

С. К. Шелковый

*Техническая механика:
партнёрство НТУ «ХПИ»
с университетами Германии*

сборник статей

Харьков
2016

УДК
ББК

Ш

Рецензент — доц., к. т. н. **Андреев А. Г.**

Шелковый С. К.

Техническая механика: партнёрство НТУ «ХПИ» с университетами Германии: Сборник статей / С. К. Шелковый. — Харьков: НТУ «ХПИ», 2016. — 52 с.

ISBN

В книге доцента, кандидата технических наук С. К. Шелкового представлен обзор сорока лет научного партнёрства учёных-механиков НТУ «ХПИ» с техническими университетами Магдебурга, Дрездена, Аахена.

Публикуются также научные статьи, отражающие тематику докладов автора в университетах Германии — динамический анализ сложных конструкций энергомашиностроений.

© Шелковый С. К., Альтенбах И.,
Киссинг В., Степченко А. С.,
2016

I

С. К. Ш е л к о в ы й, доцент, канд. техн. наук

**О НАУЧНОМ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ СОТРУДНИЧЕСТВЕ
КАФЕДРЫ ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ МАШИН НТУ «ХПИ»
С ТЕХНИЧЕСКИМИ УНИВЕРСИТЕТАМИ ГЕРМАНИИ**

Начало научного и образовательного сотрудничества кафедры динамики и прочности машин Национального Технического Университета «ХПИ» с немецкими коллегами-механиками из Магдебургского университета Отто фон Герике (указаны сегодняшние наименования обоих ВУЗов) относится к середине 1970-ых годов.

Первый «Договор о творческом сотрудничестве между секцией Машиностроения (Механика твёрдого тела) Высшей технической школы им. Отто фон Герике и кафедрой динамики и прочности машин Харьковского политехнического института на 1977—1979 гг.» был подписан в октябре 1977 года.

Со стороны ХПИ подписи под договором поставили ректор профессор М. Ф. Семко и заведующий кафедрой ДПМ профессор С. И. Богомолов, со стороны Магдебургской ВТШ — ректор профессор Пробст и заведующий кафедрой «Механики твердого тела» профессор И. Альтенбах. Одновременно с «Договором» был подписан так же «Рабочий план совместных исследований на 1977—1979 гг.»

Этот первый Договор между ВУЗами-партнерами и положил начало их интенсивному и плодотворному взаимодействию в области науки и высшего образования, которое продолжается уже почти сорок лет. При этом исходный Договор о творческом сотрудничестве с течением времени неоднократно продлевался.

Строго говоря, взаимодействие наших научных коллективов-партнёров длится уже более сорока лет, так как ещё в 1975 году с первой

научной стажировкой на кафедру ДПМ прибыл профессор кафедры МТТ Магдебургской Высшей технической школы В. Штефан.

В 1976 году с аналогичными визитами на кафедре ДПМ побывали доктор Ф. Вааль и доцент З. Кочик. В дальнейшем научные стажировки на кафедре динамики и прочности проходили следующие преподаватели и научные сотрудники Магдебургского ВУЗа-партнёра:

1977 год — профессор И. Альтенбах
1977 год — профессор У. Фишер
1978 год — доцент В. Веезе
1979 год — доктор Х. Манг
1980 год — профессор А. Лингенер
1981 год — доктор Х. Альтенбах
1982 год — доцент У. Габберт
1985 год — доцент Ф. Лаугвиц
1987 год — профессор В. Шперлинг
1988 год — доцент М. Цейн

Рабочие планы научных стажировок включали в себя выступления немецких гостей-стажёров с научными докладами на кафедре ДПМ и публикации статей по итогам совместных научных исследований учёных кафедр-партнёров. В таком же режиме проходили и научные стажировки преподавателей и научных сотрудников кафедры ДПМ в период их гостевого пребывания в Магдебурге на кафедре МТТ.

В то же первое десятилетие межвузовского сотрудничества Магдебургский ВУЗ-партнер посетили с рабочими визитами следующие сотрудники кафедры динамики и прочности машин:

1977 год — доцент Б. С. Лукин
1978 год — доцент В. Б. Гринёв
1979 год — доцент О. К. Морачковский
1981 год — доцент В. А. Жовдак
1982 год — профессор С. И. Богомолов
1983 год — доцент Г. И. Львов
1985 год — доцент С. К. Шелковый
1986 год — доцент А. М. Журавлёва
1987 год — доцент А. Г. Андреев
1987 год — м. н. с. Е. Ю. Костенко

1988 год — м. н. с. К. В. Науменко

1989 год — ст. н. с. О. Л. Шелудяков

О широком спектре тематики совместных научных исследований кафедр-партнёров может свидетельствовать выборочный и далеко не полный список совместных научных публикаций, вышедших в свет только в одном печатном издании — в республиканском межведомственном научно-техническом сборнике «Динамика и прочность машин», подготовка которого осуществляется кафедрой ДПМ.

Этот же перечень статей даёт представление об ученых двух университетов — участниках совместных научных разработок:

Г. Ландграф, Ф. Ульбрихт Учёт нелинейного деформирования материалов при расчёте оболочек вращения. — Сборник «Динамика и прочность машин» (ДПМ), № 30, 1979 г.

Г. Ландграф, Ф. Ульбрихт Расчёты упруго-пластического деформирования оболочек вращения. — Сборник ДПМ, № 30, 1979 г.

И. Альтенбах, М. Тодоров Обобщённые вариационные принципы и гибридные конечные элементы в теории упругости. — Сборник ДПМ, № 34, 1981 г.

И. Альтенбах, А. Г. Андреев, Г. Фриче Расчёт напряжений и деформаций в вагонном колесе при осе- и неосесимметричных нагрузках. — Сборник ДПМ, № 34, 1981 г.

А. Лингенер Экспериментальные исследования стохастических процессов в механических системах. — Сборник ДПМ, № 38, 1983 г.

И. Альтенбах, Х. Альтенбах, В. Киссинг Построение одномерных конечных элементов на основе полубезмоментной теории оболочек Власова. — Сборник ДПМ, № 38, 1983 г.

З. Кочик Расчёт пластически деформируемых деталей. — Сборник ДПМ, № 42, 1985 г.

У. Фишер, С. И. Богомолов *Применение метода граничных элементов к решению плоской задачи теории упругости.* — Сборник ДПМ, № 42, 1985.

И. Альтенбах, В. Киссинг, С. К. Шелковый *Конечные элементы полубезмоментной теории оболочек для тонкостенных замкнутых не-призматических конструкций.* — Сборник ДПМ, № 42, 1985 г.

Г. Шмидт, В. А. Жовдак *Определение спектральных характеристик колебательных процессов.* — Сборник ДПМ, № 42, 1985 г.

Х. Альтенбах, В. А. Фёдоров *Исследование краевого эффекта неоднородной по толщине тонкой круговой цилиндрической оболочки.* — Сборник ДПМ, № 42, 1985 г.

К. Гепель, Э. А. Симсон *Некоторые возможности оптимальной виброизоляции в машиностроении.* — Сборник ДПМ, № 42, 1985 г.

И. Альтенбах, Л. Вильтингер *Конечноэлементная программа для упруго-статических задач теории трещин.* — Сборник ДПМ, № 44, 1986 г.

Х. Альтенбах, О.К. Морачковский, К. Науменко *Моделирование ползучести тонких пластин с учётом повреждаемости и больших перемещений.* — Сборник ДПМ, № 55, 1997 г.

V. Ulbricht, R. John, H. Bergander *Deformationsgesetze auf der Grundlage des plastischen Spin-Konzeptes in konvektiven Koordinaten.* — Сборник ДПМ, № 56, 1998 г.

O. Morachkovsky, H. Altenbach, M. Pasynek *Computetional Modeling of Creep Damage Evolution in Transversally-Isotropic Structures.* — Сборник ДПМ, № 56, 1998 г.

E. Kullig, V. Ulbricht *Zum Zusammenhang zwischen Fluess- und Deformationstheorie bei grossen Verformungen.* — Сборник ДПМ, № 57, 2000

Х. Альтенбах, К. Науменко Г. И. Львов, С. Н. Пилипенко Численное исследование влияния технологических параметров изготовления на упругие свойства коротко-волокнистых композиционных материалов. — Сборник ДПМ, № 12, 2003 г.

Е. И. Горащ, Г. И. Львов, Х. Альтенбах, К. Науменко Анализ высокотемпературной ползучести Т-образного соединения двух труб, нагруженных давлением, с учётом анизотропных свойств материала в зоне сварного шва. — Сборник ДПМ, № 20, 2005 г.

С. Gladkov, К. Науменко Свободное вращение абсолютно твёрдого цилиндра с учётом вязкого трения. — Сборник ДПМ, № 32, 2006 г.

С. Gladkov, Р. Биечек, И. Штайнбах Конечнэлементное моделирование затвердевания бинарного сплава на мезоуровне. — Сборник ДПМ, № 6, 2010.

Важным пунктом Договора 1977 года о сотрудничестве кафедр ДПМ Харьковского Политеха и МТТ Магдебургской высшей школы являлось также положение об обмене студенческими учебно-ознакомительными практиками. Именно с 1977 года эти поездки харьковских и магдебургских студенческих групп были поставлены на регулярную основу.

В течение двадцати дней практики студенты-динамики из Харькова выполняли насыщенную и разнообразную программу. Помимо лабораторных занятий в Магдебургском и Дрезденском университетах программа предусматривала довольно большие ознакомительные возможности для практикантов. Так маршрут группы студентов ДПМ проходил по многим городам Восточной Германии: Берлин, Магдебург, Шёнебек (посещение тракторостроительного завода), Ваймар, Ляйпциг, Дрезден, Потсдам, Людвигсфельде (осмотр завода грузовых автомобилей).

Проводились также воскресные поездки в живописнейший старинный город Вернигероде и в горы Гарц. Практика харьковской группы студентов проходила ежегодно в фиксированные сроки — с 20 июля по 13 августа. На две недели раньше начиналась практика магдебургской группы студентов в Украине, которая завершалась в первые дни

приезда наших студентов-динамиков в Магдебург, где общение двух студенческих групп продолжалось уже в аудиториях немецкого университета.

Пребывание немецкой группы начиналось 6 июля с четырёхдневного осмотра Киева и продолжалось двумя неделями лабораторных занятий в ХПИ и осмотром крупных харьковских предприятий — турбинного завода и завода «Электротяжмаш». Эти две недели включали также поездку в Полтаву и в студенческий лагерь в Фигуровке на Донце. Завершался маршрут трёхдневным пребыванием в Москве, откуда группа 26 июля возвращалась в Берлин и Магдебург.

Первой группой студентов-динамиков, планово выехавшей на практику в ГДР в 1977 году, руководили доцент А. Г. Андреев и И. Б. Каринцев. В 1978 году кураторами практики были доцент О. К. Морачковский и аспирант С. К. Шелковый. Вспоминается, что в группе практикантов-политехников того года выделялся своей серьёзностью и вдумчивостью студент Валерий Конкин, ставший ныне, почти сорок лет спустя, деканом инженерно-физического факультета профессором В. Н. Конкиным.

В том же году группой немецких студентов, приезжавших в Украину, руководил будущий многолетний заведующий кафедрой Механики твёрдого тела доктор Ульрих Габберт, и в этот коллектив молодых студентов-механиков входили нынешние ведущие научные сотрудники кафедры МТТ доктора наук Хайнц Кёппе и Иохим Грохля. Так что сегодняшний научно-преподавательский состав обеих кафедр-партнёров формировался уже тогда в обоюдодоползном обмене знаниями и идеями, в построении дружественных партнёрских отношений на долгие годы вперёд.

Летние плановые обмены группами студентов-практикантов продолжались неукоснительно и с большим успехом, вызывая самые позитивные отклики обеих сторон, вплоть до 1990 года. После существенных политических изменений в мире, когда исчезли с исторической сцены и СССР и ГДР, условия обмена заметно усложнились. В новых обстоятельствах обмен утратил принцип безвалютности, который упрощал ранее множество организационных моментов.

Начиная с девяностых годов поездки харьковских студентов-механиков на учебно-ознакомительную практику в ФРГ происходят один раз в два-три года, а то и реже, по мере рассмотрения отдельных заявок и выделения средств на эти поездки Немецким Фондом Академических Обменов — DAAD. К тому же и сроки, и маршруты следования групп в новых условиях стали существенно экономнее.

Тем не менее, обмены научными стажировками ученых и преподавателей кафедр-партнёров ДПМ НТУ «ХПИ» и МТТ Магдебургского университета продолжались на регулярной основе и в 1990-ые, и в 2000-ые годы, вплоть до настоящего времени. В эти годы приоритетным направлением для кафедры динамики и прочности машин становится обучение всё большего числа молодых ученых, — студентов-дипломников и аспирантов, — на базе высокотехнологичного научного оснащения, предоставляемого таким авторитетным европейским университетом, каким, несомненно, является сегодня Магдебургский университет Отто фон Герике.

Важную роль в этой подготовке молодых ученых-механиков играет то обстоятельство, что уже несколько лет подряд студенты и аспиранты из Харькова получают финансовую поддержку в виде Эйлеровских именных стипендий и других образовательных грантов, предоставляемых правительством ФРГ. Неизменным организатором этой спонсорской поддержки является наш добрый друг и коллега профессор Хольм Альтенбах, который, начиная ещё с 1981 года, многократно посещал НТУ «ХПИ», выступая перед научной и студенческой аудиторией с чтением циклов лекций по ряду разделов нелинейной механики твёрдого деформируемого тела и активно публикуя свои научные работы в нашем межведомственном сборнике «Динамика и прочность машин».

Им же осуществляется в течение многих лет в Магдебургском университете, а ещё ранее и в Техническом университете Халле-Виттенберга, научное руководство аспирантами, выпускниками специальности ДПМ. Так за последние годы диссертации «докторов философии» (степень PhD) защитили наши выпускники К. Науменко, Е. Костенко, Е. Гораш, О. Ожога-Масловская, И. Львов, А. Пригорнев.

Сегодня, в 2016 году, профессор Хольм Альтенбах является авторитетным и известным в Европе ученым, заведующим кафедрой Механики твёрдого тела Магдебургского университета, той кафедры, которой в 1970—1980-ые годы руководил его отец профессор Иоганнес Альтенбах.

Оба они, и отец, и сын, внёсшие чрезвычайно важный вклад в развитие партнёрства НТУ «ХПИ» и Магдебургского университета, удостоены звания «Почётный доктор Национального Технического университета «ХПИ».

Кафедра динамики и прочности машин в течение многих лет поддерживает также стабильные научные контакты с коллегами-механиками из Дрезденского Технического университета. Ещё в 1977—1978 годах десятимесячную научную стажировку на кафедре ДПМ проходил доцент Дрезденского Технического университета доктор Фолькер Ульбрихт, специалист в области нелинейного деформирования материалов. Руководителем его стажировки от кафедры ДПМ являлся профессор А. В. Бурлаков. А первые интернациональные публикации в сборнике «Динамика и прочность машин», вышедшие в свет ещё в 1979 году, принадлежат именно доктору Ф. Ульбрихту и его дрезденскому научному руководителю, известному учёному-механику, профессору Г. Ландграфу.

С того времени тесные научные контакты ХПИ с университетом Дрездена продолжают уже почти четыре десятка лет. Профессор Ф. Ульбрихт является сегодня крупным и хорошо известным в ученом мире Европы специалистом по нелинейной механике. Он в течение долгого времени выполняет ответственную и престижную работу ученого секретаря одного из наиболее авторитетных научных журналов в Германии «Техническая механика». Он же не раз организовывал научные доклады сотрудников кафедры ДПМ в Дрездене, и в частности, автора этой статьи, руководил дипломниками и аспирантами, прибывшими из Харькова, курировал лабораторные занятия для групп студентов-практикантов ХПИ во время их поездки в Германию.

Наряду с этими плановыми традиционными контактами, кафедрой ДПМ совместно с Дрезденским Техническим университетом в 1996—1998 годах был реализован научно-организационный проект по ев-

ропейской программе Темпус-Тасис, в рамках которого профессор Г. И. Львов и доцент С. К. Шелковый работали в университете Дрездена и в научном центре Европейского Экономического Сообщества в Брюсселе, изучая методику подготовки и документационное обеспечение дальнейших европейских научных программ. Со стороны Дрезденского университета руководство этим проектом и в Дрездене, и в Брюсселе осуществлял доктор Г. Краузе.

В 1992 году делегация харьковских предприятий и организаций принимала участие в широко известной Нюрнбергской выставке-ярмарке, одной из крупнейших в Германии и Европе. Образование Харькова и научно-технические разработки харьковских учёных представляли Харьковский политехнический и Харьковский авиационный институты. В состав делегации ХПИ входили профессор Г. И. Львов, профессор А. И. Грабченко, доцент С. К. Шелковый. В работе харьковской группы принял тогда участие и мэр Харькова, города-партнёра Нюрнберга, Е. П. Кушнарёв.

Третьим интернациональным партнером кафедры ДПМ в Германии, связи с которым укрепились в последние годы, является Технический университет Аахена. В отличие от восточно-германских городов Магдебурга и Дрездена, Аахен, как известно, — старинный город у западной границы Германии, отмеченный чрезвычайно богатой исторической судьбой.

Рейнско-Вестфальский Технический университет Аахена (RWTHU) — более полное название и аббревиатура этого ВУЗа, основанного в 1870 году и обладающего богатейшими научными традициями. Достаточно сказать, что RWTHU входит в пятерку авторитетнейших технических университетов в Европе и отмечен научной деятельностью в его стенах пяти Нобелевских лауреатов по физике и химии в период с 1911 по 1963 год. Известный авиаконструктор Хуго Юнкерс также в своё время работал профессором Технического университета в Аахене.

Профессор механики М. Ицков из Аахенского университета выступал несколько лет назад на кафедре ДПМ с интереснейшим докладом, посвящённым численному моделированию биологических объектов и процессов. С ответным визитом и научным докладом по нелинейной

механике посетил Аахенский университет профессор Г. И. Львов, заведующий кафедрой динамики и прочности машин НТУ «ХПИ».

В Техническом университете Аахена проходил также научную стажировку в 2013—2014 годах доцент кафедры ДПМ А. А. Ларин, реализуя свои теоретические и экспериментальные исследования и проводя курс занятий для магистрантов, проходящих обучение в Аахене по международной программе. В университет RWTH также неоднократно прибывали на преддипломную практику харьковские студенты динамики, выезжая оттуда с ознакомительными целями и в университеты Штутгарта и Магдебурга.

Опыт научного взаимодействия с техническими университетами Германии способствовал тому, что в последние годы учёные кафедры ДПМ НТУ «ХПИ» стали принимать всё большее участие в комплексных европейских научных программах и проектах: Tempus, Inco-Corpenicus, Tempus SCM, Innoripes. При этом и преподаватели кафедры (профессор Г. И. Львов, доценты В. А. Федоров, В. Г. Сукиасов, А. А. Водка), и аспиранты проходили двух-трёхмесячные научные стажировки в университетах Болгарии, Латвии, Польши.

Интенсивное образовательное и научное взаимодействие НТУ «ХПИ» по линии кафедр ДПМ, а также кафедр «Электропривод» (заведующий — профессор В. Б. Клепиков), «Резания материалов» (профессор А. И. Грабченко) и «Подъёмно-транспортные машины» (профессор О. В. Григоров), дало возможность в 2003 году открыть в нашем Университете Немецкий Технический факультет (декан — профессор В. Н. Шамардина). При этом отдельная группа студентов Немецкого технического факультета проходит обучение совместно со студентами специальностей «Динамика и прочность машин», «Компьютерная механика», «Интегральные технологии проектирования» и имеет возможность выезжать наряду со студентами кафедры ДПМ на стажировки в университеты Германии.

Сегодня Украина находится на непростом этапе своего исторического развития. Полноценная интеграция страны в европейское цивилизационное, и в частности, экономическое сообщество, требует от всех ветвей власти страны и от каждого из наших граждан серьёзных и обдуманых решений и усилий.

Но, опираясь на опыт уже четырёх десятилетий научного и образовательного сотрудничества кафедры динамики и прочности машин НТУ «ХПИ» с техническими университетами Германии, можно говорить в этом частном случае о том, что европейский вектор, выбранный сегодня Украиной, — это единственно правильный путь к эффективной высокопроизводительной деятельности, к лучшему будущему нашего общества.

Несколько научных статей автора этого сборника, публикуемые ниже, тесно связаны своей тематикой с докладами, прочитанными автором во время стажировок в университетах Магдебурга и Дрездена и на научных конференциях в Брауншвайге и Гамбурге. Основной темой этих докладов является конечноэлементный численный анализ динамики пространственных корпусных конструкций энергомашиностроения, а также исследование динамики связанной системы «корпус-фундамент» паровой турбины.

II

С. К. Шелковий, доцент, канд. техн. наук

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ МНОГОКРАТНО СИММЕТРИЧНЫХ ПЛАСТИНЧАТЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ СИММЕТРИИ

Исследование собственных колебаний многократно симметричных конструкций (МСК) на основе разрешающих систем, использующих параметры половины периодической подконструкции, проведено в работе [1] для изгибных колебаний правильных треугольных и шестиугольных пластин. В работе [2] выполнен учет многократной симметрии для изгибных колебаний пространственных пластинчатых систем в частных случаях симметрии.

Алгоритм формирования сокращенных разрешающих систем частотных уравнений на основе параметров полупериода обобщен на случай произвольного показателя симметрии пространственных пластинчатых конструкций [3] (пример конструкции показан на рисунке).

Проведем построение матриц вырожденных кратных частот [B] для пространственных пластинчатых МСК. Собственные формы МСК на кратной частоте симметричны или кососимметричны относительно нулевого сечения. В соответствии с общими выражениями [4] для независимых форм многократно симметричной конструкции на двукратной частоте и кососимметричных параметров углов поворота на стыках пластин в случае кососимметричной относительно нулевого сечения формы

$$\{\varphi\}_{r, m, j} = A_{m, j} \{u\}_{m, j} \cos 2\pi r m / S \quad (1)$$

для симметричной относительно нулевого сечения формы

$$\{\Psi\}_{r, m, j} = D_{m, j} \{u\}_{m, j} \sin 2\pi r m / S; \quad \begin{array}{l} r = 0, 1, \dots, S-1; \\ m = 1, \dots, \frac{S-1}{2}, \left(\frac{S-2}{2}\right). \end{array} \quad (2)$$

Здесь m — параметр цикличности; j — номер частоты при данном m ; r — номер периодической секции. Соотношение констант $A_{m,j}$, $D_{m,j}$ может быть установлено из условий одинаковой нормировки $\{\varphi\}_{r,m,j}$, $\{\psi\}_{r,m,j}$. При нормировке $\{\varphi\}^T\{\varphi\} = \{\psi\}^T\{\psi\} = 1$, принятой здесь, $A_{m,j}/D_{m,j} = \pm 1$. Для случая треугольной симметрии при $S = 3$ на конкретной кратной частоте (m, j — фиксированы)

$$\begin{aligned}\varphi &= \{ \{u\} \cos 2\pi 0/3, \{u\} \cos 2\pi 1/3, \{u\} \cos 2\pi 2/3 \}^T; \\ \psi &= \{ \{u\} \sin 2\pi 0/3, \{u\} \sin 2\pi 1/3, \{u\} \sin 2\pi 2/3 \}^T.\end{aligned}\quad (3)$$

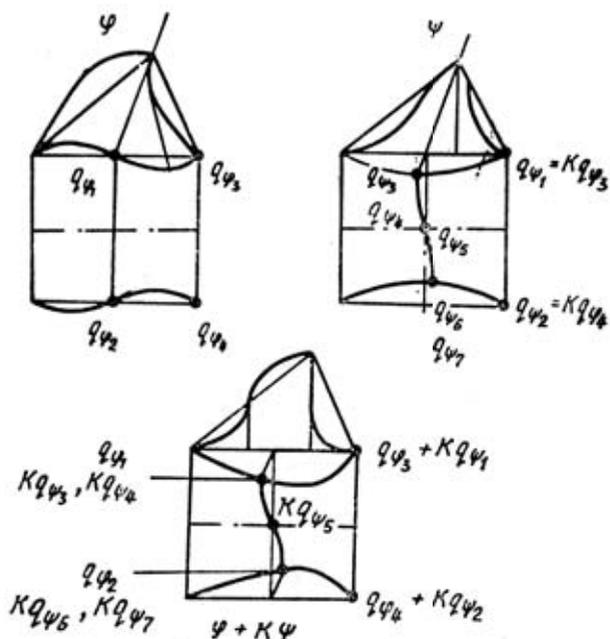
Из трех форм φ , $c_3\varphi$ (поворот φ на $2\pi/3$ по часовой стрелке) и $\bar{c}_3\varphi$ (поворот против часовой) линейно независимы только две [1]. Так, форма φ представляется суперпозицией $\varphi = -(\bar{c}_3\varphi + c_3\varphi)$. (4). Ортогональная φ , симметричная относительно плоскости, проходящей через нулевое сечение (соответствует верхнему углу треугольника на рисунке), форма ψ также может быть представлена суперпозицией вращений $\psi = N(\bar{c}_3\varphi - c_3\varphi)$ (5), где $N = 1/\sqrt{3}$ — нормирующий множитель.

Матрицу $[B]$ разрешающей системы для двукратных частот получаем, записывая уравнения равновесия узлов конечноэлементной $1/2 S$ -й части, выделенной на рисунке жирной линией, на ортонормированных формах φ , ψ . При этом в качестве граничных условий на левом краю участка учитываются условия кососимметрии φ и симметрии ψ : $\{w\}_n^{\varphi} = 0$; $\{\partial w/\partial x\}_n^{\psi} = 0$ (6). На правом краю полупериодической части модели используем свойства симметрии и антисимметрии некоторых линейных комбинаций φ , ψ . Для нечетного показателя симметрия $S = 2n - 1$, $n = 2, 3, 4 \dots$ — номер сечения, проходящего через правый край $r_{\Pi} = (S - 1)/2$ (нулевое сечение соответствует верхним углам многогранников на рисунках). Для суперпозиций $\psi - K\varphi$ и $\varphi + K\psi$ выполняются соответственно условия симметрии (7) и антисимметрии (8) в сечении $r_{\Pi} = (s - 1)/2$ при $S = 2n - 1$:

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{(S-1)/2}^{\psi - K\varphi} = 0; \quad \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{(S-1)/2 - i}^{\psi - K\varphi} = - \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{(S-2)/2 + i}^{\psi - K\varphi}; \quad (7)$$

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{(S-1)/2 - i}^{\varphi + K\psi} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{(S-1)/2 + i}^{\varphi + K\psi}, \quad i = 1, 2 \dots \frac{S-1}{2}. \quad (8)$$

Из первого равенства (7), учитывая равенства (1), (2), определяем значение коэффициента K , входящего в выражения линейных комбинаций: $K = \pm \operatorname{tg} 2\pi m (S - 1)/2S = \pm \operatorname{tg} \pi m (S - 1)/S$, $S = 2n - 1$; $n = 2, 3, 4 \dots$; $m = 1, 2, \dots (S - 1)/2$ (9).



При $S = 3$ $K = \pm \operatorname{tg} 2\pi/3 = \pm \sqrt{3}$. Условие кососимметрии на правом краю рассматриваемого участка на форме $\varphi + K\psi$ позволяет записать замыкающие систему уравнения равновесия для узлов правого края. На рисунке подробно показаны рассматриваемые модели при сетке разбиения каждой пластины 2×2 КЭ, обозначены параметры, относительно которых формируется система уравнений равновесия конечноэлементной модели $1/2 S$ -й части. В соответствии с обозначениями рисунка уравнения равновесия для двух параметров правого края формы $\varphi + K\psi$ запишутся так (суммирование проводится по КЭ, примыкающим к данному узлу):

$$\begin{aligned}
 (\Sigma M_1)_{\varphi+K\psi} &= k_{6,3}(q_{\psi_1} + 0) + k_{6,6}(q_{\psi_2} + Kq_{\psi_3}) + k_{6,1}(0 + Kq_{\psi_4}) + \\
 &\quad + k_{6,2}(0 + Kq_{\psi_4}) + k_{6,11}(0 + Kq_{\psi_5}) = 0; \\
 (\Sigma M_2)_{\varphi+K\psi} &= k_{9,12}(q_{\psi_2} + 0) + k_{9,9}(q_{\psi_4} + Kq_{\psi_3}) + k_{9,2}(0 + Kq_{\psi_5}) + \\
 &\quad + k_{9,10}(0 + Kq_{\psi_6}) + k_{9,11}(0 + Kq_{\psi_7}) = 0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Записывая уравнения равновесия для остальных силовых компонент моделей $1/2S$ — частей форм φ , ψ , и располагая в искомом векторе $\{q\}_B$ сначала геометрические компоненты формы φ , затем ψ , при указанном на рисунке порядке нумерации получаем разрешающую систему

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 K_{3,3} \quad 0 \quad K_{3,6} \quad 0 \\
 \hline
 K_{12,12} \quad 0 \quad K_{12,9} \\
 \hline
 (K^2+1) \times \\
 \times k_{6,6} \\
 \hline
 (k^2+1) \times \\
 \times k_{9,9}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{ccccc}
 0 & & & & \\
 \hline
 K k_{6,1} & K k_{6,2} & K k_{6,11} & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & K k_{9,2} & K K_{9,10} & K K_{9,11} \\
 \hline
 k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,11} & 0 & 0 \\
 \hline
 & k_{2,2} & k_{2,11} & 0 & 0 \\
 \hline
 & & 2k_{2,2} & k_{2,10} & k_{2,11} \\
 \hline
 & & & k_{10,10} & k_{10,11} \\
 \hline
 & & & & k_{11,11}
 \end{array}
 \right.
 \times
 \end{array}$$

симметрично

$$\times \begin{Bmatrix} q_{\varphi 1} \\ q_{\varphi 2} \\ q_{\varphi 3} \\ q_{\varphi 4} \\ q_{\varphi 3} \\ q_{\varphi 4} \\ q_{\varphi 5} \\ q_{\varphi 6} \\ q_{\varphi 7} \end{Bmatrix} = [B]_{S=3} \{q\}_B = 0. \quad (11)$$

Полученная матрица $[B]_3$ является симметричной и ленточной. Значения нормирующего множителя N и коэффициента K , входящего в суперпозиции, не зависят от применяемых сеток дискретизации, а определяются порядком симметрии системы S . В частности, при $S=3$ в работе [1] строятся аналогичные значения N и K при рассмотрении континуальной модели пластины в форме правильного треугольника. Для вывода коэффициентов используются соотношения, получаемые в теории групп.

Алгоритмически построение матриц вырожденных частот $[B]$ проводится весьма просто. Параметры конечноэлементной модели $1/2S$ -й части при учете кососимметрии формы Φ нумеруются по вертикальным линиям сетки разбиения слева направо, при наложении условий симметрии формы Ψ — справа налево (см. рисунок). Левые столбцы и верхние строки конечноэлементной матрицы, построенной на форме Ψ , умножаются по числу параметров правого края на коэффициент K . Затем две конечноэлементные матрицы налагаются, размер части наложения (суммирования) определяется числом параметров правого края $1/2S$ -части конструкции.

По описанному алгоритму построены матрицы вырожденных частот $[B]_2$ для различных сеток разбиения (2×2 и 4×4 для каждой пластины). Собственные частоты, полученные из матрицы $[B]$, при нахождении собственных чисел по методу вращений полностью совпадают с частотами, определенными из полной

матрицы конструкции, построенной объединением одинаковых суперэлементов (пластин).

Для симметрий $S=5, 7, 9, 11$ в соответствии с выражением (9) значения коэффициентов K в линейных суперпозициях, дающих дополнительные граничные условия, следующие:

$$K_{S=5} = \pm \operatorname{tg} 4\pi m/5, \quad m = 1, 2; \quad K_{S=7} = \pm \operatorname{tg} 6\pi m/7, \quad m = 1, 2, 3;$$

$$K_{S=9} = \pm \operatorname{tg} 8\pi m/9, \quad m = 1, \dots, 4; \quad K_{S=11} = \pm \operatorname{tg} 10\pi m/11,$$

$$m = 1, \dots, 5. \quad (12)$$

| Порядок симметрии | Частота, Гц | | | | |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | $P_{1,2}$ | $P_{3,4}$ | $P_{5,6}$ | $P_{7,8}$ | $P_{9,10}$ |
| $S=5$ | 526 $m=2$ | 658,4 $m=1$ | — | — | — |
| $S=7$ | 514,4 $m=3$ | 591 $m=2$ | 702,2 $m=1$ | — | — |
| $S=9$ | 510,3 $m=4$ | 558,8 $m=3$ | 639,8 $m=2$ | 724,5 $m=1$ | — |
| $S=11$ | 508 $m=5$ | 541,5 $m=4$ | 600,5 $m=3$ | 672,3 $m=2$ | 736,7 $m=1$ |

Строя согласно алгоритму (11) разрешающие системы, получаем значения кратных собственных частот, представленные в таблице. Приведенные значения частот совпадают с полученными непосредственно из полных конечноэлементных моделей систем. Отметим, что кратные частоты системы с симметрией S

разделяют значения частот системы с симметрией $S+2$.

Для четного показателя симметрии $S=2n$, $n=2, 3, 4$ рассмотрим отдельно случаи S кратного двум ($S=2q$, $q=3, 5, 7 \dots$) и S кратного четырем ($S=4l$, $l=1, 2, 3 \dots$). При $S=2q$, $q=3, 5, 7 \dots$ для исходных форм $\{\varphi\}_{r,l} = a \{u\}_{r,l} \cos 2\pi r m/S$ и $\{\psi\}_{r,l} = d \{u\}_{r,l} \sin 2\pi r m/S$, $r=0, 1, \dots, S-1$ одна плоскость симметрии (антисимметрии) проходит через нулевое сечение, вторая, перпендикулярная первой, — через середину стороны многогранника. Следовательно, на середине стороны, на левом краю полупериодической $1/2$ S -й части могут, как и раньше, быть использованы условия симметрии или кососимметрии на исходных ортонормированных формах φ , ψ . Формы φ , ψ для случая $S=6$ показаны в таблице [2]. Каждая из двух форм может быть записана в виде суперпозиции вращений одной из них. В частности, рассматривая вращения $\varphi: c_6\varphi$ (поворот на угол $2\pi/6$ по часовой стрелке) и $c_6\varphi$ (против часовой стрелки), можем записать

$$\varphi = -(\bar{c}_6\varphi + c_6\varphi); \quad \psi = 1/\sqrt{3}(\bar{c}_6\varphi - c_6\varphi).$$

На правом краю полупериодического участка получаем условия кососимметрии для $\varphi + k\psi$ и симметрии $\psi - k\varphi$. В случае $S=2q$, $q=3, 5, 7 \dots$ номер сечения рассматриваемого правого края $r_n = (S-2)/4$; записывая условие $\{\partial w/\partial x\}_{(S-2)/4}^{\psi - k\varphi} = 0$, ол-

ределяем значение для коэффициента суперпозиций

$$k = \pm \operatorname{tg} \pi m (S - 2)/2S, \quad S = 2q; \quad q = 3, 5, 7; \quad m = 1, \dots, (s-2)/2 - 1.$$

При нечетном m' форма $\alpha = \{u\}_{r,l} \cos 2\pi m'/S$ дает условия симметрии на левом краю участка и форма $\beta = \{u\}_{r,l} \sin 2\pi m'/S$ соответственно условие кососимметрии слева [2]. Здесь линейные комбинации форм $\alpha - k\beta$ и $\beta + k\alpha$, сохраняющие алгоритм формирования сокращенной матрицы (11) (в начале вектора стоят параметры кососимметричной слева формы), определяют коэффициент $k_{m'} = \pm \operatorname{ctg} \pi m' (S - 2)/2S, \quad S = 2q; \quad q = 3, 5, 7 \dots; \quad m' = 2, \dots, (S - 2)/2$ (13). Расположив параметры формы α , симметричной относительно левого края полупериода, в начале искомого вектора, а после них параметры форм β , можем использовать симметрию на правом краю суперпозиции $\beta - k_{m'}^* \alpha$ и антисимметрию формы $\alpha + k_{m'}^* \beta$. В этом случае сокращенная матрица имеет измененный по сравнению с системой (11) алгоритм формирования, изменяется вектор искоемых параметров форм, а коэффициент $k_{m'}^* = \pm \operatorname{tg} \pi m' (S - 2)/2S = 1/k_{m'}$.

Кратные частоты для $S = 6, \quad m' = 1$, найденные из системы (11) при $k_{S=6, m'=1} = \operatorname{ctg} \pi/3 = 1/\sqrt{3}$, и в работе [2] — второй алгоритм при $k_{S=6, m'=1}^* = \operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3}: P_{4,5} = 684,5$ Гц. Частоты в обоих случаях совпадают с полученными из общей матрицы, построенной объединением суперэлементов.

В случае кратности показателя симметрии S четырем, $S = 4l, \quad l = 1, 2, 3 \dots$ одна из плоскостей антисимметрии (симметрии) форм $\{c\} = a \{u\} \cos 2\pi rm/S$ и $\{e\} = d \{u\} \sin \frac{2\pi rm}{S}$ проходит через нулевое сечение, вторая, перпендикулярная первой, через стык пластин, т. е. непосредственно условия симметрии и кососимметрии посередине пластин — периоды не могут быть записаны, как ранее. Однако имеются условия симметрии (кососимметрии) справа в сечении с номером $r_n = S/4$. Построим линейные суперпозиции $\{\psi\} = \{c\} + k \{e\}$ — симметричную на левом краю, посередине пластины и $\{\varphi\} = \{e\} - k \{c\}$, кососимметричную слева. При этом должны выполняться условия.

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{S/4}^{c+ke} = - \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{S/4+1}^{c+ke}; \quad \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{S/4}^{e-kc} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{S/4+1}^{e-kc}. \quad (14)$$

Отсюда получаем $k = \mp (\cos 2\pi (S/4 + 1) m/S + \cos \pi m/2) / (\sin (S/4 + 1) \pi m/2 + \sin \pi m/2)$ (15). Система уравнений $\{c\} + k \{e\} = \{\psi\}; \{e\} + k \{c\} = \{\varphi\}$ равносильна системе $\{e\} = \{\varphi'\} + k \{\psi'\}; \{c\} = -\{\psi'\} - k \{\varphi'\}$, где $\{\varphi'\} = (1/(k^2 + 1)) \{\varphi\}; \{\psi'\} = (1/(k^2 + 1)) \{\psi\}$.

Таким образом, имеем кососимметричную на левом краю полу-периода форму $\{\varphi'\}$ и симметричную слева $\{\varphi\}$ и их суперпозиции, дающие условия симметрии $\{c\}$ и кососимметрии $\{e\}$ на правой границе, т. е. компоненты форм $\{\varphi'\}$, $\{\varphi\}$ и соответствующие кратные собственные частоты могут быть найдены по алгоритму (11) со значениями коэффициентов

$$k_{S=8} = \mp \frac{\cos 18\pi/8 + \cos 3\pi/2}{\sin 18\pi/8 + \sin 3\pi/2} = \pm (\sqrt{2} + 1);$$

$$k_{S=8} = \mp \frac{\cos 6\pi/8 + \cos \pi/2}{\sin 6\pi/8 + \sin 3\pi/2} = \pm (\sqrt{2} - 1).$$

При $S = 8$, $m = 2$ для сохранения порядка построения матрицы (11) форма $\{c\}$, входящая в суперпозиции $\{\psi\} = \{c\} + k\{e\}$ и $\{\varphi\} = \{e\} - k\{c\}$, имеет вид $\{c\} = a\{u\} \sin 2\pi r m / S$, так как именно эта форма дает симметрию справа при данном m соответственно $\{e\} = d\{u\} \cos 2\pi r m / S$. Тогда после записи граничных условий (14)

$$k_{S=8} = \mp \frac{\sin 2\pi (S/4 + 1) m / S + \sin \pi m / 2}{\cos 2\pi (S/4 + 1) m / S + \cos \pi m / 2} = \mp 1.$$

Значения кратных частот, определенных из сокращения матрицы $[B]_{S=8}$ и из полной матрицы системы при различных сетках разбиения: 2×2 и 4×4 КЭ для пластины, периоды конструкции полностью совпадают для всех m [2].

Таким образом, построены системы частотных уравнений вырожденных частот многократно симметричных пространственных пластинчатых систем при произвольном показателе симметрии S . При формировании разрешающих систем применяются конечноэлементные модели полупериодической части, т. е. предлагается более экономный подход, чем в общем случае циклически симметричных систем. Получены выражения коэффициентов, дающих суперпозиции с дополнительными граничными условиями.

Список литературы: 1. *Ивсен Д.* Расчет колебаний многократно симметричных конструкций.—*Ракетная техника и космонавтика*, 1976, 14, № 4, с. 39—47. 2. *Богомолов С. И., Журавлева А. М., Шелковий С. К.* О спектрах частот многократно симметричных пространственных пластинчатых систем.—*Динамика и прочность машин*, 1979, вып. 29, с. 57—66. 3. *Шелковий С. А.* Исследование колебаний корпусов энергетических машин на основе пространственных пластинчатых конечноэлементных моделей.—*Автореф. дис. ... канд. техн. наук.*—Харьков, 1980.—29 с. 4. *Бидерман В. Я.* Прикл. теория механических колебаний.—М.: Высш. школа, 1972.—415 с.

Ш

И. Альтенбах, проф., д-р техн. наук,
В. Киссинг, д-р техн. наук,
С. К. Шелковий, доцент, канд. техн. наук

КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПОЛУБЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Расчет напряжений и деформаций одно- или многомерных призматических (непризматических) несущих конструкций из пластин, имеющих различные по форме и характеру приложения нагрузки сечения, представляет существенную трудность. Аналитический расчет на основе теории изгиба составных конструкций в общем невозможен. Для численного анализа, например, с помощью традиционных плоских элементов пластин, также требуется большой объем вычислений. В то же время подобные конструкции обладают удобными несущими свойствами и поэтому широко применяются в инженерной практике.

В предположении, что форма конструкции допускает моделирование в виде стержня-оболочки, В. З. Власовым развита полубезмоментная теория, которая во многих случаях, учитывая основные особенности конструкции, существенно упрощает расчет [1]. Излагаемая постановка задачи исходит из обобщения этой теории.

Рассмотрим призматические и конические замкнутые стержнеподобные составные конструкции.

На рис. 1 показана коническая коробчатая несущая конструкция. Здесь z, s, S — координаты; p, q — нагрузки; u, v — перемещения; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — напряжения. Нагрузки Q, M в поперечных сечениях несущей конструкции приложены в направлении S (полубезмоментная теория)

В частности, справедливы следующие предположения: тонкостенная замкнутая конструкция состоит из плоских пластинчатых элементов-стен; один из размеров существенно преобладает (направление z); размеры в поперечных сечениях изменяются

незначительно; отдельные элементы-стены соединены шарнирно или жестко; предполагается физическая и геометрическая линейности; разрешено регулярное поперечное и произвольно ориентированное продольное повышение жесткости элементов-стен; учитываются сдвиговые деформации срединной поверхности и деформации ϵ_z , ϵ_s элементов-стен; напряжения σ_z , τ_{zs} по толщине стены σ постоянны, при этом напряжение σ_s изменяется линейно; в качестве нагрузок в элементах-стенах действуют только $p(z, S)$, $q(z, S)$ и стационарное температурное поле $T(z, S)$.

Обобщение по сравнению с исходной теорией Власова состоит в том, что расширяется кинематика деформаций в результате разрешения любых деформаций в продольном направлении и введения поперечных деформаций ϵ_s в элементы-стены. Кроме того, дополнительно учитываются нагрузки, обусловленные стационарным температурным полем.

Для перемещений $u(z, S)$, $v(z, S)$ справедливы соотношения [1]

$$u(z, S) = \sum_{i=1}^m (u_i(z) \varphi_i(S)); \quad v(z, S) = \sum_{k=1}^n v_k(z) \psi_k(S), \quad (1)$$

где $u_i(z)$, $v_k(z)$ — обобщенные продольные и поперечные перемещения; $\varphi_i(S)$, $\psi_k(S)$ — обобщенные координаты продольных и поперечных перемещений; m , n — число кинематических степеней свободы продольных и поперечных перемещений.

С помощью уравнение упругого потенциала

$$\begin{aligned} \Pi = \int \int \left[\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{\partial v}{\partial S} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial S} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial S} \right] - \right. \\ \left. - \frac{E}{1-\nu} \alpha T \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dv}{dz} - \alpha T \right] + \frac{E}{4(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \delta + \\ + \frac{M^2}{2EJ} - pu - qv \Big] dSdz. \end{aligned} \quad (2)$$

Упругий потенциал (2) содержит не более, чем первые производные искоемых обобщенных перемещений $u_i(z)$, $v_k(z)$. Следовательно, можно использовать одномерные конечные элементы перемещений, которые обеспечивают непрерывность в узлах только для обобщенных перемещений (элементы Лагранжа).

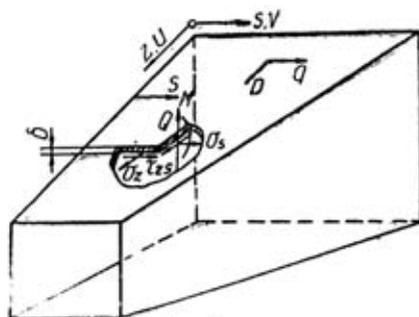


Рис. 1

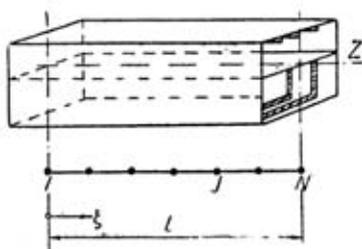


Рис. 2

На рис. 2 изображен такой элемент с N узлами. Учитывая, что для обобщенных перемещений выполняются соотношения

$$u(\xi) = G(\xi)v; \quad u(\xi) = \begin{bmatrix} u_m(\xi) \\ u_n(\xi) \end{bmatrix}; \quad u_m^T(\xi) = [u_1(\xi), \dots, u_m(\xi)]; \quad (3)$$

$$u_n^T(\xi) = [v_1(\xi), \dots, v_n(\xi)];$$

$$G(\xi) = [G_1(\xi)I_1, \dots, G_J(\xi)I, \dots, G_N(\xi)I], \quad (4)$$

где $G_J(\xi)$ — интерполяционный полином Лагранжа $(N-1)$ -й степени, имеем

$$v^T = [v_1, \dots, v_J, \dots, v_N]; \quad v_J^T = [u_{1J}, \dots, u_{mJ}; v_{1J}, \dots, v_{nJ}]. \quad (5)$$

Из условия $\frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0$ для элемента получаем $kv = f$ (6). Отметим, что v_J — узловой вектор узла J ; f — вектор обобщенных нагрузок. Матрица жесткости элемента размера $N(m+n) \times N(m+n)$. Для практически важного частного случая $N=2$ (двухузловой элемент) справедливо

$$u(\xi) = [G_1(\xi)IG_2(\xi)I]v; \quad G_1(\xi) = 1 - \xi; \quad G_2(\xi) = \xi. \quad (7)$$

У каждого узла элемента $m+n$ степеней свободы, т. е. элементы, полученные на основе обобщенной полубезмоментной теории, могут иметь сложные узловые векторы. При вычислении матрицы жесткости и грузового вектора элемента интегрирование по S в выражении упругого потенциала (2) выполняется отдельно для каждого узла. Затем осуществляется интерполяция с помощью интерполяционных полиномов $G_J(\xi)$ с учетом равенства (4). Для общего случая изменения поперечного сечения, например параболического изменения в направлении z , так и в случае переменных характеристик материала, целесообразно вывести соотношения для элемента с помощью изопараметрической концепции.

На рис. 3 показан пример выбора обобщенных координат для односвязного сечения, на рис. 4 — для двухсвязного.

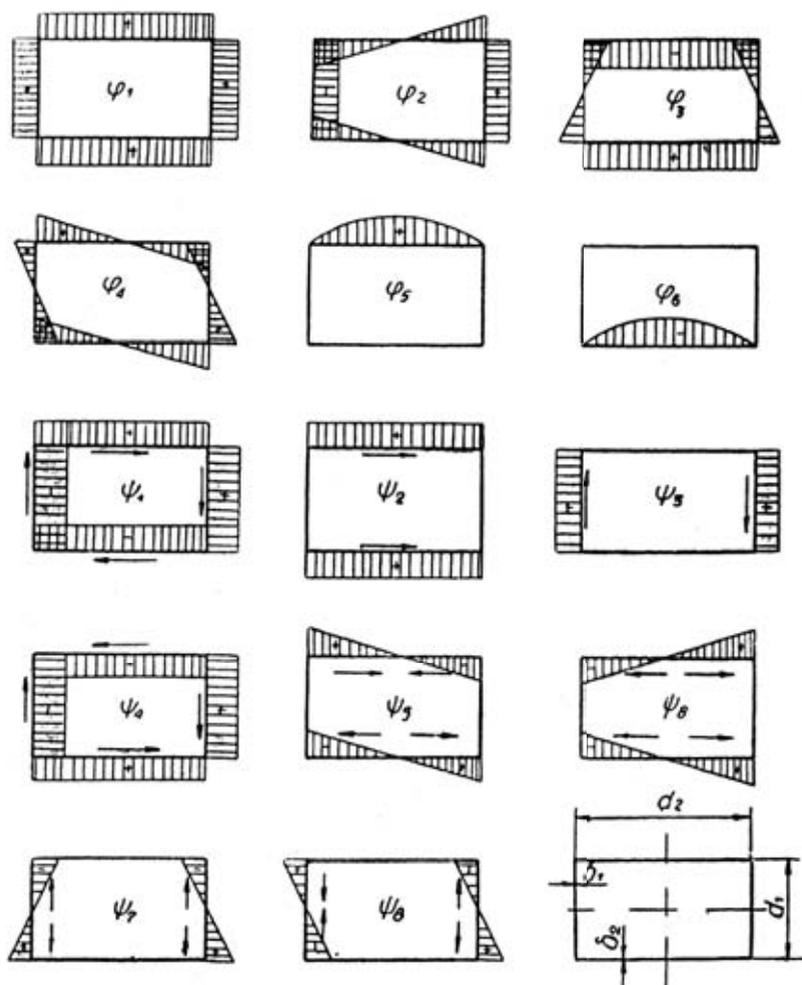


Рис. 3

Применение обобщенной полубезмоментной теории для расчета тонкостенных стержневых замкнутых конструкций возможно не только на основе МКЭ. Некоторые классы задач рассмотрены ранее [2, 3].

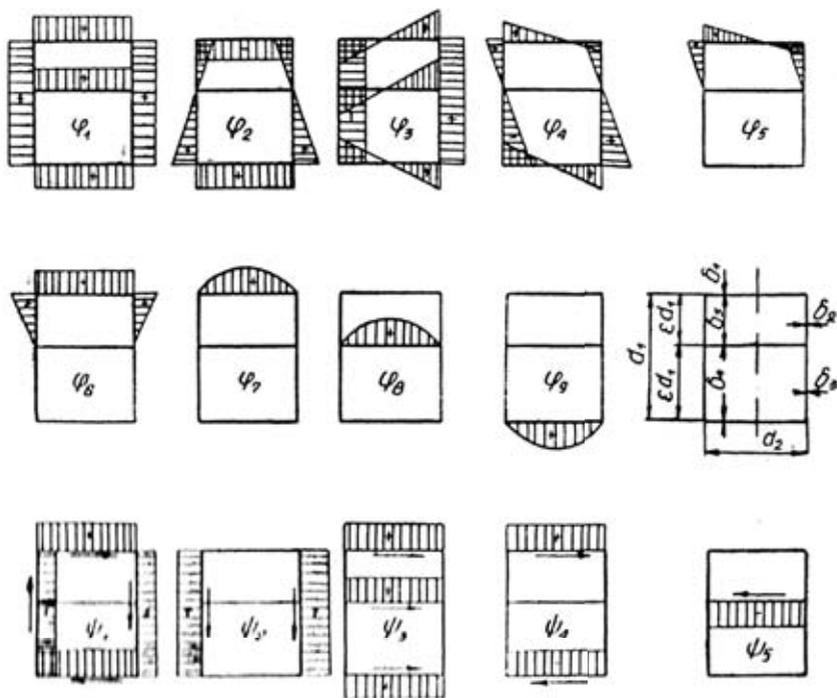


Рис. 4

Список литературы: 1. *Wlassow W. S.* Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik.—Berlin, Akademie-Verlag, 1958.—286 S. 2. *Альтенбах И., Альтенбах Х., Киссинг В.* Разработка одномерного конечного элемента на основе полубезмоментной теории оболочек по Власову. — Динамика и прочность машин, 1983, вып. 38, с. 32—36. 3. *Альтенбах И., Киссинг В.* Erweiterung der halbmomentenfreien Schalentheorie von Wlasow für geschlossene prismatische Konstruktionen.—Probl. seminar Flächentragwerke, 1982, H. 4, S. 48—59.

IV

S. S c h e l k o v y, Dozent Dr.-Ing., A. S t e p c h e n k o, Dr.-Ing.

DYNAMISCHE ANALYSE DES SYSTEMS «DAMPFTURBINE-FUNDAMENT» AUF GRUNDLAGE DES MODALSYNTHEVERFAHRENS UND SUPERELEMENTENKONDENSATION

Mittels der Computerrealisierung des Verfahrens der statischen Superelementkondensation wurden in [1, 2, 3] die ausführliche Berechnung der Eigenfrequenz- und Eigenformspektren sowie der dynamischen Nachgiebigkeit des Gehäuses des Niederdruckzylinders (NDZ) einer Dampfturbine realisiert. Die sogenannte „Wabenkonstruktion“ des Gehäuses wurde als räumliches Platten- und Stabsystem modelliert.

Für eine verbesserte Gehäusekonstruktion des NDZ sind senkrechte versteifende Platten in der Nähe des Lagers durch das räumliche Stabsystem ersetzt wurden, was bei Beibehaltung der Festigkeit eine Verminderung des Gewichts und eine Verbesserung der Aerodynamik des Dampfes gewährleisten soll.

Für die dynamische Analyse dieses neuen Gehäuses einer NDZ sowie für die Analyse des kompletten Systems „Dampfturbine-Fundament“ wurden Programmkomplexe auf der Grundlage des Modalsyntheseverfahrens entwickelt. Teilweise wurde auch für die Berechnung einiger Baugruppen des Systems „Dampfturbine-Fundament“ die Superelementmethode in der Form der statischen Kondensation angewendet. Bei dieser Kondensation wird die Verbindung des externen Last- und Geometrieparameter als

$$[Z]_{cT}[q]_c = \left[[Z]_{cc} - [Z]_{cb}[Z]_{bb}^{-1}[Z]_{bc} \right] [q]_c = [F]_c - [Z]_{cb}[Z]_{bb}^{-1}[F]_b \quad (1)$$

dargestellt.

In der Gln. (1) sind die indizierten Matrizen als Blöcke der gewöhnlichen FEM-Steifigkeitsmatrix definiert

$$[Z] = [K] - \omega^2 [M] = \begin{bmatrix} Z_{cc} & Z_{cb} \\ Z_{bc} & Z_{bb} \end{bmatrix} \quad (2)$$

In der Gln. (2) gehören die Indizes „C“ zu den Parametern des Superknoten, und „B“ zu den inneren Parametern. Nach der Bestimmung der Außenparameter $\{q\}_c$ der kompletten Konstruktion werden die internen verallgemeinerten Verschiebungen für jedes Superelement folgendermaßen

$$[q]_b = [Z]_{bb}^{-1} [F]_b - [Z]_{bb}^{-1} [Z]_{bc} [q]_c \quad (3)$$

dargestellt.

Im Algorithmus ist die automatische Identifizierung der Nummern der Eigenfrequenzen im Spektrum bei der Choleski-Zerlegung oder der Gaußtriangulation der dynamischen Steifigkeitsmatrizen gewährleistet.

$$M_c = M + \sum_{i=1}^T N_i M_i \quad (4)$$

$$M_c = M + \sum_{i=1}^T N_{i,j} M_{i,j} + \dots + \sum_{i=1}^{T-1} N_{s-1,j} M_{s-1,j} \quad (5)$$

Hier sind M_c - die Zahl der Eigenfrequenzen, die niedriger als die Probefrequenz ω liegen; T - die Zahl der SE-Typen des Systems; N_i - die Zahl der SE vom i -Typ; M_i - die Zahl der Eigenfrequenzen des SE vom i -Typ bei fixierten Superknotenparametern, die niedriger als ω liegen; M - die Zahl der negativen Koeffizienten auf der Diagonale der Matrix $[Z]_{\Sigma_{CV}}$

Die Gln. (5) demonstriert dieselbe Identifizierung bei der statischen Kondensation in einem mehrstufigen Prozeß.

Das Modalsyntheseverfahren in der Variante von Craig-Bampton [] realisiert folgende Prozedur. Für die Eigenschwingungsgleichung des einzelnen Superelements

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bc} \\ K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} - P^2 \begin{bmatrix} M_{bc} & M_{cb} \\ M_{cb} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^b \\ x^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P^c \end{Bmatrix} \quad (6)$$

wird der Koordinatenvektor $\{x^b\}$ in einen statischen und einen dynamischen Anteil zerlegt.

$$\{x^b\} = \{x_D^b\} + \{x_C^b\} \quad (7)$$

Der statische Teil des Vektors $\{x_C^b\}$ wird folgendermaßen

$$[K_{bb}]\{x_C^b\} + [K_{bc}]\{x_C^c\} = 0 \quad (8)$$

$$\{x_C^b\} = [V^c]\{x_C^c\}, \quad [V^c] = [K_{bb}]^{-1}[K_{bc}] \quad (9)$$

definiert.

Den dynamischen Teil erhalten wir in der Form:

$$\{x_D^b\} = [V^s]\{Q^s\} \quad (10)$$

S - Zahl der SE-Eigenformen,

$\{V^j\}$ - j -te Eigenform, $j = 1 \dots S$;

Q_j - neue verallgemeinerte Koordinaten, $j = 1 \dots S$.

Nach der Koordinatenerlegung erhält man die Eigenschwingungsgleichung des Superelements als

$$[[K_{bb}] - \omega^2[M_{bb}]]\{V^j\} = 0, \quad j = 1 \dots S \quad (11)$$

Gln. (7) wird unter Berücksichtigung von (9) und (10) als

$$\{x^b\} = \begin{bmatrix} V^S & V^C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^S \\ x^c \end{Bmatrix} \quad (12)$$

dargestellt. Auf diese Weise erhält man

$$\begin{Bmatrix} x^b \\ x^c \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} Q^S \\ x^c \end{Bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} V^S & V^C \\ 0 & E \end{bmatrix} \quad (13)$$

Die Matrizen für die neuen verallgemeinerten Koordinaten lauten:

$$[K]_{ce} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}, \quad [M]_{ce} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Die Blöcke der Matrizen $[K]_{ce}$, $[M]_{ce}$ werden folgendermaßen

$$\begin{aligned} [K_{11}] &= [V^S]^T [K_{bb}] [V^S] \\ [K_{22}] &= [K_{cc}]^T - [V^C]^T [K_{bc}] [V^C] \\ [M_{11}] &= [V^S]^T [M_{bb}] [V^S] \\ [M_{12}] &= -[V^S]^T [M_{bb}] [V^C] + [V^S]^T [M_{bc}] \\ [M_{22}] &= -[V^C]^T [M_{bb}] [V^C] + [M_{cb}] [V^C] + [V^C]^T [M_{bc}] + [M_{cc}] \end{aligned} \quad (15)$$

dargestellt. Nach der Choleski-Zerlegung der SE-Ausgangsstiffigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bc} \\ K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ R & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & R^T \\ 0 & L_1^T \end{bmatrix} \quad (16)$$

erhalten wir

$$[K_{bb}] = [L][D][L]^T, \quad [K_{bc}] = [L][D][R]^T, \quad [K_{cb}] = [R][D][L]^T \quad (17)$$

Unter Berücksichtigung von (17) bekommt man für die Gl. (9) und für die Matrix $[K_{22}]$ aus Gl. (15) folgende Form:

$$[V^C] = [L]^{-1} [R]^T, \quad [K_{cc}] = [K_{cc}] - [R]^T [D] [R] \quad (18)$$

Die Diagonalkoeffizienten für $[K_{11}]$ und $[M_{11}]$ erhält man zu:

$$K_j^n = [V^j]^T [M_{bb}] [V^j] \omega_j^2 = M_j \omega_j^2, \quad M_j^n = M_j, \quad j=1 \dots S \quad (19)$$

Tabelle 1: Die Eigenfrequenzen eines Stabes

| Номер част. | Метод | Значения соб. частот для моделей: | | | | | Точное решен. |
|----------------|---------|-----------------------------------|--------|--------|--------|--------|---------------|
| | | 2 x 2 | 2 x 3 | 2 x 4 | 2 x 5 | 2 x 10 | |
| P ₁ | МКФ x1ф | 322.0 | 317.19 | 317.17 | 317.09 | 317.9 | 318.6 |
| | МКФ x2ф | 317.4 | 317.19 | 317.17 | 317.09 | 317.9 | |
| | МКФ x3ф | 317.3 | 317.0 | 316.98 | 316.87 | 317.7 | |
| | МКФ x4ф | 317.3 | 317.0 | 316.98 | 316.87 | 317.7 | |
| | МКЭ | 317.3 | 316.9 | 316.9 | 316.89 | 316.8 | |
| P ₂ | МКФ x1ф | 322.1 | 317.21 | 317.19 | 317.09 | 317.95 | 318.6 |
| | МКФ x2ф | 317.5 | 317.21 | 317.17 | 317.09 | 317.94 | |
| | МКФ x3ф | 317.4 | 317.1 | 316.98 | 316.87 | 317.74 | |
| | МКФ x4ф | 317.4 | 317.1 | 316.98 | 316.87 | 317.7 | |
| | МКЭ | 317.3 | 316.9 | 316.9 | 316.89 | 316.8 | |
| P ₃ | МКФ x1ф | 1019.5 | 876.2 | 876.1 | 874.65 | 874.8 | 872.0 |
| | МКФ x2ф | 882.1 | 876.2 | 876.1 | 874.65 | 874.9 | |
| | МКФ x3ф | 881.6 | 876.3 | 874.15 | 873.65 | 873.8 | |
| | МКФ x4ф | 881.6 | 876.3 | 874.15 | 873.65 | 873.8 | |
| | МКЭ | 881.6 | 876.2 | 874.1 | 873.6 | 873.5 | |
| P ₄ | МКФ x1ф | 1019.5 | 876.3 | 876.2 | 874.65 | 874.85 | 872.0 |
| | МКФ x2ф | 882.2 | 876.0 | 876.1 | 874.65 | 874.8 | |
| | МКФ x3ф | 881.8 | 876.3 | 874.15 | 873.65 | 873.8 | |
| | МКФ x4ф | 881.9 | 876.3 | 874.15 | 873.65 | 873.87 | |
| | МКЭ | 881.67 | 876.2 | 874.1 | 873.6 | 873.5 | |
| P ₅ | МКФ x1ф | 1769.0 | 1765.3 | 1761.2 | 1759.4 | 1759.3 | 1711.7 |
| | МКФ x2ф | 1767.0 | 1765.3 | 1761.2 | 1759.4 | 1759.3 | |
| | МКФ x3ф | 1749.0 | 1727.1 | 1720.5 | 1717.9 | 1717.7 | |
| | МКФ x4ф | 1749.0 | 1727.1 | 1720.5 | 1717.9 | 1717.7 | |
| | МКЭ | 1749.0 | 1724.7 | 1716.5 | 1713.2 | 1712.5 | |

Таблица 3: Zahl der Freiheitsgrade für verschiedene SE-Stab-Platten-Modelle des Gehäuses

| ВИД МОДЕЛИ КОРПУСА | Кол-во КЭ | Кол-во СЭ | Кол-во ст. св. общие | Кол-во ст. св. суперузлов |
|---|-----------|-----------|----------------------|---------------------------|
| ПЛОСКОСТНАЯ | 152 | 24 | 414 | 114 |
| ИЗГИБНО - ПЛОСКОСТНАЯ | 153 | 24 | 538 | 185 |
| ИЗГИБНО - ПЛОСКОСТНАЯ С УТОЧНЕННОЙ ОПОРОЙ ПОДШ. | 224 | 25 | 905 | 297 |

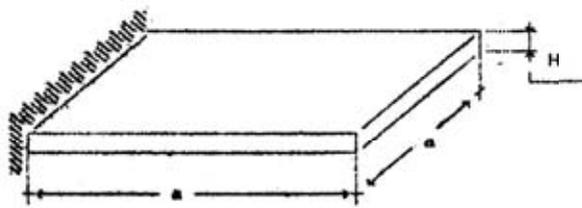
Таблица 4: Еigenfrequenzen für verschiedene SE-Stab-Platten-Modelle des Gehäuses

| Номер | Величины собственных частот | | | | | |
|---------|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------|
| | 1-я модель (конт. масс.) | 1-я модель (свооб. масс.) | 2-я модель (свооб. масс.) | 3-я модель (свооб. масс. вар. 1) | 3-я модель (свооб. масс. вар. 2) | 3-я модель (супр. масс.) |
| P_1^u | 100.1 | 63.0 | 60.0 | 57.1 | 51.1 | 41.8 |
| P_1^s | | | 62.7 | 59.4 | 53.5 | 44.8 |
| P_2^u | 124.3 | 65.1 | 68.7 | 71.4 | 62.7 | 59.2 |
| P_2^s | | | 73.3 | 74.3 | 64.8 | - |

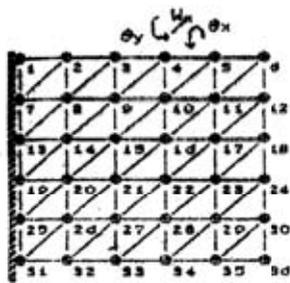
Таблица 5

| МЕТОД РАСЧЕТА | М С Э | МССФ (1Ф) | МССФ (2Ф) | МССФ (3Ф) |
|--------------------|-------|-----------|-----------|-----------|
| ВРЕМЯ СЧЕТА (СЕК.) | 193,5 | 9,72 | 9,92 | 9,96 |

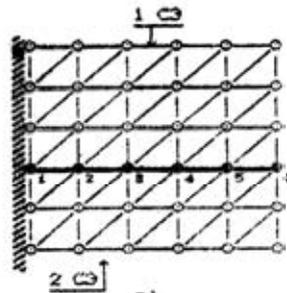
Bild 1: Die Superelement-Diskretisation einer Platten



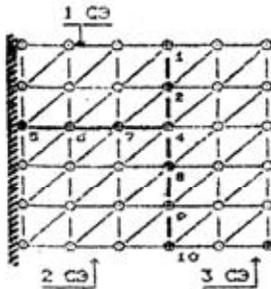
a)



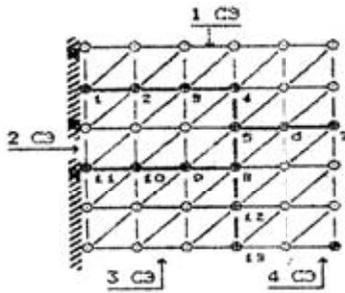
d)



b)



г)



д)

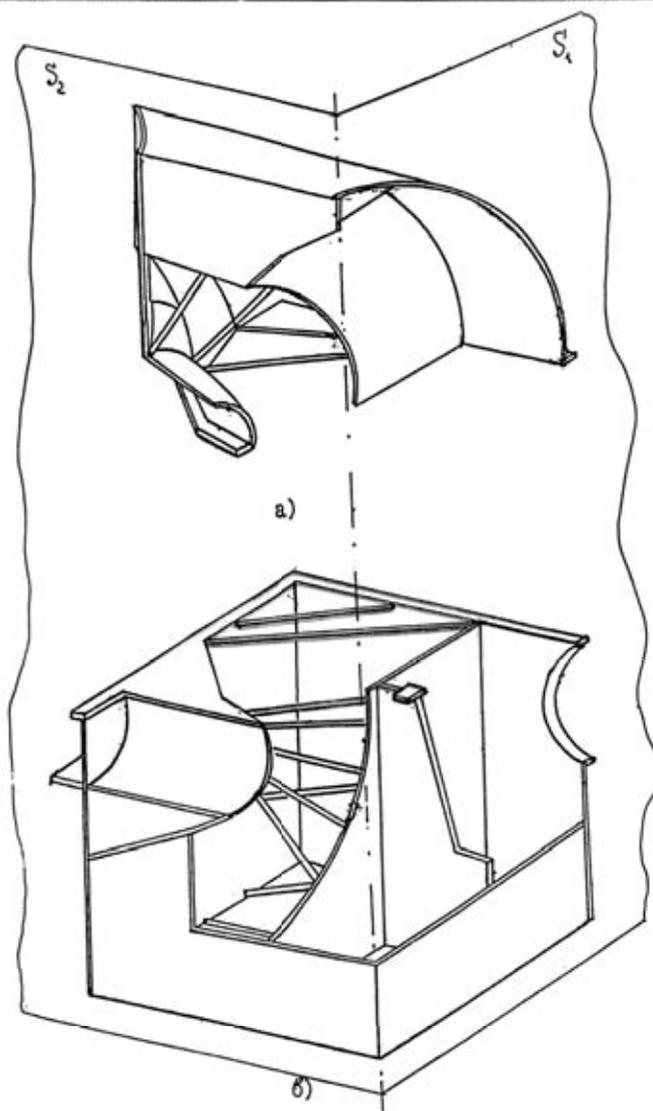


Bild 2: Das Gehäuse eines Niederdruckzylinders und der Gehäusedeckel
(1/4 der doppelt symmetrischen Konstruktion)

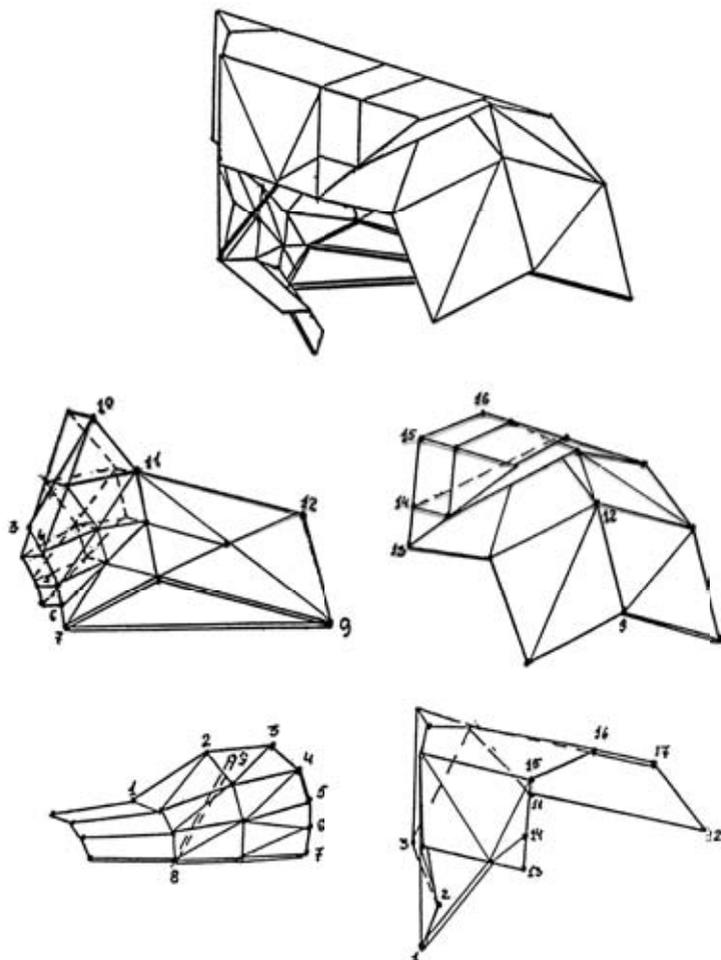


Bild 3: FE-modell eines Gehäusedeckels (1/4 der doppelt symmetrischen Konstruktion) und die Superelement-Typen

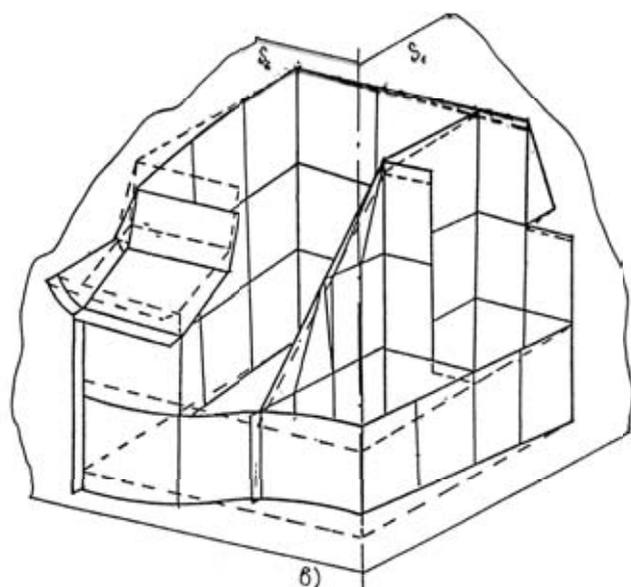
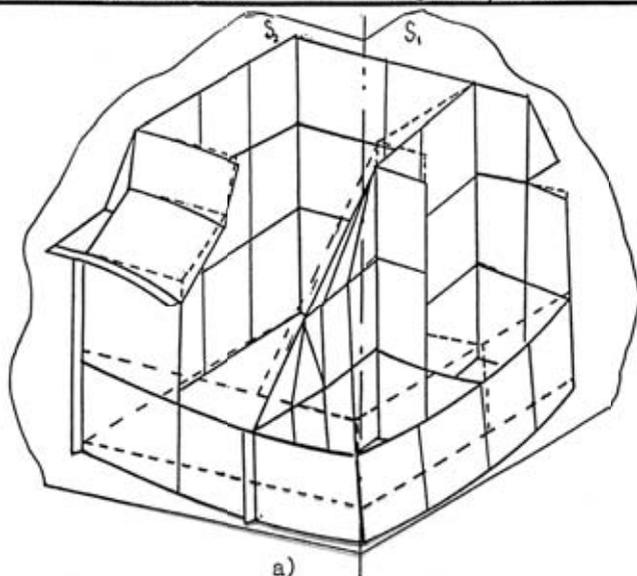


Bild 4: Eigenformen eines Gehäuses eines NDZ (ebenes Plattenmodell)

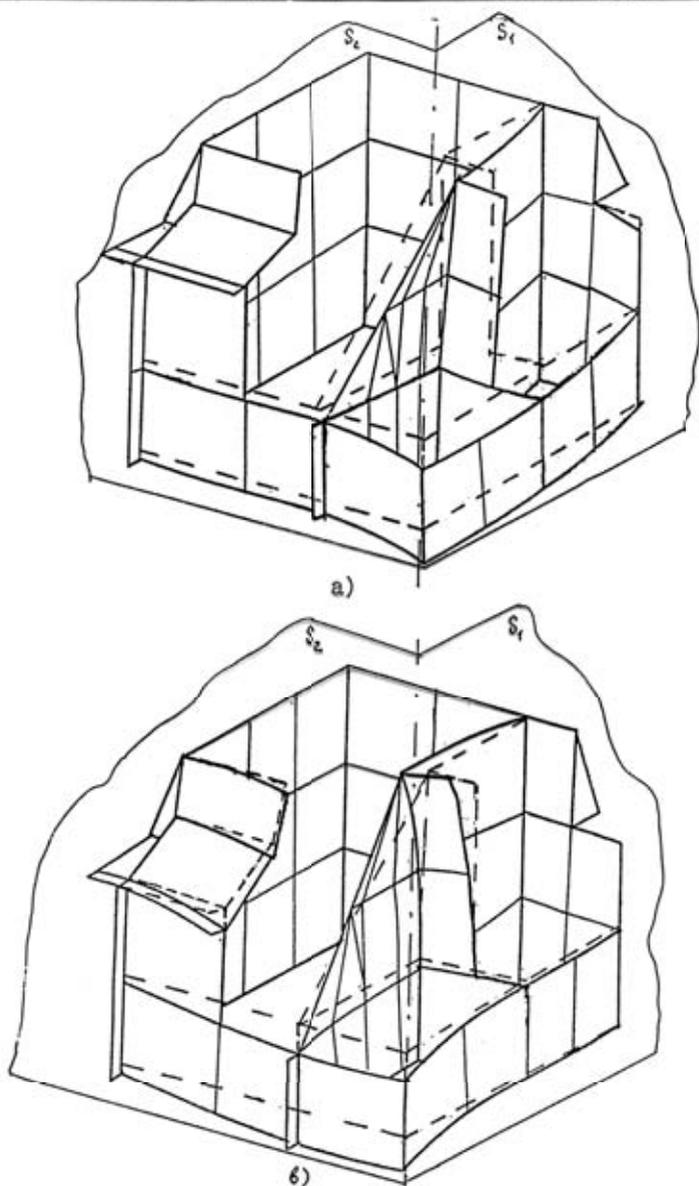


Bild 5: Eigenformen eines Gehäuses eines NDZ für das vollständige SE-Stab-Plattenmodell

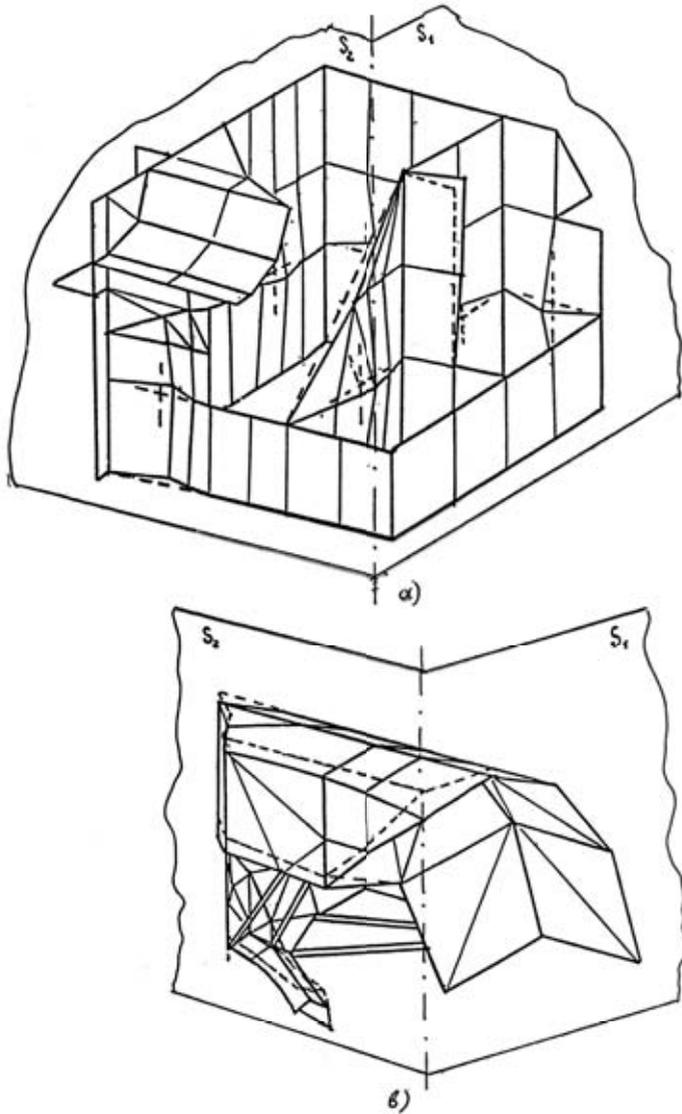


Bild 6: Eigenformen eines Gehäuses und eines Gehäusedeckels für das vollständige SE-Stab-Plattenmodell

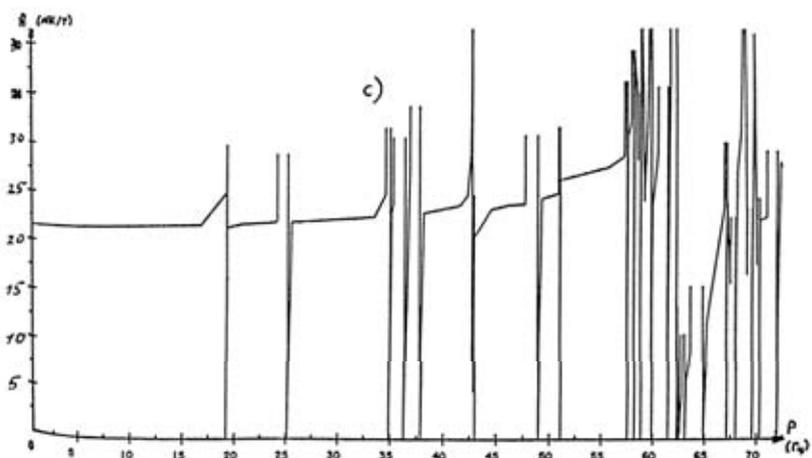
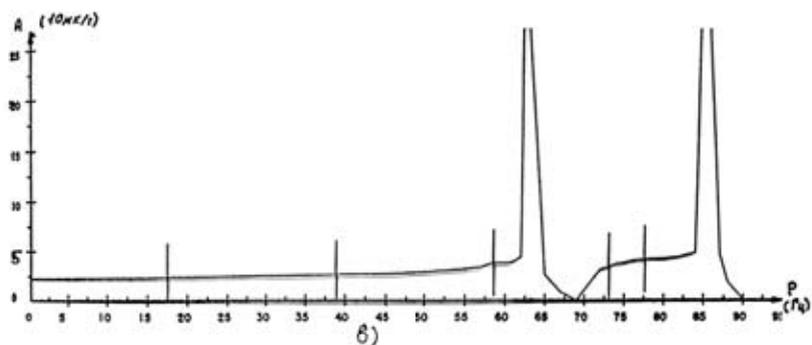
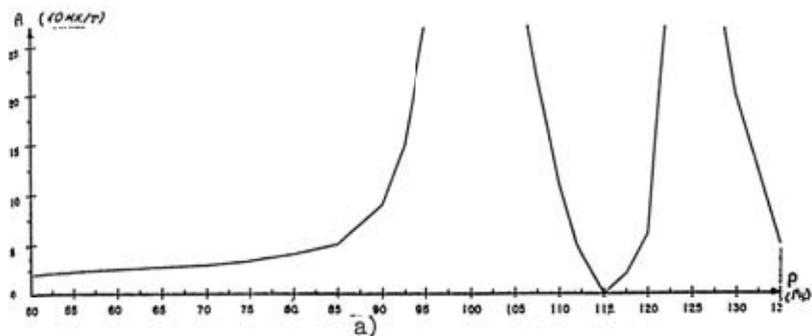


Bild 7: Amplitudenfrequenzgänge für verschiedene SE-Stab-Platten-
Modelle des Gehäuses eines NDZ

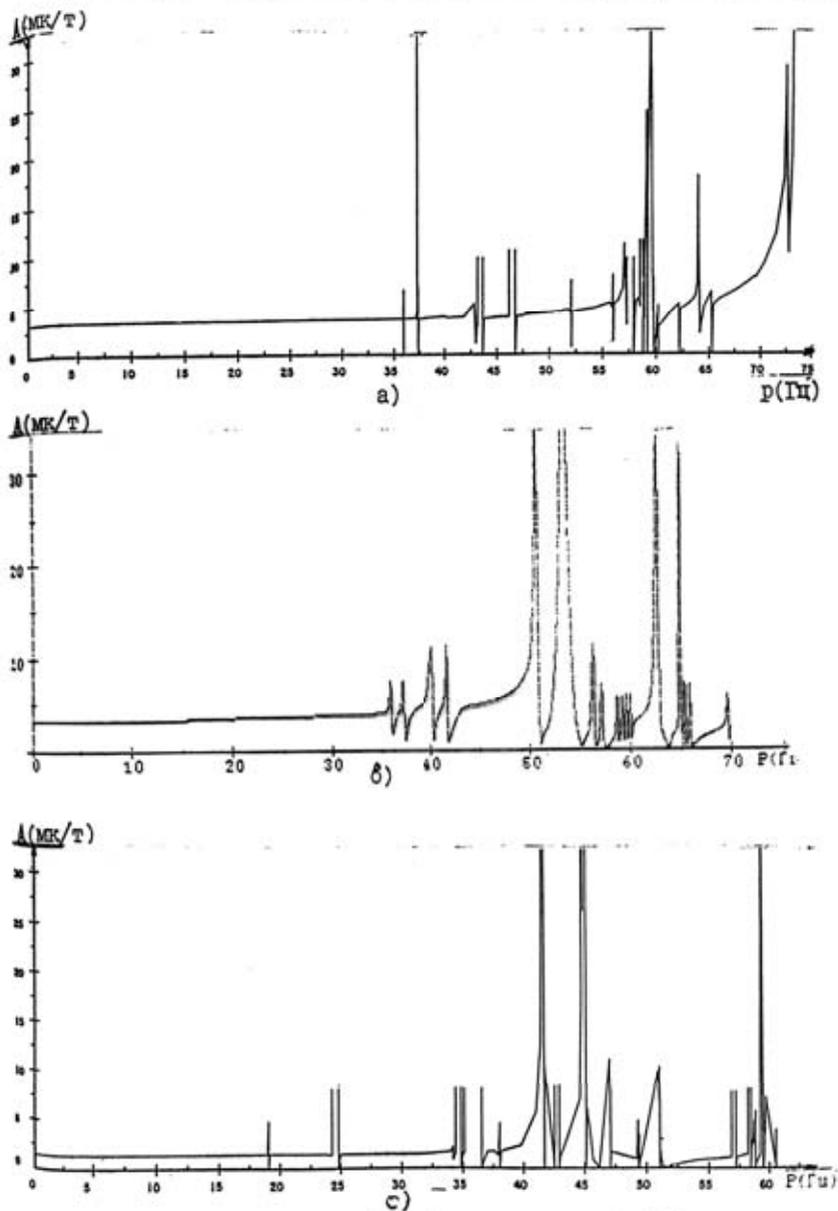


Bild 8: Amplitudenfrequenzgänge für verschiedene SE-Stab-Platten-Modelle des Gehäuses eines NDZ

Für ein System mit N Superelementen werden die Eigenschwingungsgleichungen folgendermaßen

$$\left[[K^C] - p^2 [M^C] \right] \{ Q_i^S \dots Q_N^S, x_{CY} \}^T = 0 \quad (20)$$

mit N - Zahl der Superelemente;
 x_{CY} - Koppelkoordinaten der Superelemente;
 Q_i^S - verallgemeinerte Koordinaten für das i-te Superelement.
 dargestellt. Endgültig erhalten wir für die Steifigkeits- und Massenmatrix

$$[K^C] = \begin{bmatrix} K_{11}^i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & K_{11}^i & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & K_{22}^c \end{bmatrix}, \quad [M^C] = \begin{bmatrix} M_{11}^i & \cdot & 0 & \\ \cdot & \cdot & 0 & M_{12}^c \\ 0 & 0 & M_{11}^i & \\ & M_{21}^c & & M_{22}^c \end{bmatrix} \quad (21)$$

Hier muß man für die Matrixblöcke K_{22}^c und M_{22}^c die bekannte Summierungsprozedur durchführen.

Die positiven Ergebnisse der numerischen Überprüfung der Genauigkeit der Modalsynthesemethode zeigen die Tabellen 1 und 2. Die Testberechnungen wurden für verschiedene Typen der Superelementdiskretisierung eines Stabes und einer Platte sowie unter Berücksichtigung der verschiedenen Zahlen der Eigenformen der Superelemente durchgeführt. Das Bild 1 zeigt Varianten der Superelementdiskretisierung einer Platte bei diesen Berechnungen.

In den Bildern 2 und 3 sind das Gehäuse des verbesserten NDZ und der Gehäusedeckel sowie die Superelementtypen dieses Deckels dargestellt.

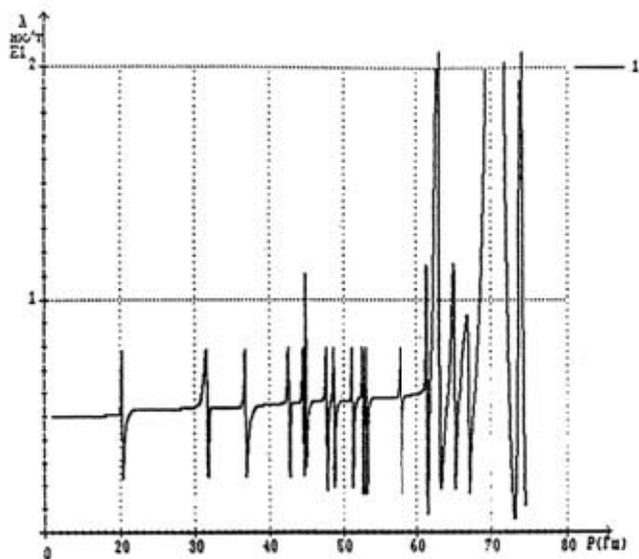
Es wurden drei Modelle des Gehäuses des NDZ betrachtet:

- 1) ein Modell der ebenen Plattenschwingung (Plattenmodell)
- 2) ein Scheiben-Plattenmodell
- 3) ein Scheiben-Plattenmodell mit präziser FE-Modellierung der Stützen der Lager.

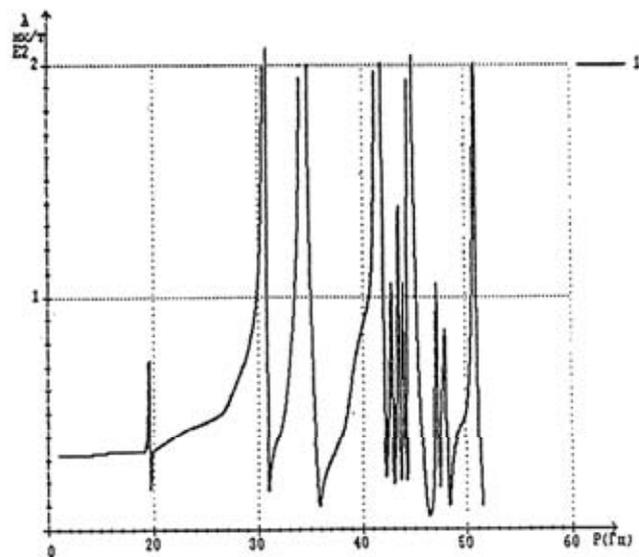
In den Varianten 1) und 2) wurde die Stütze des Lagers als ein räumliches System aus starren Stäben und Platten modelliert. Für alle drei Modelle wurden der Deckel, der Kondensator und das Innengehäuse als diskrete Massen berücksichtigt. Die Amplitudenfrequenzgänge in den Bildern 7, 8 wurden für Rotorunwuchten für einen Punkt auf den Stützen des Lagers für folgende Modelle berechnet:

- Bild 7a: Modell 1) bei gelenkiger Lagerung aller Konsolen des NDZ;
- Bild 7b: Modell 1) bei Einspannung aller Konsolen des NDZ;
- Bild 7c: Modell 2) bei gelenkiger Lagerung aller Konsolen des NDZ;
- Bild 8a: Modell 3) bei gelenkiger Lagerung aller Konsolen des NDZ;
- Bild 8b: Modell 3) bei gelenkiger Lagerung von 2 Konsolen des NDZ;
- Bild 8c: Modell 3) unter Berücksichtigung der Steifigkeit des Fundaments für die Randbedingungen der Konsolen.

Die Ergebnisse der Berechnungen der Eigenfrequenzen und der Eigenformen sind in der Tabelle 4 und in den Bildern 4 - 6 dargestellt. Für das Modell 1) wurden die globalen „Plattenfrequenzen“ p_1, p_2 erhalten, die analog zu den entsprechenden Eigenfrequenzen des „Wabenmodells“ sind (Bild 4a, b).



a)



b)

Bild 9: Amplitudenfrequenzgänge für SE-Modelle des Gehäusedeckels

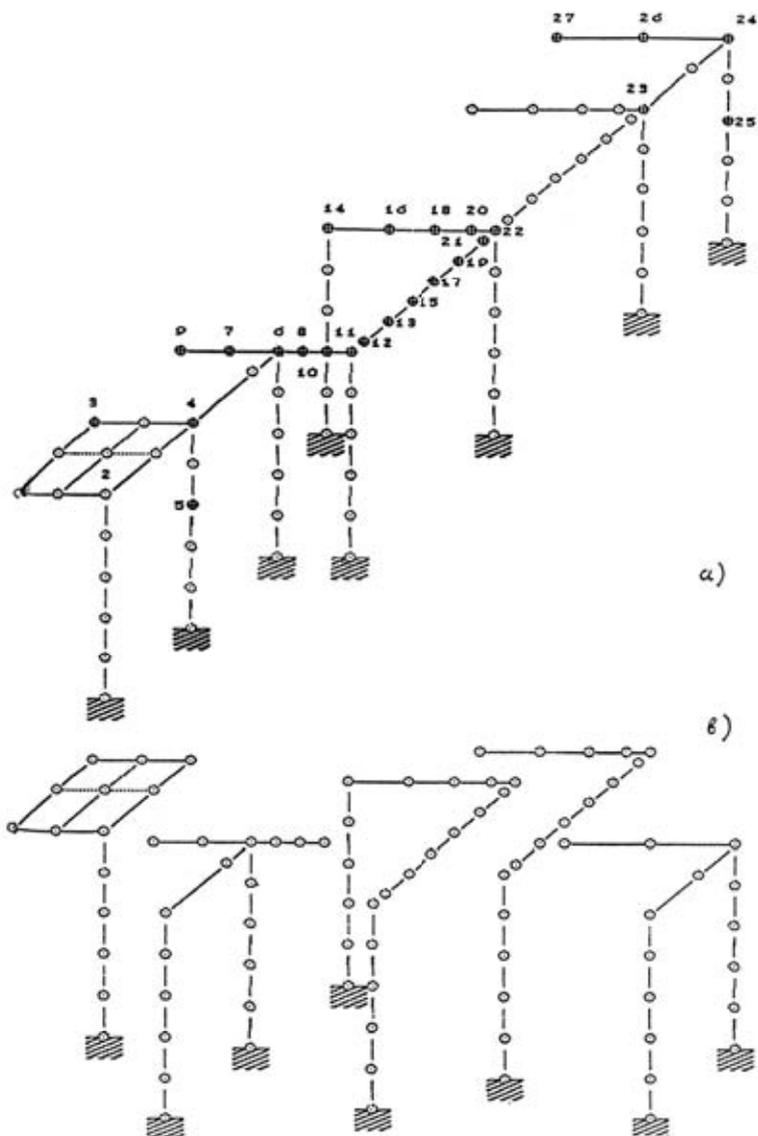
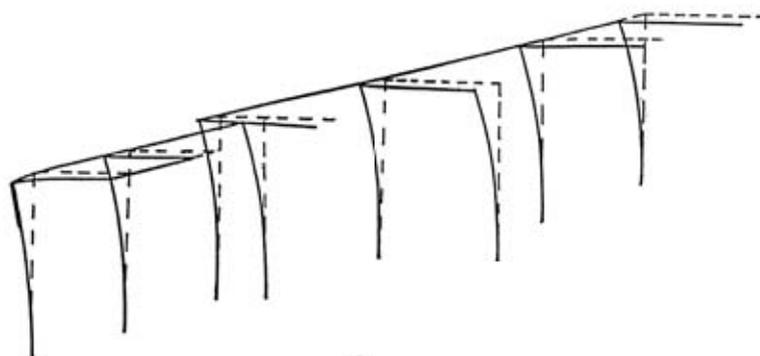
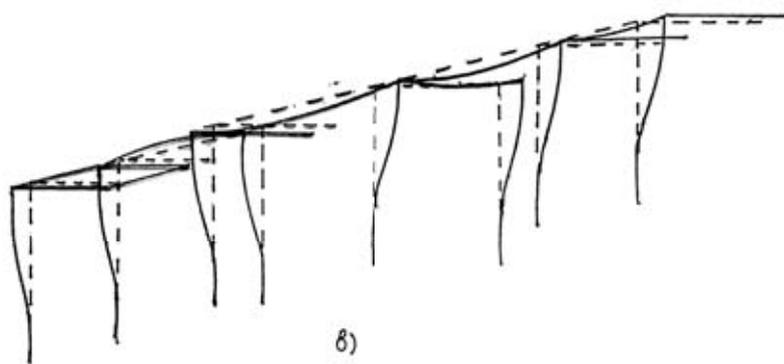


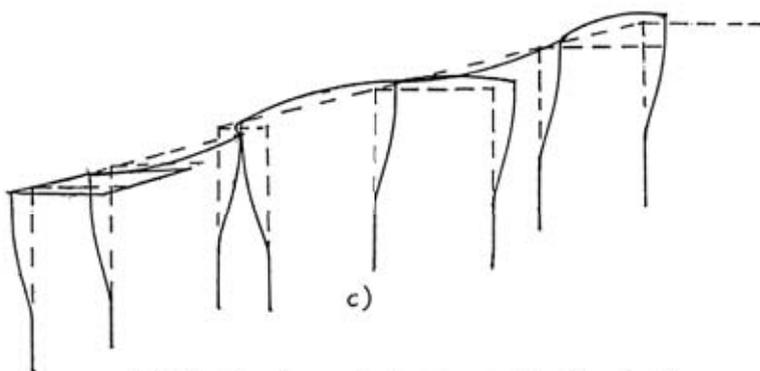
Bild 10: SE-Stabmodell des Fundaments einer Dampfturbine(1/2 der symmetrischen Konstruktion) und Superelement-Typen



a)



b)



c)

Bild 11: Eigenformen des Fundaments einer Dampfturbine

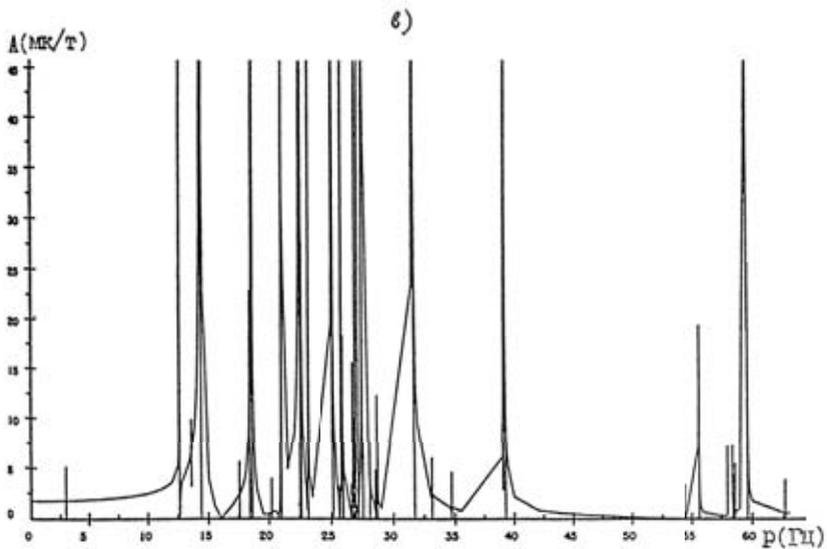
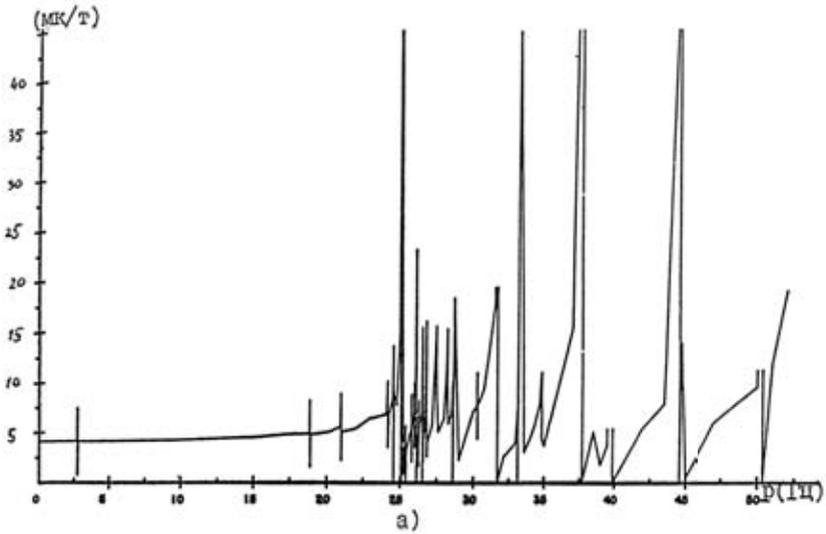


Bild 12: Amplitudenfrequenzgänge für SE-Stab-Modelle des Fundaments einer Turbine

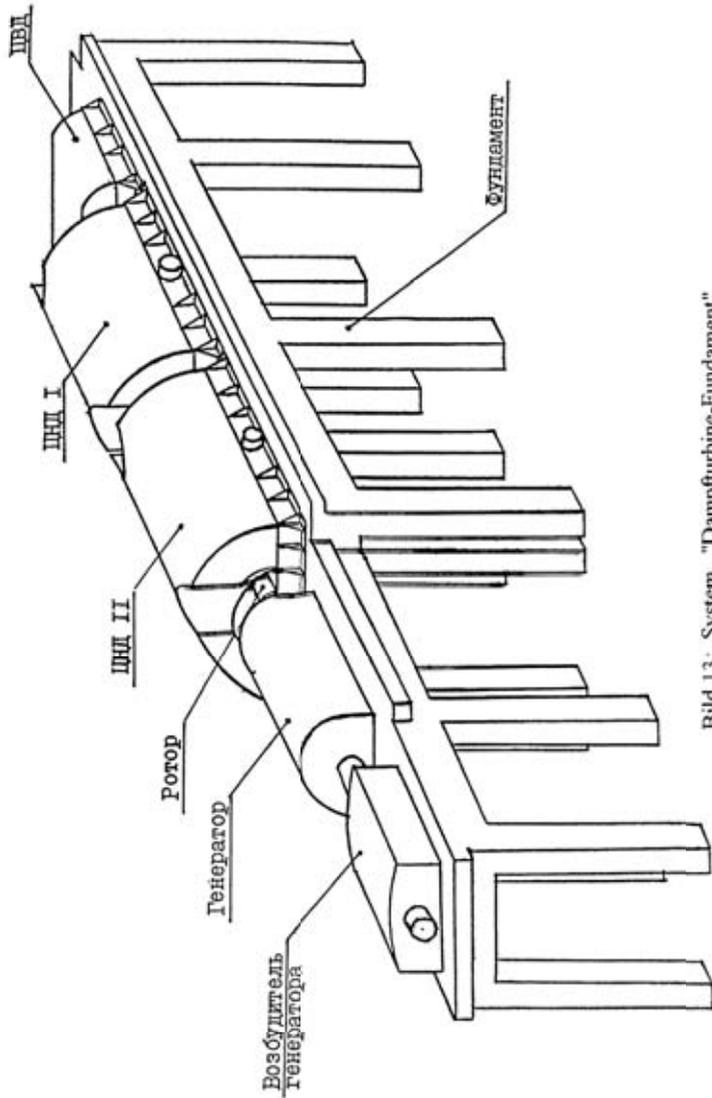


Bild 13: System "Dampfturbine-Fundament"

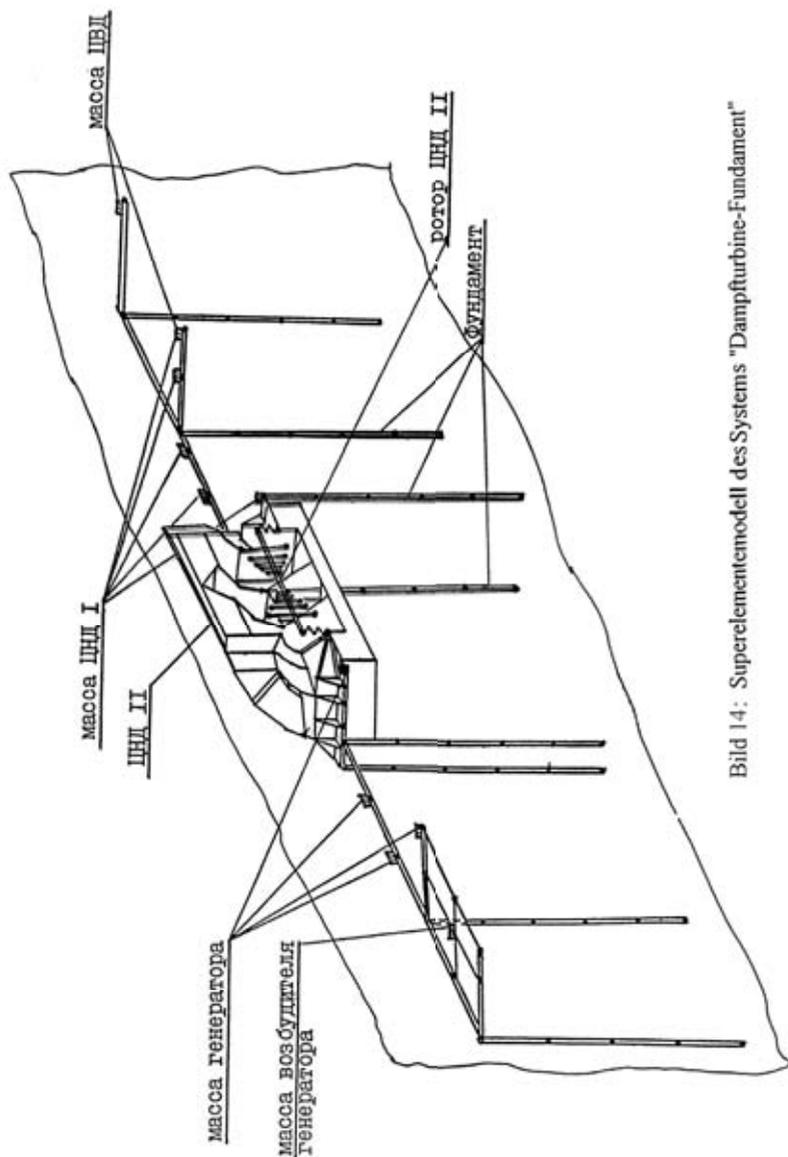


Bild 14: Superelementmodell des Systems "Dampfurbine-Fundament"

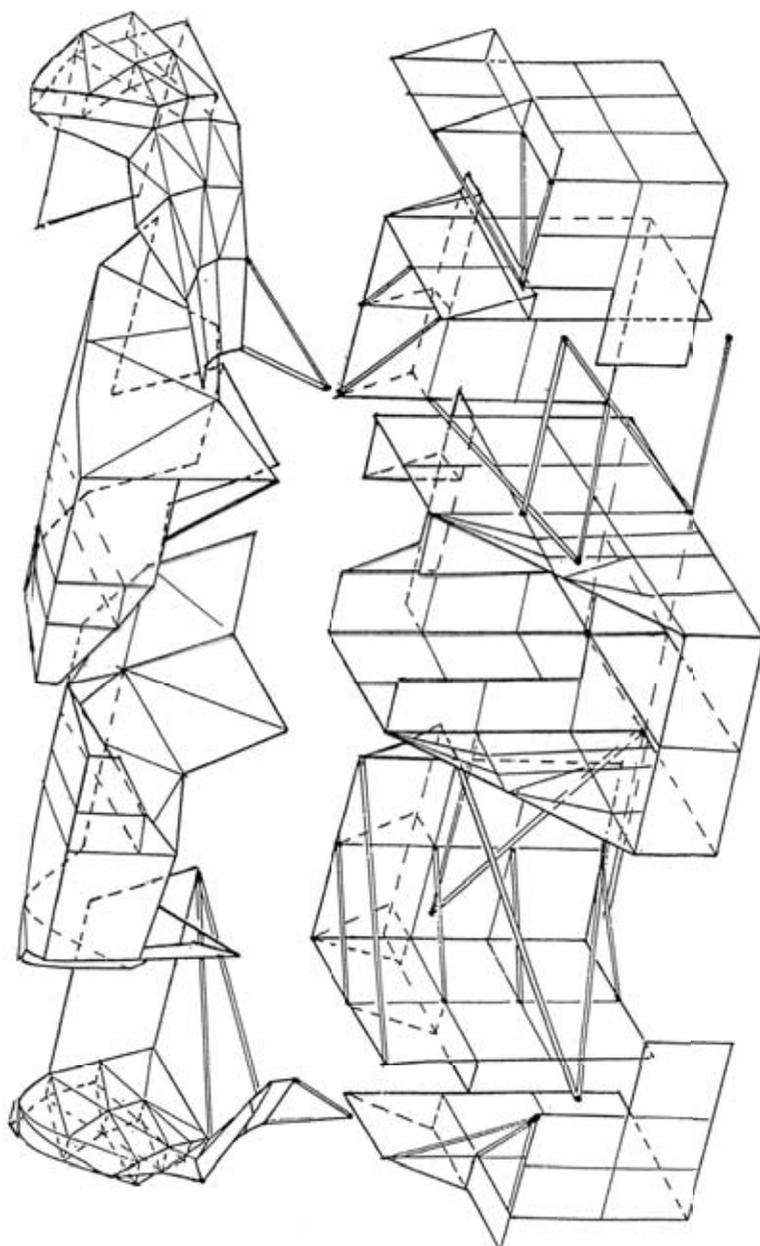


Bild 15: Superelement-Typen des Gehäuses und des Gehäusedeckels
(1/2 der symmetrischen Konstruktion) für Berechnung des Systems
"Dampfturbine-Fundament"

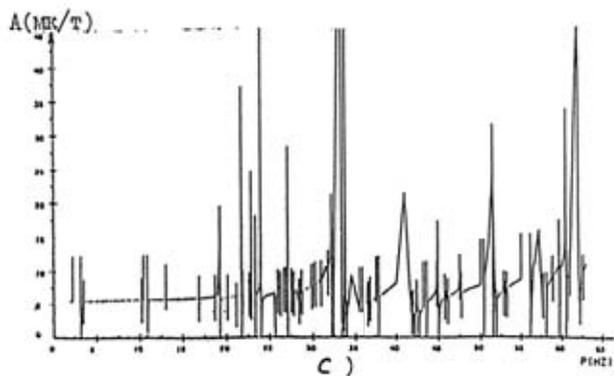
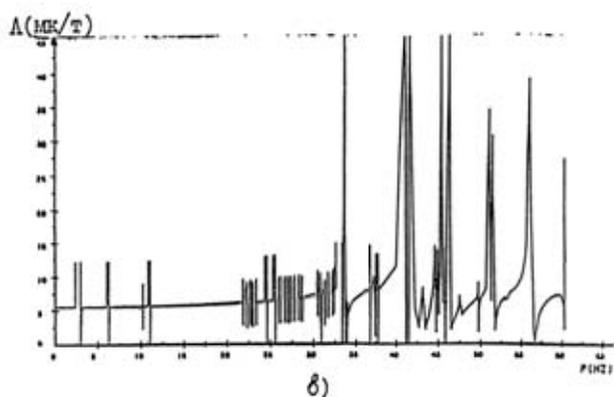
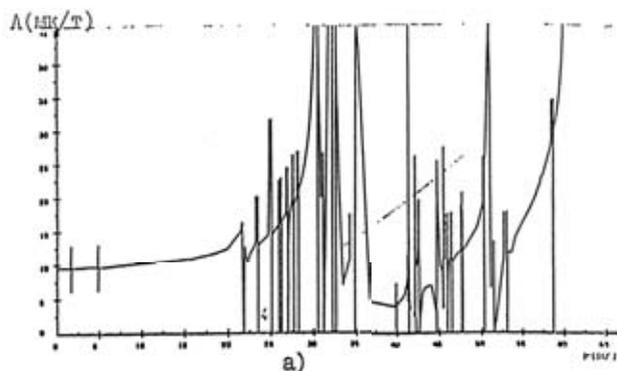


Bild 16: Amplitudenfrequenzgänge für SE-Modell "Dampfturbine-Fundament"

Für das Modell 2) existieren im selben Frequenzbereich 2 Paare von Eigenfrequenzen p_1^a, p_1^b und p_2^a, p_2^b . Die Eigenformen von beiden Paaren entsprechen den Eigenformen für p_1 und p_2 . Der Unterschied besteht darin, daß die Richtung der Biegeverschiebung der zentralen Stützplatte des Lagers für p_1^a und p_1^b entgegengesetzt ist (Bild 5a, b).

Auf diese Weise erhält man hier die sogenannte „Aufspaltung“ der „Plattenfrequenzen“ im Spektrum des kompletten Scheiben-Platten-Modells des Gehäuses des NDZ.

Das Bild 6a zeigt eine typische Scheibeneigenform. Die entsprechenden Scheibeneigenfrequenzen kann man als zahlreiche schmale Spitzen der Amplitudenfrequenzgänge in den Bildern 7b, c und 8a, b, c erkennen.

Die Amplitudenfrequenzgänge für das Deckelmodell wurden bei Einspannung (Bild 9a) und bei gelenkiger Lagerung (Bild 9b) am Übergang zum Gehäuse erhalten.

Das Bild 6a zeigt die niedrigste Eigenform des Deckels. Die Berechnungen der Eigenfrequenzen zeigen, daß die Nachgiebigkeit des Deckels wesentlich größer ist als die Nachgiebigkeit des Gehäuses.

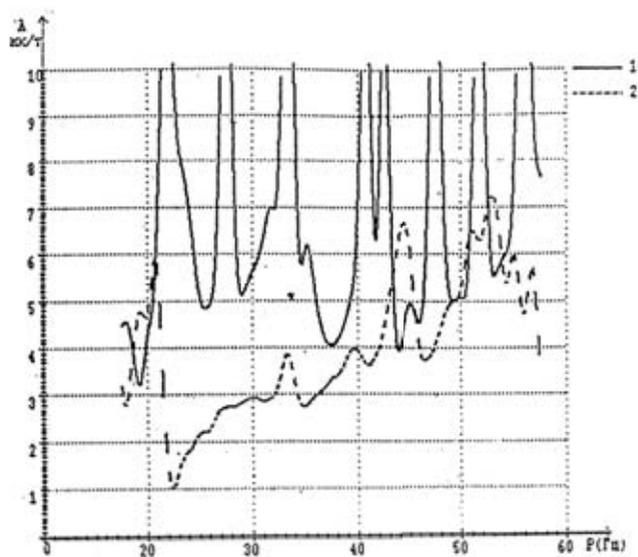
Es wurde ein Vergleich der Effektivität des Modalsyntheseverfahrens (MSV) und der SE-Kondensation bei der Berechnung der Eigenfrequenzen und der erzwungenen Schwingungen des Turbinenfundaments durchgeführt. Das Bild 10 zeigt das SE-Stabmodell des Fundaments einer Dampfturbine und die Superelement-Typen dieses Modells. In der Tabelle 6 findet man die Eigenfrequenzen des Fundaments für verschiedene Berechnungsvarianten. Man kann eine wesentliche Verminderung der Rechenzeiten für das MSV im Vergleich mit der SE-Kondensation und eine gute Genauigkeit des MSV unter Berücksichtigung der geringen Zahl der SE-Eigenform (1,2 und 3 Eigenformen für jedes SE in der Tabelle 6) konstatieren. Das Bild 11 zeigt die niedrigste Fundamenteigenform mit globalen Achsverschiebungen (Bild 11a) und zwei Eigenformen mit überwiegend Biegeverschiebungen der Stäbe des Fundamentmodells (Bild 11 b,c). Das Bild 12 zeigt die Amplitudenfrequenzgänge für einzelne SE-Stabmodelle des Fundaments (Bild 12 a) und für das Modell des Fundaments unter Berücksichtigung der diskreten Massen der Turbinenbauteile (Bild 12 b). Im letzten Fall (erste Stufe der Modellierung des Systems „Dampfturbine-Fundament“) hat die komplette Konstruktion keine Resonanzen im Arbeitsbereich um 50 Hz.

Es wurden Berechnungen der Eigenfrequenzen und -formen sowie der erzwungenen Schwingungen für verschiedene Modelle des Systems „Dampfturbine-Fundament“ durchgeführt. Die Bilder 13 und 14 zeigen ein Schema und ein SE-Modell dieses Systems. Im Bild 15 sind die Superelementtypen für die Analyse dieses Systems dargestellt.

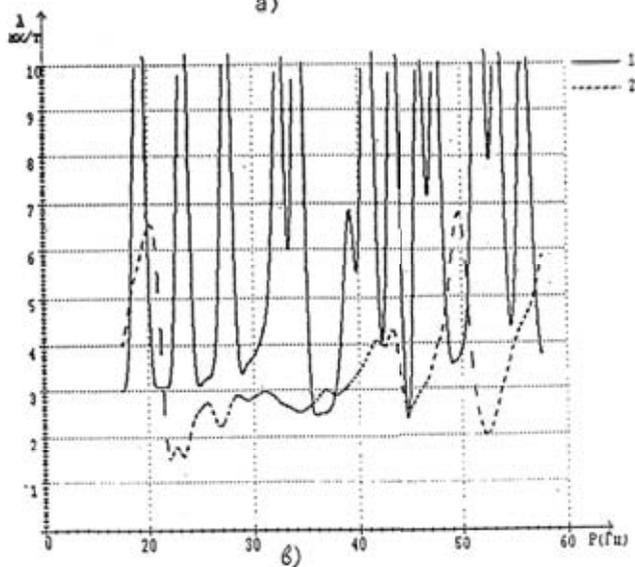
Für die Untersuchung des Einflusses der einzelnen Bauteile auf die Systemdynamik wurde die Berechnung des Systems mit Hilfe folgender Modelle realisiert:

- 1) Fundament;
- 2) Fundament - Gehäuse des NDZ;
- 3) Fundament - Gehäuse des NDZ - Deckel des Gehäuses;
- 4) Fundament - Gehäuse des NDZ - Deckel - diskrete Massen des Generators, des Generatorerregers und des Hochdruckzylinders;
- 5) Fundament - diskrete Massen der gesamten Ausrüstung der Turbine.

Die Bilder 16 a, b, c zeigen die Amplitudenfrequenzgänge für die Modelle 2), 3) und 4). Die entsprechenden Ergebnisse für die Modelle 1) und 5) wurden bereits in den Bildern 12 a, b dargestellt. Der Vergleich der Amplitudenfrequenzgänge für die Berechnung des kompletten Systems (Bild 17 a,b, Kurve 1) mit experimentellen Ergebnissen an der realen Turbine (Bild 17 a, b, Kurve 2) für zwei verschiedene Punkte auf den Stützlagern demonstriert die qualitative Übereinstimmung der Ergebnisse.



a)



b)

Bild 17: Amplitudenfrequenzgänge für SE-Modell "Dampfturbine-Fundament"

СОДЕРЖАНИЕ

- I. *С. К. Шелковый, доцент, канд. техн. наук.* О научном и образовательном сотрудничестве кафедры динамики и прочности машин НТУ «ХПИ» с техническими университетами Германии 3
- II. *С. К. Шелковый, доцент, канд. техн. наук.* О собственных колебаниях многократно симметричных пластинчатых систем с произвольным порядком симметрии 14
- III. *И. Альтенбах, проф., д-р техн. наук, В. Киссинг, д-р техн. наук, С. К. Шелковый, доцент, канд. техн. наук.* Конечные элементы полубезмоментной теории оболочек для тонкостенных замкнутых непризматических конструкций. 21
- IV. *S. Schelkovy, Dozent Dr.-Ing., A. Stepchenko, Dr.-Ing.* Dynamische Analyse des Systems «Dampfturbine-Fundament» auf Grundlage des Modalsynteseverfahrens und Superelementenkondensation 26