z \in Z^{M-1}$ , якщо за головний критерій обрано критерій, що максимізується:

$$f_l(x) \rightarrow \max, \quad (16)$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned} f_i(x) &\geq z, i \in I_1, i \neq l, \\ f_i(x) &\leq z, i \in I_2, \\ x &\in A, \end{aligned} \quad (17)$$

де під  $Z^{M-1}$  розуміють область:

$$\bigcap_{\substack{i \in I_1 \\ i \neq l}} [f_{i(\min)}, f_i^0] \times \bigcap_{i \in I_2} [f_i^0, f_{i(\max)}].$$

У випадку, якщо за головний критерій обрано критерій, що мінімізується, то множина ефективних альтернатив може бути знайдена при розв'язанні задачі (18–19):

$$f_l(x) \rightarrow \min, \quad (18)$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned} f_i(x) &\geq z, i \in I_1, \\ f_i(x) &\leq z, i \in I_2, i \neq l, \\ x &\in A, \end{aligned} \quad (19)$$

де під  $Z^{M-1}$  розуміють область:

$$\bigcap_{i \in I_1} [f_{i(\min)}, f_i^0] \times \bigcap_{\substack{i \in I_2 \\ i \neq l}} [f_i^0, f_{i(\max)}],$$

де  $M$  – потужність множини  $I$ .

**Ілюстративний приклад.** Як приклад, що ілюструє порядок застосування третьої теореми до розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, розглянемо задачу (8–10). Також для формування області  $Z^{M-1}$  скористаємося результатами, поданими в таблиці 1.1.

Нехай, як приклад, головним критерієм буде виступати функція (9), тоді відповідно до третьої теореми задача (8–10) перетвориться до вигляду:

$$f_1(x) = -3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях (8) і додатковому обмеженні на  $f_2(x)$

$$3x_1 - x_2 \leq z,$$

де  $z \in [1; 18]$ . Досліджуємо отриману задачу при різних значеннях  $z$ . Результати розрахунків подамо в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Результати розв’язання задачі з використанням третьої теореми

$z$	$x^*$	$f_1(x^*)$	$f_2(x^*)$
1	(1; 2)	9	1
4	(2,5; 3,5)	13.5	4
18	(3; 4)	15	5

Як видно з таблиці 3.1, більшим значенням параметра  $z$  відповідають ефективні альтернативи, які більшою мірою задовольняють головному критерію  $f_1(x)$ . У той же самий час меншим значенням параметра  $z$  відповідають ефективні альтернативи, які більшою мірою задовольняють критерію  $f_2(x)$ . Тим самим для головного критерію  $f_1(x)$  знижується його значущість.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

**Тема.** Розв’язання багатокритеріальної задачі за допомогою методу обмежень.

Задачі лінійного програмування служать математичною моделлю багатьох задач економіки та проектування, що зустрічаються на практиці. Для їхнього розв’язання з успіхом застосовуються різні варіанти симплекс-методу. Однак у багатьох практичних задач вибір розв’язання за одним показником якості недостатній, тому що потрібно враховувати кілька таких показників. Це приводить до необхідності розв’язання багатокритеріальних задач, що належать до класу задач лінійного програмування.

З використанням раніш визначеної багатокритеріальної задачі в загальному вигляді сформуємо багатокритеріальну задачу, що належить до класу задач лінійного програмування. У цьому випадку особливістю багатокритеріальної задачі буде вимога про дотримання властивості лінійності

для множини функцій мети  $\{f_i(x), i \in I\}$  та множини функцій  $\{\varphi_j(x), j \in J\}$ , які визначають обмеження задачі.

З урахуванням вищевикладеного формально багатокритеріальна задача лінійного програмування може бути подана в наступному вигляді:

$$f_i(x) = \sum_{l \in L} c_l^i x_l \rightarrow \max, i \in I_1,$$

$$f_i(x) = \sum_{l \in L} c_l^i x_l \rightarrow \min, i \in I_2,$$

$$\sum_{l \in L} a_{jl} x_l * b_j, j \in J,$$

де \* – знак типу  $\geq, \leq$  або  $=$ .

Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод обмежень. Відповідно до методу обмежень необхідно провести перетворення вихідної множини функцій мети до безрозмірного вигляду одним із припустимих варіантів (1–2).

Тоді компромісним розв'язанням, одержання якого може забезпечувати метод обмежень, у рамках багатокритеріальної задачі, що розглядається, буде таке ефективне розв'язання, для якого зважені відносні втрати будуть однакові та мінімальні, тобто:

$$\rho_1 \omega_1(f_1(x)) = \rho_2 \omega_2(f_2(x)) = \dots = \rho_M \omega_M(f_M(x)) = k_{0(\min)},$$

де  $M$  – потужність множини  $I$ ,  $\{\rho_i, i \in I\}$  – вектор вагових коефіцієнтів з компонентами  $\rho_i > 0, \sum_{i \in I} \rho_i = 1$ .

Відповідно до методу обмежень компромісний розв'язок, що шукається, може бути знайдений з розв'язання системи лінійних нерівностей:

$$f_i(x) \geq f_i^0 - \frac{k_0}{\rho_i} (f_i^0 - f_{i(\min)}^0), i \in I_1,$$

$$f_i(x) \leq f_i^0 + \frac{k_0}{\rho_i} (f_{i(\max)}^0 - f_i^0), i \in I_2, \quad (20)$$

$$\sum_{l \in L} a_{jl} x_l * b_j, j \in J,$$

для мінімального значення параметра  $k_0$ , при якому ця система ще є спільною.

Розв'язання системи (20) еквівалентне розв'язанню наступної задачі лінійного програмування:

$$k_0 \rightarrow \min,$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned}
& d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1N}x_N + d_{1,N+1}k_0 + d_1 \geq 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \dots + d_{iN}x_N + d_{i,N+1}k_0 + d_i \geq 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& d_{M1}x_1 + d_{M2}x_2 + \dots + d_{MN}x_N + d_{M,N+1}k_0 + d_M \geq 0, \\
& \sum_{l \in L} a_{jl}x_l * b_j, \quad j \in J
\end{aligned}$$

де  $N$  – потужність множини  $L$  та

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \begin{cases} \rho_i c_l^i, & l \in L, \quad i \in I_1, \\ -\rho_i c_l^i, & l \in L, \quad i \in I_2, \end{cases} \\
d_{i,N+1} &= \begin{cases} f_i^0 - f_{i(\min)}, & i \in I_1, \\ f_{i(\max)} - f_i^0, & i \in I_2, \end{cases} \\
d_i &= \begin{cases} -\rho_i f_i^0, & i \in I_1, \\ \rho_i f_i^0, & i \in I_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

У методі обмежень спочатку відшукується мінімально можливе значення параметра  $k_0$ , при якому система обмежень (20) є спільною. Якщо рішення не єдине, тобто альтернативи еквівалентні з точністю до  $\varepsilon$  за значенням параметра  $k_0$ , то вибір компромісної альтернативи здійснюється за допомогою критерію (4).

Особливістю методу обмежень в загальному вигляді є те, що він не залежить від вигляду функціональної залежності  $\{f_i(x), i \in I\}$  та множини припустимих варіантів альтернатив  $A$ . Потрібно тільки для кожної конкретної задачі мати ефективні способи перевірки системи нерівностей (20).

**Ілюстративний приклад.** Як приклад, що ілюструє порядок застосування методу обмежень до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації, розглянемо задачу (8–10).

Оскільки для розв’язання задачі необхідно задати вектор вагових коефіцієнтів, то покладемо наступне: нехай критерії будуть рівноцінні, тобто  $\rho_1 = \rho_2 = 0,5$ .

З урахуванням результатів розрахунків, поданих у таблиці 1.1, ребро  $B_2B_3$  являє собою множину ефективних альтернатив.

Тоді еквівалентна задача набуває вигляду:

$$k_0 \rightarrow \min,$$

при обмеженнях:

$$-\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 48k_0 - \frac{15}{2} \geq 0,$$

$$-\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 17k_0 + \frac{1}{2} \geq 0,$$

обмеженнях (8) і за умови, що для перетворення множини функцій мети до безрозмірного вигляду використана залежність (1).

У результаті розв'язання поставленої задачі одержимо такий результат:

$$k_{0(\min)} = 0,04081,$$

$$x_1 \approx 1,694, x_2 \approx 2,694,$$

$$f_1(x) \approx 11,0816, f_2(x) = 2,387.$$

Отриманий розв'язок (1,694; 2,694) – єдиний і він є компромісним розв'язанням задачі, тому що для нього  $\rho_1 \omega_1(f_1(x)) = \rho_2 \omega_2(f_2(x)) \approx 0,04081$ , тобто, однакові відносні відхилення від оптимальних значень за обома критеріями.

На рисунку 4.1 зображена область значень відносних втрат  $\{\omega_i(f_i(x))\}$ . В області значень перетворених функцій мети розв'язок знаходиться в точці  $C$  – точці перетину бісектриси першого координатного кута із межею області  $W$ , тому що функції мети вважаються рівноцінними.

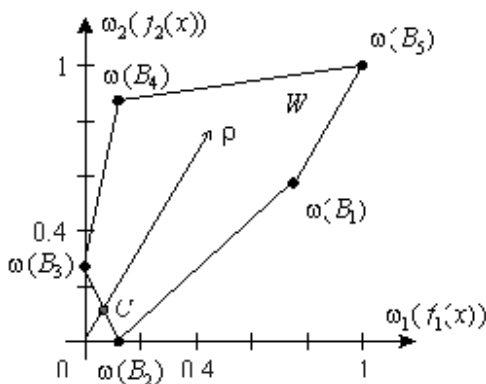


Рисунок 4.1

Якщо задачу (8–10) розв'язувати введенням глобального критерію у вигляді суми зважених відносних втрат (4) з урахуванням обмежень (8), то

одержимо як ефективне рішення – альтернативу (1; 2) . Для цієї точки відносні втрати по функціях мети відповідно рівні  $\rho_1\omega_1(f_1(x^*)) = 0,0625$ ,  $\rho_1\omega_2(f_2(x^*)) = 0$

Неважко бачити, що отриманий розв’язок забезпечує оптимум другої функції мети. Це говорить про те, що рівноцінність критеріїв у цьому випадку не забезпечується.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5

**Тема.** Розв’язання багатокритеріальної задачі за допомогою методу послідовних поступок.

Для розв’язання багатокритеріальної задачі методом послідовних поступок на першому етапі необхідно зробити якісний аналіз відносної важливості окремих критеріїв. На підставі такого аналізу критерії розташовуються та нумеруються в порядку убуття важливості. Тобто головним стає критерій  $f_1(x)$ , менш важливим –  $f_2(x)$ , потім ідуть інші окремі критерії:  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$ , ...,  $f_M(x)$ .

На другому етапі оптимізується перший за важливістю критерій  $f_1(x)$  на множині припустимих варіантів альтернатив  $A$  і визначається його оптимальне значення  $Q_1$ . Потім призначається величина “припустимого” зниження (поступки)  $\Delta_1 \geq 0$  критерію  $f_1(x)$  та шукається оптимальне значення  $Q_2$  другого критерію  $f_2(x)$  на множині припустимих варіантів альтернатив  $A$  із додатковою умовою, що значення першого критерію повинне бути не гірше, ніж його оптимальне значення  $Q_1$  з урахуванням поступки  $\Delta_1$ .

На третьому етапі призначається величина поступки  $\Delta_2 \geq 0$ , але вже за другим критерієм, яка разом з першою використовується при знаходженні умовного оптимуму третього критерію з урахуванням множини припустимих варіантів альтернатив  $A$  і так далі.

У рамках останнього етапу оптимізується останній за важливістю критерій  $f_M(x)$  за умови, що значення кожного критерію  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, M-1}$  повинно бути не гірше величини, що відповідає  $Q_i$  з урахуванням поступки  $\Delta_i$  та вихідної множини припустимих варіантів альтернатив  $A$ .

Таким чином, ефективною вважається всяка стратегія, яка є розв’язанням останньої задачі з наступної послідовності задач:

$$\begin{aligned}
& 1) \text{ знайти } Q_1 = \underset{x \in A}{extr} f_1(x), \\
& 2) \text{ знайти } Q_2 = \underset{\substack{x \in A \\ f_1(x) \geq Q_1, \dots, i=1, \dots, i_1 \\ f_1(x) \geq Q_1, \dots, i=1, \dots, i_2}}{extr} f_2(x), \\
& \dots\dots\dots \\
& M) \text{ знайти } Q_M = \underset{\substack{x \in A \\ f_1(x) \geq Q_1, \dots, i=1, \dots, i_1 \\ f_1(x) \geq Q_1, \dots, i=1, \dots, i_2}}{extr} f_M(x).
\end{aligned} \tag{21}$$

Аналіз (21) показує, що у випадку, коли всі  $\Delta_i$  – нулі, то метод послідовних поступок виділяє тільки лексикографічно оптимальні стратегії. Такі стратегії дають найкраще значення першому за важливістю критерію  $f_1(x)$  на множині припустимих варіантів альтернатив  $A$ . В іншому крайньому випадку, коли величини поступок виявляються дуже великими, стратегії, одержувані за допомогою цього методу, дають найкраще значення на  $A$  останньому за важливістю окремому критерію  $f_M(x)$ . Тому величини поступок, призначені для багатокритеріальної задачі, можна розглядати як своєрідну міру відхилення пріоритету (степеня відносної важливості) окремих критеріїв від жорсткого, лексикографічного.

Таким чином, оскільки задання найменших або найбільших значень поступкам не є раціональним, то величини поступок  $\Delta_i$  логічно послідовно призначати в результаті вивчення взаємозв'язку окремих критеріїв. Для цього спочатку вирішується питання про призначення величини припустимої зміни  $\Delta_1$  першого критерію від його найкращого значення  $Q_1$ . На практиці для цього задають кілька величин поступок  $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \dots$  і шляхом розв'язання задачі 2) визначають відповідні оптимальні значення  $Q_2(\Delta_1^1), Q_2(\Delta_1^2), Q_2(\Delta_1^3), \dots$  другого критерію. Іноді, якщо це не занадто складно, відшукується функція  $Q_2(\Delta_1)$ . Результати розрахунків для наочності зручно зображати графічно. Типовий графік подібного роду може бути поданий у вигляді рисунка 5.1.

Рисунок 5.1 показує, що спочатку навіть невеликі величини поступок за першим критерієм можуть дозволити одержати істотний вигравш за другим критерієм. Подальше істотне збільшення поступки за першим критерієм може приводити до більш повільного зростання вигравшу за другим критерієм. На підставі аналізу отриманих даних і вирішують питання про призначення величини поступки  $\Delta_1$ , а потім знаходять  $Q_2(\Delta_1)$ .

Далі розглядають пару критеріїв  $f_2(x)$  і  $f_3(x)$ . Знову призначають

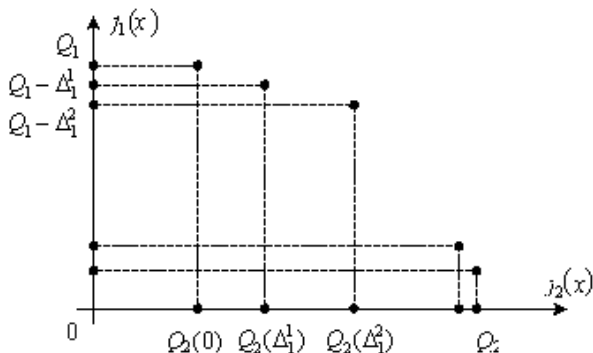


Рисунок 5.1

“пробні” величини поступок  $\Delta_2^1, \Delta_2^2, \dots$  і, розв’язуючи задачу 3), відшуковують найкращі значення третього критерію  $Q_3(\Delta_2^1), Q_3(\Delta_2^2), \dots$ . Отримані дані аналізують, призначають  $\Delta_2$ , переходять до наступної пари критеріїв  $f_3(x), f_4(x)$  і так далі.

Нарешті, у результаті аналізу взаємного впливу критеріїв  $f_{m-1}(x)$  і  $f_m(x)$  вибирають величину останньої поступки  $\Delta_{m-1}$  і відшуковують оптимальні стратегії, розв’язуючи задачу  $M$ ). Звичайно обмежуються знаходженням однієї такої стратегії.

Таким чином, хоча формально при використанні методу послідовних поступок досить розв’язати лише  $M$  задач відповідно до (21), однак для призначення величин поступок з метою з’ясування взаємозв’язку окремих критеріїв фактично доводиться розв’язувати істотно більше число подібних задач.

**Ілюстративний приклад.** Як приклад, що ілюструє порядок застосування методу послідовних поступок до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації, розглянемо задачу (8–10).

Відповідно до теоретичних основ методу послідовних поступок у рамках першого етапу розв’язання задачі необхідно провести якісний аналіз відносної важливості критеріїв. Оскільки фізичний зміст критеріїв (9–10) не визначений, то нехай критерій (9) буде мати більшу важливість, ніж критерій (10). Тобто головним критерієм є  $f_1(x)$ , менш важливим –  $f_2(x)$ .

У рамках другого етапу необхідно визначити оптимальне значення першого за важливістю критерію  $f_1(x)$ . Оскільки додаткова інформація подана в таблиці 1.1, то  $Q_1 = 15$ .

Для призначення величини припустимих поступок критерію  $f_1(x)$  необхідно визначити припустимий діапазон зміни критерію  $f_1(x)$ . З урахуванням результатів таблиці 1.1 можна стверджувати, що  $\Delta_1 \in [0; 48]$ .

Тоді задача другого етапу обчислювальної процедури методу послідовних поступок повинна мати такий вигляд: мінімізувати (10) при обмеженнях (8) і додатковому обмеженні на критерій  $f_1(x)$ :

$$-3x_1 + 6x_2 \geq Q_1 - \Delta_1, \Delta_1 \in [0; 48].$$

Розв'язуючи послідовно оптимізаційну задачу другого етапу для різних числових значень  $\Delta_1$ :  $\Delta_1^1 = 0$ ,  $\Delta_1^2 = 2$ ,  $\Delta_1^3 = 4$ ,  $\Delta_1^4 = 6$  і т.д., одержимо результати, графічна інтерпретація яких подана на рисунку 5.2.

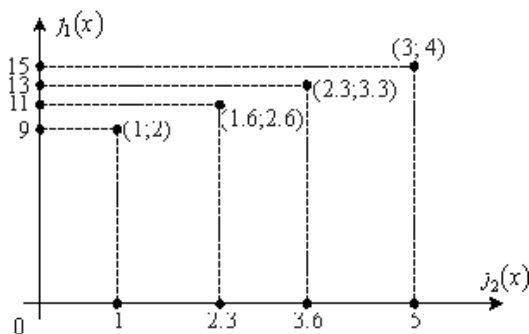


Рисунок 5.2

Для вибору рішення, що може бути рекомендовано до прийняття, логічно використати або знання особи, що приймає рішення (ОПР), або інші евристики.

Наприклад, оскільки перший критерій має більшу важливість, то логічно за ефективну альтернативу вибрати альтернативу (2,3; 3,3). Якби перший критерій мав абсолютний пріоритет, то до прийняття рішень варто було б рекомендувати альтернативу (3; 4).

Аналогічні міркування можна провести щодо альтернатив (1; 2) і (1,6; 2,6).

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

**Тема.** Розв'язання багатокритеріальної задачі за допомогою методу послідовного введення обмежень.

Метод послідовного введення обмежень для розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації складається з послідовності кроків. На кожному кроці:

1) визначаються найкращі можливі значення всіх цільових функцій, які досягаються на визначених перевагами ОПР підмножинах альтернатив;

2) розраховується вектор вагових коефіцієнтів, що визначає важливості окремих критеріїв;

3) визначається альтернатива, яка щонайкраще поліпшує зважену суму всіх окремих критеріїв.

У тому випадку, якщо знайдена альтернатива не відповідає перевагам ОПР, воно виділяє критерій з найгіршим, на його думку, значенням цільової функції та вказує рівень, при якому значення показника за цим критерієм можна було б вважати задовільним.

Формалізуємо вищесказане та розглянемо формальне подання деякого  $k$ -го кроку обчислювальної процедури методу послідовного введення обмежень.

**Крок  $k$ .** Розрахувати оптимальні значення для всіх окремих критеріїв:

$$f_i^{0(k)} = \max_{x \in A_k} f_i(x), i \in I_1$$

$$f_i^{0(k)} = \min_{x \in A_k} f_i(x), i \in I_2$$

і сформувати відповідний вектор  $z^k = \{f_i^{0(k)}, i \in I\}$ , де  $A_k$  – множина припустимих варіантів альтернатив на  $k$ -му кроці;  $f_i^{0(k)}$  – найкраще значення  $i$ -го окремого критерію на множині припустимих варіантів альтернатив  $A_k$  на  $k$ -му кроці.

Визначити значення вагових коефіцієнтів  $\{\rho_i^k, i \in I\}$ , де  $\rho_i^k$  – важливість  $i$ -го окремого критерію на  $k$ -му кроці. Для розрахунку  $\{\rho_i^k, i \in I\}$  може бути використаний один із трьох поданих підходів.

1) Скласти матрицю  $\sigma^k$ , кожна пара симетричних елементів якої  $(\sigma_{il}^k, \sigma_{li}^k)$ ,  $i, l \in I$  характеризує відносну важливість  $i$ -го окремого критерію в порівнянні з  $l$ -м. Значення пари елементів вибирається в такий спосіб: (8,1/8) – при значно більшій перевазі важливості  $i$ -го критерію в порівнянні з  $l$ -м;

(4,1/4) – при значній перевазі важливості  $i$ -го окремого критерію в порівнянні з  $l$ -м; (2,1/2) – при великій перевазі важливості  $i$ -го окремого критерію в порівнянні з  $l$ -м; (1,1) – при рівноцінності окремих критеріїв. Тоді:

$$\rho_i^k = \left( \sum_{l \in I} \sigma_{il}^k \right) / \left( \sum_{l \in I} \sum_{l \in I} \sigma_{il}^k \right), i \in I.$$

2) Нехай  $x^{l(k)}$  – альтернатива, що оптимізує  $l$ -му цільову функцію на множині  $A_k$ ,  $f_i^{0(k)}$  – найкраще значення  $i$ -ї цільової функції на множині  $A_k$ . Далі обчислюються величини  $\delta_i^k$ :

$$\delta_i^k = \max \left\{ \max_{l \in I_1} \frac{f_i^{0(k)} - f_i(x^{l(k)})}{f_i^{0(k)} - f_{i(\min)}^{(k)}}, \max_{l \in I_2} \frac{f_i(x^{l(k)}) - f_i^{0(k)}}{f_{i(\max)}^{(k)} - f_i^{0(k)}} \right\}, i \in I.$$

На основі отриманих значень визначаються вагові коефіцієнти за формулою:

$$\rho_i^k = \delta_i^k / \sum_{i \in I} \delta_i^k, i \in I.$$

3) Даний спосіб відрізняється від попередніх тим, що в цьому випадку розраховуються середні відносні відхилення:

$$\delta_i^k = \frac{1}{M-1} \left( \sum_{l \in I_1, l \neq i} \frac{f_i^{0(k)} - f_i(x^{l(k)})}{f_i^{0(k)} - f_{i(\min)}^{(k)}} + \sum_{l \in I_2, l \neq i} \frac{f_i(x^{l(k)}) - f_i^{0(k)}}{f_{i(\max)}^{(k)} - f_i^{0(k)}} \right), i \in I,$$

після чого вагові коефіцієнти визначаються аналогічним чином:

$$\rho_i^k = \delta_i^k / \sum_{i \in I} \delta_i^k, i \in I.$$

Після розрахунку вектора вагових коефіцієнтів у рамках методу послідовного введення обмежень формується однокритеріальний еквівалент вихідної багатокритеріальної задачі:

$$\sum_{i \in I_1} \rho_i^k f_i(x) + (-1) \cdot \sum_{i \in I_2} \rho_i^k f_i(x) \rightarrow \max,$$

$$x \in A_k$$

$i$  визначаються ефективна альтернатива  $x^{*(k)}$  та її оцінка  $y^k = \{f_i(x^{*(k)}), i \in I\}$ .

Далі аналізують оцінку  $y^k$  шляхом зіставлення її з оптимальною оцінкою  $z^k$ . Якщо оцінка  $y^k$  відповідає перевагам ОПР, то процедуру пошуку рішень закінчують, а альтернативу  $x^{*(k)}$  вважають альтернативою, що рекомендується до прийняття рішень. У супротивному випадку вказують номер цільової функції  $i$ , значення якої на  $k$ -у кроці на думку ОПР найменш

задовільнено. Потім визначають, на яку величину необхідно поліпшити цю цільову функцію, тобто визначають рівень  $\zeta_{i(k)}$ , при якому значення показника за відповідним критерієм можна було б вважати задовільним. Таким чином, формують нову підмножину альтернатив:

$$A_{k+1} = \left\{ x \in A_k \left| \begin{array}{l} f_i(x) \geq \zeta_{i(k)}, i \in I_1 \\ f_i(x) \leq \zeta_{i(k)}, i \in I_2 \end{array} \right. \right\}$$

і переходять на  $(k+1)$ -й крок.

**Ілюстративний приклад.** Як приклад, що ілюструє порядок застосування методу послідовного введення обмежень до розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, розглянемо задачу (8–10).

При визначенні значень вагових коефіцієнтів будемо використовувати перший підхід.

**Крок 1.** Розрахуємо оптимальні значення всіх окремих критеріїв і сформуємо вектор  $z^1 = \{15, 1\}$ , використовуючи дані таблиці 1.1.

Визначимо значення вагових коефіцієнтів  $\{\rho_i^1, i \in I\}$  на основі наступного подання матриці  $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1/8 & 1 \end{pmatrix}$ , відповідно до якого критерій  $f_1(x)$  має значно більшу перевагу за важливістю в порівнянні з критерієм  $f_2(x)$ . Після обробки матриці  $\sigma^1$  одержуємо значення компонентів вектора вагових коефіцієнтів  $\rho^1 = \{0,89; 0,11\}$ .

Після розрахунку вектора вагових коефіцієнтів формуємо однокритеріальний еквівалент вихідної багатокритеріальної задачі:

$$0,89 \cdot (-3x_1 + 6x_2) + (-1) \cdot 0,11 \cdot (3x_1 - x_2) \rightarrow \max$$

при обмеженнях (8).

У результаті розв'язання сформульованої задачі буде визначена ефективна альтернатива  $(3; 4)$  та відповідна їй оцінка  $y^1 = \{15, 5\}$ . Припустимо, що в результаті аналізу оцінка  $y^1$  не відповідає вимогам ОПР, тобто його не влаштовує числове значення, якого набуває другий окремий критерій. Нехай ОПР визначило, на яку величину необхідно поліпшити цю цільову функцію, тобто визначило рівень  $\zeta_{2(1)} = 2$ , при якому значення показника за відповідним критерієм можна було б вважати задовільним. Таким чином, необхідно сформулювати нову підмножину припустимих варіантів альтернатив:

$$3x_1 - x_2 \leq 2 \quad (22)$$

при обмеженнях (8) і перейти до кроку 2.

**Крок 2.** Розрахуємо оптимальні значення всіх окремих критеріїв і сформуємо вектор  $z^2 = \{10,5, 1\}$ .

Визначимо значення вагових коефіцієнтів  $\{\rho_i^1, i \in I\}$  на основі наступного подання матриці  $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$ , відповідно до якого критерій  $f_1(x)$  має значну, але меншу ніж на кроці 1, перевагу важливості в порівнянні з критерієм  $f_2(x)$ . Після обробки матриці  $\sigma^2$  одержимо значення компонентів вектора вагових коефіцієнтів  $\rho^2 = \{0,8; 0,2\}$ .

Після розрахунку вектора вагових коефіцієнтів формуємо однокритеріальний еквівалент вихідної багатокритеріальної задачі:

$$0,8 \cdot (-3x_1 + 6x_2) + (-1) \cdot 0,2 \cdot (3x_1 - x_2) \rightarrow \max$$

при обмеженнях (8, 22).

У результаті розв'язання сформульованої задачі буде визначена ефективна альтернатива (1,5; 2,5) та відповідна їй оцінка  $y^2 = \{10,5, 2\}$ . Отримані результати свідчать про те, що оцінка  $y^2$  щодо другого окремого критерію  $f_2(x)$  вже відповідає вимогам ОПР. Однак оцінка  $y^2$  вже може не задовольняти ОПР відносно окремого критерію  $f_1(x)$ , тому що він погіршив свою первісну оцінку на 4,5. У цьому випадку або необхідно переходити до кроку 3, або закінчувати обчислювальну процедуру. Останнє буде справедливо, якщо ОПР задоволена отриманими результатами.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Відповідно до індивідуального завдання розв'язати задачу багатокритеріальної оптимізації, математична модель якої подана в таблиці, виконати аналіз отриманих результатів.

При вирішенні задачі багатокритеріальної оптимізації використати методи, наведені в межах лабораторних робіт 1–6.

В методах, де при пошуку рішення задачі багатокритеріальної оптимізації використовуються монотонні перетворення окремих функцій мети, використовувати послідовно перетворення (1–3).

Для проведення аналізу отриманих результатів вирішувати задачу багатокритеріальної оптимізації вирішувати при трьох різних наборах вагових коефіцієнтів.

Таблиця – Варіанти індивідуальних завдань

№	Математична постановка задачі	
	Множина функцій мети $\{f_i(x), i \in I\}$	Множина припустимих варіантів альтернатив $A$
1	$f_1(x) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$ , $f_2(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_3(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$x_1 \leq 6, x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$
2	$f_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$ $f_2(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $f_3(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ $x_2 \leq 2, x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
3	$f_1(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_2(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $f_3(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$x_1 + x_2 \leq 6$ $-x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
4	$f_1(x) = -3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$ $f_2(x) = -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 \rightarrow \max$ $f_3(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max$	$2x_1 + 5x_3 - 2x_4 + 8x_5 \leq 54$ $x_2 + 2x_4 \leq 53$ $5x_1 + 4x_3 - 4x_4 \leq 62$ $4x_1 + 6x_2 - 2x_4 + 2x_5 \leq 63$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ $, x_5 \geq 0$
5	$f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_2(x) = -x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $f_3(x) = 3x_2 - x_3 \rightarrow \max$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$ $3x_1 + 4x_2 \leq 16$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
6	$f_1(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $f_2(x) = -x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$ $f_3(x) = x_3 \rightarrow \max$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ $x_2 \leq 3$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

№	Математична постановка задачі	
	Множина функцій мети $\{f_i(x), i \in I\}$	Множина припустимих варіантів альтернатив $A$
7	$f_1(x) = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$ $f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$ $f_3(x) = -7x_1 + 3x_2 - 5x_3 \rightarrow \max$	$x_3 \leq 2$ $x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
8	$f_1(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $f_2(x) = 2x_1 + 4x_3 \rightarrow \max$ $f_3(x) = 3x_1 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$	$3x_1 + 3x_3 + 4x_4 \leq 8$ $3x_4 \leq 10$ $5x_1 + 2x_4 \leq 10$ $3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 8$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$
9	$f_1(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$ $f_2(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $f_3(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$	$x_1 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 5$ $x_2 \leq 4, x_3 \leq 2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
10	$f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_2(x) = x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $f_3(x) = 3x_1 + x_3 \rightarrow \max$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$ $3x_1 + 4x_2 \leq 16$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$
11	$f_1(x) = 2x_1 + x_3 \rightarrow \max$ $f_2(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $f_3(x) = x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$	$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 14$ $x_1 + 2x_2 \leq 5, x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

## ВИСНОВОК

Розглянуті підходи до розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації не формують вичерпний їхній перелік, але утворюють кістяк класичних методів, на основі яких розробляються інші.

Особливу увагу при виборі методу до дослідження конкретної задачі варто приділяти як математичним, так і фізичним її особливостям.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Іщук А. А. Розв'язування багатокритеріальних задач оптимізації за допомогою комп'ютера / А. А. Іщук // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. – Київ : НПУ, 2019. – № 21(28). – С. 57–65.
2. Методи розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації [Електронний ресурс] – Режим доступу : <https://studfile.net/preview/7163591/page:21>
3. Методи розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації [Електронний ресурс] – Режим доступу : [https://www.wikiwand.com/uk/Методи\\_розв%27язку\\_задач\\_багатокритеріальної\\_оптимізації](https://www.wikiwand.com/uk/Методи_розв%27язку_задач_багатокритеріальної_оптимізації)
4. Семенова Н. В. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання: Монографія / Н. В. Семенова, Л. М. Колечкіна. – Київ : Наукова думка, 2020. – 266 с.
5. Методи багатокритеріальної оптимізації: Ч.1. Конспект лекцій з курсу – Методи багатокритеріальної оптимізації для студентів спеціальності 8.05010103 – Системне проектування / уклад. Теслюк В. М., Загарюк Р. В. – Львів : Видавництво Національного університету – Львівська політехніка, 2019. – 64 с.
6. Qamrul Hasan Ansari. Vector Variational Inequalities and Vector Optimization / Qamrul Hasan Ansari, Elisabeth Köbis, Jen-Chih Yao. – Springer, 2018. – 509 p.
7. Tripathi K. P. Decision Support System Is a Tool for Making Better Decisions in the Organization / K. P. Tripathi // Indian Journal of Computer Science and Engineering. 2011. – pp. 112–117.
8. Marek J. Druzdzel. Decision Support Systems / J. Druzdzel Marek, R. Flynn Roger. – Pittsburgh. 2002. – 15 p.
9. Olga Špačková. Cost-benefit analysis for optimization of risk protection under budget constraints / Špačková Olga, Straub Daniel // Risk Analysis. Vol. 35, No. 5, 2015. pp. 1–29.
10. Jeremy Lin. Chapter 1 – Optimization Methods Applied to Power Systems: Current Practices and Challenges, Editor(s): Ahmed F. Zobaa, Shady H.E. Abdel Aleem, Almoataz Youssef Abdelaziz / Lin Jeremy, Magnago Fernando, Manuel Alemany Juan // Classical and Recent Aspects of Power System Optimization, Academic Press, 2018. pp. 1–18.
11. Silvia Bacci. Introduction to Statistical Decision Theory / Bacci Silvia, Chiandotto Bruno. – CRC Press Taylor & Francis Group, 2020. – 288 p.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до лабораторних занять з курсу  
**“ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ”**

для студентів спеціальностей 121 “Інженерія програмного забезпечення”,  
122 “Комп’ютерні науки”

Укладачі: ГОДЛЕВСЬКИЙ Михайло Дмитрович  
ВОЛОВЩИКОВ Валерій Юрійович  
КОЗУЛЯ Марія Михайлівна

Відповідальний за випуск Гамаюн І.П.

Роботу рекомендував до друку Безменов М.І.

В авторській редакції

План 2022р., поз. 279

Підп. до друку \_\_.\_\_.\_\_. Формат 60x84 1/16. Папір офісний.  
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 1,0. Обл.-вид. арк. 1,4  
Наклад 50 прим. Зам. № . Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ “ХП”.

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.  
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

---

Самостійне електронне видання