

Г.И. ЛЬВОВ, докт. техн. наук, зав. каф. ДПМ,
Н.Н. ТКАЧУК, асп. каф. ДПМ, НТУ „ХПИ”

АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ: ВАРИАНТ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл пропонується застосувати метод граничних інтегральних рівнянь. Особливістю запропонованої реалізації методу є аналітичний спосіб обчислення елементів матриці коефіцієнтів впливу для підобластей трикутної форми. Поверхня можливого контакту розбивається на ці підобласті регулярною сіткою. Визначення області контакту та розподілу контактної тиску здійснюється методом ітерацій.

An application of boundary integral equations method is offered for analysis of contact interaction of complex shaped bodies. Analytical procedure for evaluation of influence coefficients matrix in triangular subdomains distinguishes the proposed realization of the method. Probable contact area is divided into these subdomains by a regular mesh. Resultant contact spot and contact pressure distribution is achieved by means of an iterative algorithm.

Введение. При исследовании контактного взаимодействия сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями [1-3] возникает необходимость проведения многовариантного решения задач анализа при варьировании формы и размеров взаимодействующих тел. Конкурирующими требованиями при этом выступают оперативность и точность решения единичной задачи анализа, которые в значительной мере определяются методом, выбранным для ее решения. Крайними вариантами выбора являются, например, метод Герца и метод конечных элементов (МКЭ). Первый значительно сужает множество тел, для которых он дает приемлемую точность решения, однако позволяет проводить достаточно оперативную оценку контактных давлений и контактных площадок. Второй применим и обеспечивает высокую точность практически для тел конечных размеров любой формы, однако требует больших затрат времени на формирование численных моделей, особенно для контакта сложнопрофильных тел. Компромиссным с этой точки зрения представляется метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). Он свободен от требований теории Герца о первоначальном точечном контакте тел и о представлении локального зазора в сопряжении тел в виде положительно определенной квадратичной формы от координат, задающих точки общей касательной плоскости. Этим существенно расширяется множество тел, доступных для исследования их контактного взаимодействия. С другой стороны, в отличие от МКЭ, он оперирует с существенно меньшими по размерам дискретными моделями, поскольку снижает на единицу физическую размерность при постановке задачи. Таким образом, для многих случаев исследуемого контактного взаимодействия сложнопрофильных тел МГИУ является альтернативой методу Герца и МКЭ, сочетая преимущества первого и второго и будучи лишен в значительной мере их недостатков, и поэтому представляет интерес при решении контактных задач.

Целью данной статьи является постановка, формулировка и реализация одного из вариантов метода граничных интегральных уравнений для исследования контактного взаимодействия сложнопрофильных тел.

Кинематическая модель контакта. При исследовании контакта тел несогласованной формы в отсутствие трения в первом приближении рассматриваются перемещения точек поверхностей и зазор между ними только в одном направлении. На этом основании выводятся кинематические соотношения контакта. Такое упрощение модели нормального контакта основано на пренебрежении изменением направления векторов нормали поверхностей взаимодействующих тел [4, 5]. Примером является теория Герца, в рамках которой нормальный зазор между поверхностями приближенно представляется квадратичной формой в локальной системе координат, связанной с точкой первоначального касания тел.

В более общем случае приходится учитывать точную форму зазора между телами, для чего вводится система координат, центр которой (точку O) традиционно располагают на линии действия прижимающей силы P (рис. 1). Оси z_1 и z_2 для удобства имеют направление вовнутрь тела (здесь и далее нижний индекс соответствует номеру тела, к которому относится обозначение). В этом случае уравнения каждой из поверхностей можно записать в виде $z_i = z_i(x, y)$, $i = 1, 2$, а зазор соответственно вычисляется как

$$h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y). \quad (1)$$

В деформированном состоянии под действием силы P оба тела приводятся в контакт по некоторой площадке. При этом перемещение произвольной точки границы S_i каждого из тел в направлении оси z складывается из смещения δ_i , величина которого отсчитывается в направлении, обратном положительному для оси Oz_i , и отклонения u_{z_i} от первоначальной формы соответствующей поверхности (рис. 2). Первая компонента представляет собой сближение тел и не связана с их деформированием, а вторая отвечает деформациям, вызванным действием искомого контактного давления. Данное разложение традиционно для задач о взаимодействии упругого

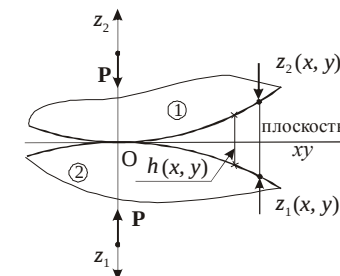


Рис. 1. Представление локального зазора между контактирующими телами

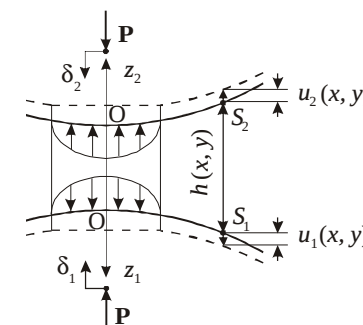


Рис. 2. Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

полупространства с гладким штампом, в которых компонентами сближения δ_i являются перемещения бесконечно удаленной точки полупространства или всего жесткого штампа как абсолютно твердого тела. Такое представление вертикальных перемещений в пренебрежении поперечными тангенциальными в плоскости Оху приводит к следующей общепринятой записи нелинейных соотношений для нормального контакта:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (2)$$

Модель деформирования упругого полупространства. Приведенная выше кинематическая модель контакта хорошо сочетается с моделью упругого поведения твердых тел при приложении контактного давления, основанной на том приближении, что перемещения точек их поверхности в зоне контакта и локальные деформации эквивалентны перемещениям и деформациям упругого полупространства под действием нормального распределенного усилия.

Для упругого полупространства известно интегральное соотношение, устанавливающее связь между действующим давлением и нормальными перемещениями точек его границы (рис. 3):

$$u_z(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta, \quad (3)$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

Поскольку распределения контактных давлений, действующих на границу обоих взаимодействующих тел, совпадают, то в соотношениях (2) представляется возможным выразить неизвестные перемещения $u_{z_1}(x, y)$ и $u_{z_2}(x, y)$ исключительно через единственную функцию распределения давления, которая в дальнейшем будет искомой:

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left(\frac{1-\nu_1^2}{p E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{p E_2} \right) \iint_S \frac{p(x, h)}{r} dx dh = \frac{1}{p E^*} \iint_S \frac{p(x, h)}{r} dx dh. \quad (4)$$

Здесь $\nu_i, E_i, i=1, 2$ – упругие параметры каждого из контактирующих тел. Контактная площадка S и распределение давлений $p(\xi, \eta)$, присутствующие в правой части равенства, являются неизвестными.

Численный подход. Для определения контактной площадки и распределения давлений в случае сложной геометрии контактирующих тел, когда контактная задача не имеет аналитического решения в замкнутой форме, привлекают различные численные методы. Среди них для решения задач негерцевского нормального

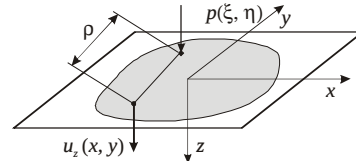


Рис. 3. Перемещение границы полупространства под действием давления

контакта упругих тел рассмотрим те, которые основаны на замене непрерывных распределений давления набором элементов. Они различаются между собой типом аппроксимации неизвестных контактных давлений и способом учета граничных условий.

Здесь будет использовано кусочно-линейное представление распределения давления, которому отвечают непрерывные и дифференцируемые поверхностные смещения. Искомая функция контактных давлений приближается суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений, вершины которых расположены в узлах регулярной сети шага c , состоящей из равносторонних треугольников (рис. 4), и при этом полностью определяется дискретным набором узловых значений давлений p_n :

$$p(\xi, \eta) \equiv \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n. \quad (5)$$

Для нахождения величин усилий в узлах сетки, наилучшим способом удовлетворяющих граничным условиям, применимы два следующих подхода: *прямой метод (или метод коллокаций)*, в котором система разрешающих соотношений получается путем записи условий (2) для заданного набора точек коллокации [4, 5]; *вариационный метод (принцип Калькера)*, в рамках которого за действительные принимаются узловые значения контактных давлений, минимизирующие функционал энергии [6].

Применение каждого из вышеуказанных методов требует умения вычислять нормальные смещения (4) для используемого типа аппроксимирующих давлений. Очевидно, что такая задача эквивалентна определению перемещений u_z , отвечающих каждой из базисных нагрузок. Для пирамидальных элементов (рис. 4, б) в силу их однородности достаточно вычислить значения поверхностных смещений для одной единичной пирамиды с единичными сторонами как

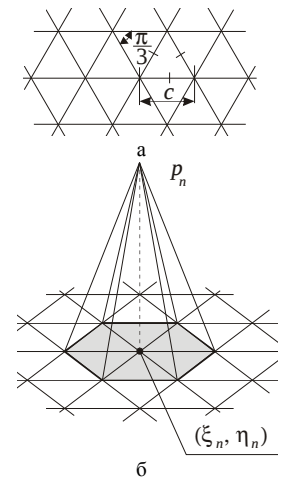


Рис. 4. Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi E^*} \sum_m \iint_{S_m} \frac{\hat{p}(\xi - \xi_m, \eta - \eta_m) \cdot p_m}{\rho(x, y, \xi, \eta)} d\xi d\eta \Big|_{\substack{\xi = c\tilde{\xi}, \eta = c\tilde{\eta} \\ x = c\tilde{x}, y = c\tilde{y}}} = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_m \iint_{S_m^{(1)}} \frac{\hat{p}^{(1)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot p_m}{\rho(\tilde{x} - \tilde{\xi}_m, \tilde{y} - \tilde{\eta}_m, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = \frac{1}{\pi E^*} c \sum_m w(\tilde{x} - \tilde{\xi}_m, \tilde{y} - \tilde{\eta}_m),$$

где $S = \bigcup_m S_m$; S_m – шестиугольная область пирамидального элемента с верши-

ной в узле (ξ_m, η_m) ; $S^{(1)}$ – шестиугольная область с единичными сторонами; $\hat{p}^{(1)}$ – единичное пирамидальное распределение на ней, а

$$w(x, y) = \sum_m \iint_{(S^{(1)})} \frac{\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta \quad (7)$$

является „шаблоном” формы распределения перемещений для единичного пирамидального элемента.

Можно предложить простой алгоритм вычисления значений этой функции как в отдельных точках [4], так и во всей плоскости [7]. Ниже предлагается один частный способ вычисления, легко численно реализуемый.

Рассмотрим произвольный треугольник $\Delta A_1 A_2 A_3$ и интегралы типа

$$\iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 \iint_{\Delta_i} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \quad (8)$$

Треугольники Δ_i образованы точкой $B(x, y)$ и двумя вершинами исходного треугольника (рис. 5) и связаны с определенной ориентацией: если пересечение Δ_i с $\Delta A_1 A_2 A_3$ не пусто, то ориентация положительна, в противном случае – отрицательна. Этим определяются знаки интегралов в правой части равенства (8), так что разложение исходного интеграла в виде суммы трех остается справедливым и в случае, когда т. B лежит за пределами $\Delta A_1 A_2 A_3$.

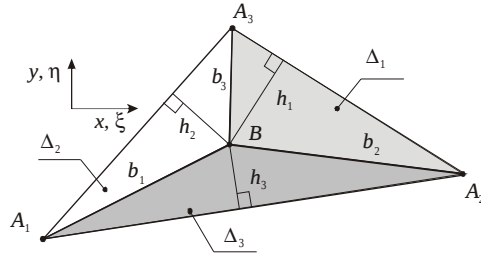


Рис. 5. Треугольники Δ_i

Далее будут рассмотрены распределения $p(\xi, \eta)$ вида:

$$\{p(\xi, \eta) = 1; p(\xi, \eta) = x - \xi; p(\xi, \eta) = y - \eta, \quad (9)$$

комбинацией которых определяется любая линейно распределенная на $\Delta A_1 A_2 A_3$ нагрузка.

Для отдельного треугольника Δ_i с учетом ориентации отрезков рассмотрим следующие углы (рис. 6):

$$\varepsilon_{2i-1} = \angle(\mathbf{h}_i, \mathbf{b}_{i+1}); \quad \varepsilon_{2i} = \angle(\mathbf{h}_i, \mathbf{b}_{i+2}); \quad \theta_i = \angle(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i). \quad (10)$$

В приведенной выше записи использовано циклическое правило суммирования индексов (при $i = 2$ b_{i+2} обозначает b_1). На примере треугольника Δ_1 легко получить значения интегралов для распределений в (9):

$$\iint_{\Delta_1} \frac{1}{\rho} d\xi d\eta = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_0^{h_1/\cos\varphi} \left(\frac{1}{r} r \right) dr d\varphi = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{h_1}{\cos\varphi} d\varphi = h_1 \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_1} \frac{x-\xi}{\rho} d\xi d\eta &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_0^{h_1/\cos\varphi} \left(\frac{-r \cos(\theta_1 + \varphi)}{r} r \right) dr d\varphi = \\ &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \cos(\theta_1 + \varphi) \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{\cos\varphi} \right)^2 d\varphi = -\frac{1}{2} (h_1)^2 \cos\theta_1 \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} (h_1)^2 \sin\theta_1 \left[\frac{1}{\cos\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_1} \frac{y-\eta}{\rho} d\xi d\eta &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_0^{h_1/\cos\varphi} \left(\frac{-r \sin(\theta_1 + \varphi)}{r} r \right) dr d\varphi = \\ &= -\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sin(\theta_1 + \varphi) \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{\cos\varphi} \right)^2 d\varphi = -\frac{1}{2} (h_1)^2 \sin\theta_1 \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (h_1)^2 \cos\theta_1 \left[\frac{1}{\cos\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

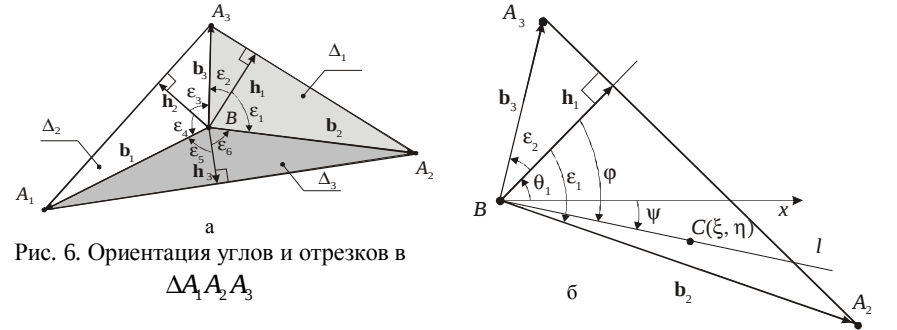


Рис. 6. Ориентация углов и отрезков в $\Delta A_1 A_2 A_3$

Обобщая выражения (11)-(13), можем вычислить значения основных интегралов для всех трех малых треугольников:

$$I_{00}^{(i)} = \iint_{\Delta_i} \frac{1}{\rho} d\xi d\eta = h_i \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}}; \quad (14)$$

$$I_{10}^{(i)} = \iint_{\Delta_i} \frac{x-\xi}{\rho} d\xi d\eta = -\frac{1}{2} h_i^2 \cos\theta_i \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}} \right] + \frac{1}{2} h_i^2 \sin\theta_i \left[\frac{1}{\cos\varphi} \Big|_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}} \right]; \quad (15)$$

$$I_{01}^{(i)} = \iint_{\Delta_i} \frac{y-\eta}{\rho} d\xi d\eta = -\frac{1}{2} h_i^2 \sin \theta_i \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi} \right]_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}} - \frac{1}{2} h_i^2 \cos \theta_i \left[\frac{1}{\cos \varphi} \right]_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}}. \quad (16)$$

В свою очередь для всего $\Delta A_1 A_2 A_3$, исходя из представления (8), можем записать:

$$I_{00} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{1}{\rho} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 I_{00}^{(i)}; \quad (17)$$

$$I_{10} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{x-\xi}{\rho} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 I_{10}^{(i)}; \quad (18)$$

$$I_{01} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{y-\eta}{\rho} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 I_{01}^{(i)}. \quad (19)$$

Следуя [7], эти соотношения можно использовать для вычисления формы перемещений от единичной пирамидальной нагрузки. Для этого необходимо рассмотреть линейный элемент нагрузки, изображенный на рис. 7, а. В нем элементное базисное распределение принимает единичное значение в одной вершине и нулевое в остальных двух. Совершив замену координат, как показано на рис. 7, б, такую форму распределения на $\Delta A_1 A_2 A_3$ можно записать как

$$p^{(i)}(\xi', \eta') = 1 - \eta' / H_1. \quad (20)$$

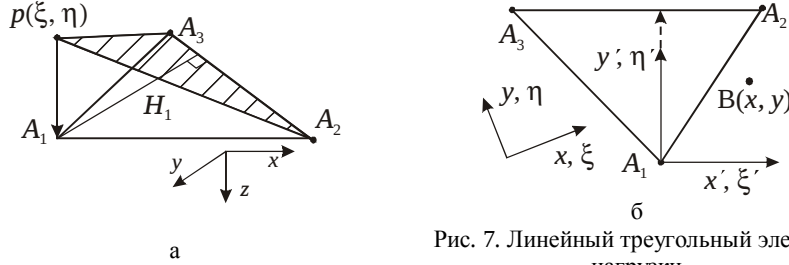


Рис. 7. Линейный треугольный элемент нагрузки

Поскольку $1 - \eta' / H_1 = [1 - y' / H_1] + 1 / H_1 [y' - \eta']$, справедливо представление интеграла от такой элементарной нагрузки через уже вычисленные в (17)-(19):

$$I_{01} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{p^{(i)}(\xi', \eta')}{\rho} d\xi' d\eta' = [1 - y' / H_1] I_{00} + [1 / H_1] I_{01}.$$

Комбинацией шести таких линейных элементов легко получить искомый пирамидальный и вычислить для него форму перемещений (7). Следует отметить, что все приведенные выше соотношения являются точными, а поэтому

получаемые описанным выше способом значения „шаблона” $w(x, y)$ также будут точными. Однако при численной реализации данного алгоритма область его применимости ограничена. При определении формы перемещений (7) в точках, расположенных далеко от единичного элемента, его вычисление связано с выполнением большого числа операций сложения величин разного знака с близкими абсолютными значениями, что приводит к возникновению численной погрешности. В этом случае, начиная с некоторой величины удаления, пирамидальную нагрузку можно заменить сосредоточенной и принять соответствующее ей значение интеграла (7) за окончательный результат.

Любой подход к непосредственно решению контактной задачи, основанный на применении соотношений (3)-(5), предполагает вычисление перемещений под действием представленной узловыми значениями нагрузки в заданном конечном числе точек. Если это множество имеет некоторый регулярный порядок, как, к примеру, множество узлов сетки элементов давления, изображенной на рис. 4, то процедуру вычисления узловых значений перемещений можно упростить, снизив вычислительные затраты.

Продemonстрируем эту возможность в случае, когда для перемещений и контактных давлений используется общая регулярная треугольная сетка. Для обозначения ее узлов будем применять как сплошную индексацию $\{I_n\}_{n=1}^N$, так и специальную систему отсчета. За ее начало возьмем точку О, которая обычно является узлом сетки. Оси этой системы направлены вдоль двух ортов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$, угол между которыми составляет $\pi/3$ (рис. 8). В этом случае любому узлу сетки можно поставить в соответствие целочисленные координаты-индексы (i, j) таким образом, что его радиус-вектор будет вычисляться как

$$\mathbf{r}_j = c(\mathbf{e}_i \cdot i + \mathbf{e}_j \cdot j) \Leftrightarrow J \sim J_{ij}. \quad (21)$$

Используя эту индексацию, можем переписать равенство (6) для узловых точек в следующем виде:

$$u_n = u_{z_1}(I_n) + u_{z_2}(I_n) = u_{z_1}(I_{ij}) + u_{z_2}(I_{ij}) = u_{z_1}(x_{ij}, y_{ij}) + u_{z_2}(x_{ij}, y_{ij}) = \\ = \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w\left(\frac{x_{ij} - \xi_{kl}}{c}, \frac{y_{ij} - \eta_{kl}}{c}\right) \cdot p_{kl} = \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w(i-k, j-l) \cdot p_{kl} = \sum_m C_{nm} p_m, \quad (22)$$

отражающем то, как вычисляется матрица коэффициентов влияния C , связывающая узловые значения перемещений с узловыми значениями контактных давлений. Из этой записи также видно, как по узловым значениям «шаблона» (7) на единичной сетке (для которой $c = 1$) определяются коэффициенты влияния для сеток с другими размерами ячейки c .

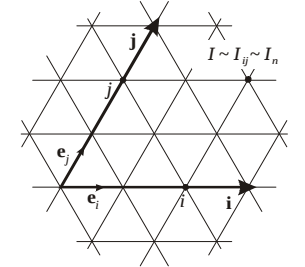


Рис. 8. Система отсчета и индексов для регулярной сетки

Действительно, значение коэффициента $w\left(\frac{x_{ij}-\xi_{kl}}{c}, \frac{y_{ij}-\eta_{kl}}{c}\right)$ для двух

узлов J_{ij} и J_{kl} определяется только их относительным расположением, и, соответственно, разницей индексов i, k и j, l . Таким образом, достаточно вычислить значение „шаблона” (7) для одного единичного пирамидального элемента в узлах отмасштабированной сетки

$$J_{ij'} : \mathbf{r}_{J_{ij'}} = c(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{i}' + \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{j}') \rightarrow w_{ij'} = w(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{i}' + \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{j}'), \quad (23)$$

а по ним уже определяются коэффициенты влияния C_{nm} для действительной сетки

$$C_{nm} = \frac{c}{\pi E^*} w(i(n) - i(m), j(n) - j(m)). \quad (24)$$

Более того, из-за наличия осей симметрии пирамидального элемента и сетки оказывается достаточно вычислить значения $w_{ij'}$ только в узком секторе $\{i' \geq 0, 0 \leq j' \leq i'\}$ и хранить их при численной реализации в виде треугольной или симметричной матрицы ($w_{ij'} = w_{ji'}$). Для произвольной пары индексов (i', j') значение $w_{ij'}$ тогда можно быстро получать путем серии „отражений индексов”, как показано на рис. 9. Здесь показана форма области индексов (i', j') , в которой возможно определение коэффициентов $w_{ij'}$ этим способом по предварительно вычисленным значениям $w = \{w_{ij'}; 0 \leq i' \leq N_w, 0 \leq j' \leq i'\}$. Исходная область сетки, в которой непосредственно вычисляются коэффициенты „шаблона” (7), указана на рис. 9 штриховкой. Такой простой прием позволяет в 12 раз уменьшить количество производимых на этом этапе вычислений.

К достоинствам вычисления коэффициента влияния по „шаблону” относится то, что достаточно один раз для всех приложений вычислить и сохранить матрицу w достаточных размеров, а в дальнейшем для используемых сеток различных размеров и густоты необходимо будет только сформировать матрицу коэффициентов влияния без проведения сложных вычислительных операций.

Прямой метод решения задач негерцевского нормального контакта упругих тел состоит в том, что условия контакта записываются для конечного числа точек. В результате формируется система соотношений, позволяющая найти узловые значения контактных давлений, которые им удовлетворяют [4]. Выбор точек локализации и способ приближенной записи различных

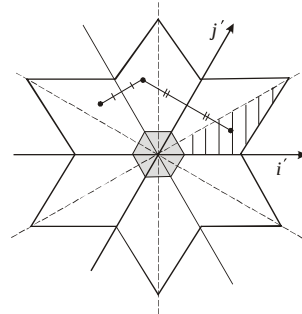


Рис. 9. Отражение индексов для вычисления коэффициентов „шаблона”

условий при этом являются довольно субъективными. Стандартной практикой является их численная проверка для серии модельных задач, поскольку для большого числа вариантов методов не существует строгого доказательства и оценок сходимости.

Использование общей сетки для пирамидальных элементов давления и узлов коллокации позволяет применить для записи соотношений метода выражения (22), согласно которым условия контакта (2) в узлах сетки принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n - \text{в контакте;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n - \text{вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (24)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарное сближение; $h_n = h(x_n, y_n)$ – узловые значения первоначального зазора.

Другим условием, которое необходимо учитывать, является неотрицательность давлений, что накладывает на искомые узловые значения следующие ограничения:

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (25)$$

Более того, вне зоны контакта они должны быть нулевыми, так что

$$p_m = 0, J_m - \text{вне зоны контакта.} \quad (26)$$

В условия (2) и их дискретную запись (24) входит сближение тел δ , которое в большинстве задач является неизвестным. Возникающую в связи с этим неопределенность можно исключить, добавив в систему разрешающих соотношений уравнение, в котором присутствует величина действующего прижимающего усилия P . Чаще всего бывает заданным именно оно. Это уравнение получаем интегрированием по элементам кусочно-линейно представленного давления:

$$\sum_m \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 p_m = P. \quad (27)$$

Система соотношений (24)-(27) на практике всегда разрешается единственным образом относительно неизвестных $\{p_m\}_{m=1}^N$ и δ . При их определении наибольшей трудностью является то, что форма и размеры области контакта обычно неизвестны. Поэтому для начала необходимо сделать предположения относительно зоны контакта и того, какие узлы в нее входят. Обычно строят сетку и делают начальное предположение об области контакта таким образом, что они заведомо покрывают истинную область контакта. В ходе последующей итерационной процедуры уточняются как форма пятна контакта, так и значения контактных давлений. На каждом ее шаге имеется множество N_c ,

состоящее из индексов n_c узлов, предположительно входящих в контакт. Для них должны выполняться уравнения из системы (24), а также равенство (27):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 p_{m_c} = P. \end{cases} \quad (28)$$

Последнее равенство в системе (28) записано с учетом условия (26): $p_m = 0, m \notin N_c$. Соотношения (28) образуют систему из $(N_c + 1)$ -го линейного алгебраического уравнения (СЛАУ) относительно такого же числа неизвестных. Ее матрица формируется из коэффициентов влияния C_{nm} и весовых множителей из равенства (27). Система (28) имеет единственное решение. Полученные с его помощью узловые значения $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$ могут оказаться нарушающими условие (25), что будет означать, что размеры зоны контакта завышены. Индексы узлов, в которых это происходит, исключаются из множества N_c , и производится новый шаг итерации. Так происходит до тех пор, пока на некотором шаге не будет получено множество индексов N_c , для которого решение системы (28) даст неотрицательное давление в зоне контакта.

В большинстве ситуаций этот результат является окончательным. Однако он все же требует дополнительной проверки на выполнение еще одного типа условий, представленного в (24). Вне зоны контакта не должно возникать взаимного проникновения взаимодействующих тел. Если в части узлов, не вошедших в область контакта, не будут соблюдаться неравенства из (4), то их индексы придется включить во множество N_c и повторить итерационную процедуру. Однако в большинстве случаев, когда начальное приближение области контакта выбрано достаточно большим и покрывает действительное контактное пятно, подобной необходимости возобновления итерационного процесса не возникает. Варьируемая зона контакта постепенно стягивается к искомой, и проверки выполнения условия (25) оказывается достаточно. Точность результата при этом определяется размером ячейки c .

В качестве примера работы этого алгоритма можно провести решение модельной задачи герцевского контакта параболоида вращения с упругим полупространством, зазор между которыми вычисляется как

$$h_{par}(x, y) = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2), \quad (29)$$

где R – радиус кривизн параболы.

Точное решение этой задачи дает теория Герца [4], согласно которой в сопряжении тел такой формы

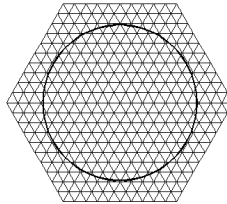


Рис. 10. Шестиугольная область и одно ее разбиение

действует эллипсоидально распределенное контактное давление

$$p^H(x, y) = p_0^H \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a_H^2}}, \quad x^2 + y^2 \leq a_H^2 \quad (30)$$

на круговой контактной площадке, радиус которой вычисляется при известной величине прижимающего усилия как

$$a_H = \left(\frac{3pR}{4E^*} \right)^{1/3}. \quad (31)$$

Максимальное давление при этом достигается в центральной точке площадки и составляет величину

$$p_0^H = \frac{3p}{2\pi a_H} = \left(\frac{6p(E^*)^2}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}. \quad (32)$$

Применение вышеизложенного алгоритма для функции зазора, определяемой выражением (29), приводит к следующим результатам. Если используемая сетка имеет достаточные размеры и покрывает пятно контакта, то итерационный процесс сходится с достаточной скоростью. Для решения этой задачи форма области, занимаемая сеткой, была выбрана шестиугольной. На рис. 10 показана область и одно из ее разбиений, а также обозначена граница круговой области контакта, предсказываемая теорией Герца. На рис. 11 показаны последовательные приближения области контакта. Видно, что границы этих областей монотонно стягиваются к окончательному результату, обозначенному более толстой линией. Он, в свою очередь, оказывается близким к точной круговой форме, что также отображено на рис. 11. Используемая в данном численном методе кусочно-линейная аппроксимация позволяет получать непрерывные распределения контактных давлений (рис. 12). Их точность при этом зависит от размера c ячейки сетки. На рис. 13 представлена картина изменения погрешности при определении величины максимальных контактных давлений с уменьше-

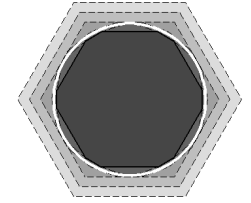


Рис. 11. Итерационный процесс уточнения формы пятна контакта для случая параболического зазора

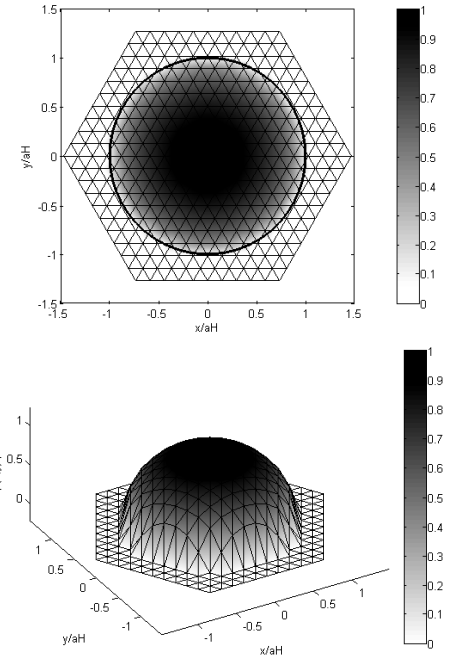


Рис. 12. Кусочно-линейное распределение контактного давления, полученное в результате применения прямого приближенного метода

нием c , т.е. со сгущением сетки. Для наглядности также приведены распределения контактных давлений на оси Ox , полученные для различных размеров ячеек сетки, и соответствующее им герцевское распределение (рис. 14).

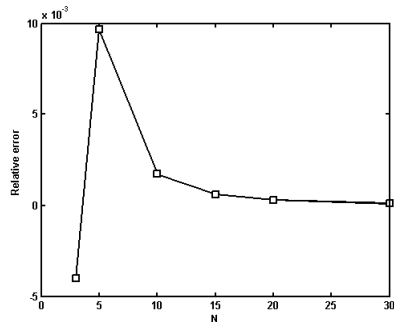


Рис. 13. Изменение погрешности определения величины максимальных контактных давлений с уменьшением размера ячейки

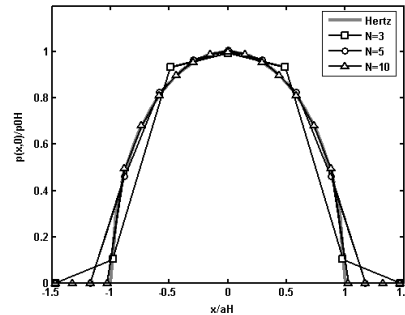


Рис. 14. Распределения контактных давлений на оси Ox для различных размеров ячеек сетки

Вариационные методы решения задачи негерцевского нормального контакта. В отличие от описанного выше прямого метода, в рамках которого находится приближенное распределение контактного давления, обеспечивающего выполнение точных соотношений контакта (2) в конечном числе точек, вариационный подход основывается на слабой постановке контактной задачи. Известные результаты Фикера [8], а также Дюво и Лионса [9] устанавливают общий принцип, определяющий существование и единственность решения контактных задач. Он заключается в том, что действительные перемещения точек системы тел, приводимых в контакт при выполнении ряда условий, минимизируют полную энергию системы U в пространстве возможных перемещений, удовлетворяющих условию непроникновения.

Однако при использовании модели упругого полупространства, в которой имеется соотношение (3), выражающее перемещение точек границы через нормальные усилия на поверхности контактирующих тел, представляется более удобным принять в качестве варьируемой функции распределение контактных давлений. В этом случае необходимо воспользоваться отличным от вышеупомянутого вариационным принципом, предложенным Калькером [6]. Согласно ему для истинных области контакта и давления, действующего в сопряжении тел, достигается минимум полной дополнительной работы Φ среди всех возможных неотрицательных распределений p . Вид функционала для рассматриваемой задачи и постановка задачи минимизации, ей эквивалентной, представлен ниже:

$$\begin{cases} \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; \\ p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S, \end{cases} \quad (33)$$

где S – некоторая достаточно большая область поверхности полупространства (возможные распределения контактных давлений должны иметь ограниченные носители). С учетом соотношения (4) можно видеть, что минимизируемое выражение является функционалом, зависящим от одной лишь неизвестной функции давления p . Распределение давления здесь должно удовлетворять неравенству из (33) в слабом смысле.

Приближенное решение этой задачи можно найти, рассматривая значение минимизируемого функционала на конечномерном пространстве, образованном кусочно-линейными распределениями p типа (5) на регулярной треугольной сетке. В этом случае S либо точно, либо приближенно совпадает с областью, покрытой сеткой. Сам функционал при этом принимает вид суммы квадратичной и линейной форм относительно узловых значений давления p_n . Способ его вычисления зависит от схемы численного интегрирования. Применяя простую квадратурную форму с узлами, совпадающими с узлами используемой сетки:

$$\int_S f g dS = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_i f_i g_i, \quad (34)$$

можно прийти к следующей задаче квадратичного программирования, являющейся приближением (33)–(34):

$$\begin{cases} \Phi_n(\{p_n\}_{n=1}^T) = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} p_n p_m + \sum_{m=1}^N p_m (h_m - \delta) \right] \rightarrow \min; \\ p_m \geq 0, \quad m = 1, N. \end{cases} \quad (35)$$

Примечательно, что узловые значения $\{p_n\}_{n=1}^T$, получаемые как решение (35), являются идентичными результату применения прямого метода и удовлетворяют условиям (24)–(26). В этом случае имеется эквивалентность не только начальных сильной и слабой постановки контактной задачи, но и приближенных методов ее решения. Однако это будет справедливо лишь при использовании формулы (34) для вычисления интегралов в (33), что не является обязательным.

Преимуществами вариационного подхода являются: наличие условий, единственным образом определяющих форму области контакта и распределение контактных усилий; возможность применения методов квадратичного программирования. Последнее обстоятельство позволяет применять вариационную формулировку для формального обоснования применимости метода коллокаций и, в частности, достоверности приведенных выше результатов.

Заключение. В статье предложена постановка задачи анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел на базе метода граничных интегральных уравнений. Рассмотрена прямая и вариационная формулировки задачи, показана их эквивалентность, а также сформулирована система разрешающих соотношений для определения контактных зон и контактных давлений. На примере моделирования герцевского контакта проиллюстрирована

точность и сходимость метода. Анализ представленных результатов позволят сделать следующие выводы.

1. Метод граничных интегральных уравнений обладает необходимыми свойствами универсальности, достаточной точности и сравнительно невысокой трудоемкости решения задач анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел [1-3]. Это делает его приемлемым для решения широкого круга задач в процессе многовариантных расчетов с варьированием геометрии контактирующих тел.

2. Предложенный в работе способ аналитического вычисления коэффициентов матрицы разрешающих уравнений при использовании линейного представления распределения контактных давлений в пределах подобласти треугольной формы, получаемых при регулярной разбивки поверхности тела, обеспечивает, кроме высокой точности, значительную экономию времени за счет использования свойств симметрии и регулярности сетки дискретизации.

3. Одной из наиболее важных особенностей предложенной формулировки метода граничных интегральных уравнений является необходимость вычисления зазоров в узловых точках сетки на поверхности сопряженных тел. Это не представляет трудностей при аналитическом представлении поверхностей контактирующих тел. Однако для случая контакта тел более сложной формы (в частности, для сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями [1-3], получаемыми как облако сопряженных точек при численном решении вспомогательной задачи), необходимо заранее предусматривать способ автоматизированного вычисления зазоров. Последнее особенно важно при проведении автоматизированных исследований, сочетающих синтез геометрии формы и анализ контактного взаимодействия при проектировании реальных конструкций.

Отмеченные особенности свидетельствуют о том, что предложенный и реализованный в статье вариант метода граничных интегральных уравнений для исследования контактного взаимодействия является достаточно конкурентоспособным для широкого класса сложнопрофильных тел. В дальнейшем его планируется использовать при решении ряда прикладных задач.

Список литературы: 1. Ткачук Н.Н. Анализ и синтез сложнопрофильных деталей по кинематическим и прочностным критериям // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Транспортное машиностроение. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2006. – Вып. 26. – С.196-203. 2. Ткачук Н.Н. Оценка контактных напряжений в сопряжении сложнопрофильных деталей // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2006. – Вып. 24. – С.138-152. 3. Ткачук Н.Н. Топологически регулярные конечно-элементные сетки для тел с кинематически генерируемыми поверхностями // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2006. – Вып. 32. – С.156-166. 4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 5. Li J., Berger E.J. A semi-analytical approach to tree-dimensional normal contact problems with friction // Computational Mechanics. – 2003. – 30. – pp. 310-322. 6. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. – J. Inst. Math. and Appl. – 1977. – 20. – 199 p. 7. Li J., Berger E.J. A Boussinesq-Cerruti solution set for constant and linear distribution of normal and tangential load over a triangular area // Journal of Elasticity. – 2001. – 63. – pp. 137-151. 8. Fichera G. Problemi elastostatici con vinconi unilaterale: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. – Mem. Accad. Naz. Lincei, Series 8. – 1964. – 7. – 91 p. 9. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

Поступила в редколлегию 02.06.08