

**І. В. ДОБРОВ, А. В. СЕМИЧЕВ, А. В. КОПТИЛЙ, И. И. ГЕТЬМАН**

## МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КИНЕМАТИКИ СКОЛЬЖЕНИЯ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС РЕДУКТОРА

Розроблений метод механічного моделювання кінематики ковзання прямозубих коліс евольвентного профілю за допомогою двох тіл з плоскою поверхнею контакту, які кінематично пов'язані між собою і відображають характер відносного ковзання зубців коліс редуктора. Дослідження умов рівномірного руху тіл моделі при "сухому законі" тертя ковзання дозволило уточнити закономірність ковзання зубця шестерні відносно зубця колеса.

**Ключові слова:** зубчаста пара, качення з ковзанням, механічна модель, тертя ковзання, рівномірний рух, відносне ковзання.

Разработан метод механического моделирования кинематики скольжения прямозубых колес эвольвентного профиля с помощью двух тел с плоской поверхностью контакта, которые кинематически связаны между собой и отражают характер относительного скольжения зубьев колес редуктора. Исследование условий равномерного движения тел модели при "сухом законе" трения скольжения позволило уточнить закономерность скольжения зуба шестерни относительно зуба колеса.

**Ключевые слова:** зубчатая пара, качение со скольжением, механическая модель, трение скольжения, равномерное движение, относительное скольжение.

A method has been developed for mechanically modeling of the sliding kinematics of spur gears of the involute profile by means of two bodies with a plane contact surface that move relative to each other with a sliding speed which is directly proportional to the sliding speed of the teeth of the gear wheels. The carried out researches of sliding conditions of bodies of a mechanical model allowed to determine the function of relative sliding of a surface of a tooth of a gear wheel with respect to the tooth of the wheel while points of contact surfaces of a teeth are moving along a working part of a line of action.

**Keywords:** pair of gears, rolling with sliding, mechanical model, sliding friction, uniform motion, relative sliding.

**Введение.** Исследование процесса трения зубчатых колес, обуславливающего износ поверхностей контактирующих зубьев, снижение КПД передачи, повышение динамических нагрузок в процессе работы редуктора и, как следствие, выход редуктора из строя, представляет актуальную задачу [1–3]. Процесс взаимодействия зубьев зубчатых колес редуктора при передаче момента сил  $M_{1,F}$  со стороны ведущего колеса (шестерни) с числом зубьев  $z_1$  ведомому колесу с числом зубьев  $z_2 > z_1$  для преодоления момента сопротивления  $M_{2,Q}$ , представляет процесс трения качения со скольжением двух эвольвентных поверхностей различной конфигурации [4, 5]. Разработка и совершенствование методов расчета зубчатых передач определяет дальнейшее совершенствование как математических моделей, описывающих процессы взаимодействия зубчатых колес математическими формулами с последующим решением полученных уравнений формальными

методами, так и различных физических и механических моделей процесса качения, позволяющих исследовать эти процессы на моделях-аналогах [2, 3, 6].

**Цель работы.** Разработка теоретических основ создания механических моделей кинематики трения качения со скольжением прямозубых колес редуктора эвольвентного профиля.

**Изложение основного материала.** Характерная особенность процесса скольжения (рис. 1) зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$ , вращающихся соответственно с угловыми скоростями  $\omega_1$  и

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{u_{12}}, \quad (1)$$

где  $u_{12} = z_2/z_1$  – передаточное отношение вращающихся колес  $z_1$  и  $z_2$ , состоит в том, что для абсолютно жестких зубьев колес [4, 5]:

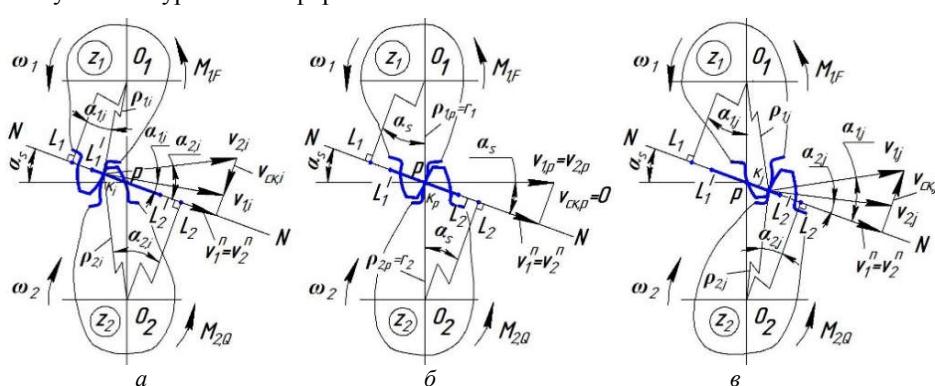


Рис. 1 – Кинематика скольжения зубьев зубчатых колес  $z_1$  и  $z_2$ : а – на участке  $L_1'P$  рабочей части линии зацепления  $L_1'L_2'$  в текущей точке контакта ( $\kappa_i = \kappa_1 \dots \kappa_p$ ); б – в полюсе зацепления  $P$  (точка  $\kappa_p$ ); в – на участке  $PL_12'$  линии зацепления  $L_1'L_2'$  в текущей точке контакта ( $\kappa_j = \kappa_p \dots \kappa_M$ )

1. Перемещение каждой из точек контакта  $M \rightarrow \infty$  протяженностью  $ds = L_1'L_2'/M \rightarrow 0$  зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$  на рабочем участке линии зацепления  $L_1'L_2'$  общой нормали  $NN$ , вдоль которой передается сила давления ( $P_{F,21}$ ; на

рис. 1 силы  $P_{F,21}$  и  $P_{Q,12}$  условно не показаны) зубу колеса  $z_2$  со стороны зуба шестерни  $z_1$  для преодоления силы сопротивления ( $P_{Q,12} = -P_{F,21}$ ) шестерни  $z_1$  со стороны колеса  $z_2$ , происходит с постоянной скоростью

$$\begin{aligned} v_1^n &= v_{1,i} \cos \alpha_{1,i} = v_{2,i} \cos \alpha_{2,i} = v_{1,p} \cos \alpha_s = \\ &= v_{2,p} \cos \alpha_s = v_{1,j} \cos \alpha_{1,j} = v_{2,j} \cos \alpha_{2,j} = v_2^n, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $v_1^n$  и  $v_2^n$  – проекции на линию зацепления  $NN$  скоростей зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$  в любой точке ( $1, \dots, i, \dots, p, \dots, j, \dots, M$ ) контакта на линии зацепления  $L_1 L_2$ ;  $\alpha_{1,i}$ ,  $\alpha_{2,i}$  – соответствующие углы между радиусами векторами  $r_{1,i}$ ,  $r_{2,i}$  зубчатых колес  $z_1$ ,  $z_2$  в текущей точке контакта зубьев  $\kappa_i$  ( $i = 1 \dots p$ ) на участке  $L_1^P$  и перпендикулярами  $O_1 L_1$ ,  $O_2 L_2$ , опущенными из центров вращения зубчатых колес  $O_1$ ,  $O_2$  на нормаль  $NN$  в точках  $L_1$  и  $L_2$ , образующих теоретическую линию зацепления  $L_1 L_2 > L_1^P L_2^P$ ;  $\alpha_s$  – угол зацепления колес  $z_1$  и  $z_2$  с радиусами основных окружностей  $r_1$  и  $r_2$ ;  $\alpha_{1,j}$ ,  $\alpha_{2,j}$  – соответствующие углы между радиусами векторами  $r_{1,j}$ ,  $r_{2,j}$  зубчатых колес  $z_1$ ,  $z_2$  в текущей точке контакта зубьев  $\kappa_j$  ( $j = p \dots M$ ) на участке  $P L_2^P$  и перпендикулярами  $O_1 L_1$ ,  $O_2 L_2$ ;  $v_{1,i} = r_{1,i} \omega_1$ ,  $v_{2,i} = r_{2,i} \omega_2$ ,  $v_{1,p} = r_1 \omega_1$ ,  $v_{2,p} = r_2 \omega_2$ ,  $v_{1,j} = r_{1,j} \omega_1$ ,  $v_{2,j} = r_{2,j} \omega_2$  – соответствующие скорости точек контакта ( $\kappa_i$ ,  $\kappa_p$ ,  $\kappa_j$ ) поверхностей зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$  на рабочей части линии зацепления  $L_1^P L_2^P$ .

2. Тангенциальные составляющие скоростей  $v_{1,j}^\tau = v_{1,j} \sin \alpha_{1,j}$ ,  $v_{2,j}^\tau = v_{2,j} \sin \alpha_{2,j}$ ,  $v_{1,p}^\tau = v_{1,p} \sin \alpha_s = v_{2,p}^\tau = v_{2,p} \sin \alpha_s$ ,  $v_{1,j}^\tau = v_{1,j} \sin \alpha_{1,j}$ ,  $v_{2,j}^\tau = v_{2,j} \sin \alpha_{2,j}$  направленные по касательной к эвольвентным поверхностям зубьев  $z_1$  и  $z_2$ , определяют относительную скорость скольжения зубьев в точках контакта ( $\kappa_i$ ,  $\kappa_p$ ,  $\kappa_j$ ) линии зацепления  $L_1^P L_2^P$

$$v_{ck,i} = v_{1,i}^\tau - v_{2,i}^\tau < 0, \quad v_{ck,p} = 0 \text{ и } v_{ck,j} = v_{1,j}^\tau - v_{2,j}^\tau > 0, \quad (3)$$

Таблица 1 – Классификация сил для решения задач прикладной механики [8, 9]

<b>Внешняя сила*</b> – сила, действующая на какое-либо материальное тело механической системы со стороны тела, не принадлежащего этой системе. Источник энергии внешней силы находится за пределами системы тел.	<b>Внутренняя сила**</b> – сила, действующая на какое-либо материальное тело (точку тела) механической системы со стороны других материальных тел (точек тела), принадлежащих рассматриваемой механической системе (телу). Источник энергии внутренней силы расположен внутри рассматриваемой системы тел.
--	--

<b>Активные силы</b> совершают механическую работу, связанную с перемещением тела, на которое они действуют.	
<b>Сила движения</b> ( $P_F$ или $F$ ) – сила, точка приложения которой к подвижному телу перемещается в направлении движения этого тела.	<b>Сила сопротивления движению</b> ( $P_Q$ или $Q$ ) – сила, точка приложения которой к подвижному телу перемещается в сторону противоположную направлению движения этого тела.

<b>Потенциальная сила</b> – сила, точка приложения которой неподвижна относительно поверхности (объема) подвижного тела, на которое она действует, не изменяя направления линии действия.	
<b>Непотенциальная сила</b> ( $F^{(h)}$ , $Q^{(h)}$ ) – сила, точка приложения которой к подвижному телу перемещается относительно точки поверхности (объема) этого тела и (или) направление линии действия силы изменяет свое положение в пространстве.	

<b>Пассивные силы</b> , приложенные к телу, не совершают механическую работу по перемещению этого тела:	
<b>диссипативная сила</b> ( $P^{(D)}$ ) – сила, действующая на тело таким образом, что точка приложения силы перемещается относительно поверхности (объема) неподвижного тела, на которое она действует;	
<b>сила реакции</b> ( $R$ ) – сила, действующая на неподвижное тело, при этом точка приложения силы не перемещается относительно точки поверхности (объема) этого тела;	
<b>нормальная сила</b> ( $N$ ) – сила, действующая на тело в направлении, перпендикулярном перемещению тела.	

\* В обозначении внешней силы может использоваться нижний индекс из одной или двух цифр. Первая цифра индекса, указывает номер тела, на которое действует внешняя сила, вторая – номер тела, со стороны которого действует сила.

\*\* В обозначении внутренней силы используется верхний индекс (i) и нижний индекс из двух цифр, разделенных дефисом, указывающих на номера тел между которыми действует эта сила.

которые по мере перемещения точек контакта ( $\kappa_i$ ,  $\kappa_p$ ,  $\kappa_j$ ) по различным участкам  $L_1^P L_2^P$  меняют свою величину и направление (рис. 1 а, б, в), определяя при этом направление линии действия силы трения ("Сила трения: сила сопротивления при относительном перемещении одного тела по поверхности другого тела под действием внешней силы тангенциально направленной к общей границе между этими телами" [7]) между поверхностями зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$ .

Анализ кинематики скольжения зубьев колес (п. 1 и п. 2) в условиях действия "сухого трения" по закону Амандона-Кулона, согласно которому сила трения скольжения не зависит ни от скорости скольжения, ни от площади контактной поверхности скользящих тел, позволяет сформулировать исходную задачу (рис. 1) в следующем виде.

Два тела 1 и 2, равномерно перемещаются в одном направлении под действием нормальной силы, прижимающей эти тела друг к другу, что аналогично действию нормальной силы, прижимающей эти дела друг к другу, когда они не перемещаются в направлении линии действия нормальной силы. В свою очередь контактные поверхности этих тел могут перемещаться (скользить) друг относительно друга как в одном направлении, так и во взаимно противоположном, несмотря на то, что внешняя сила, движения, действующая на тело 1 параллельно контактной поверхности этих тел, не изменяет направления линии действия, а силы трения изменяют направление на  $180^\circ$ .

Для разработки механической модели кинематики скольжения зубчатых колес будем использовать следующую классификацию сил табл. 1, в том числе и сил трения (рис. 2).

Для классификации сил трения скольжения в поступательных кинематических парах [9] рассмотрим (рис. 2) поступательную пару трения твердых тел, расположенных на роликах  $P$ , установленных на неподвижной поверхности  $O$ . При этом учитывается, что сила трения  $T_{1-2}^{(i)}$ , действующая в точке  $K_N$  между телами 1 и 2, является внутренней силой сопротивления относительному движению тел 1 и 2 и не оказывает влияние на равновесие внешних сил пары трения, но составляющие этой силы, действующие на каждое отдельно взятое тело пары трения в точке  $K_N$  равны по

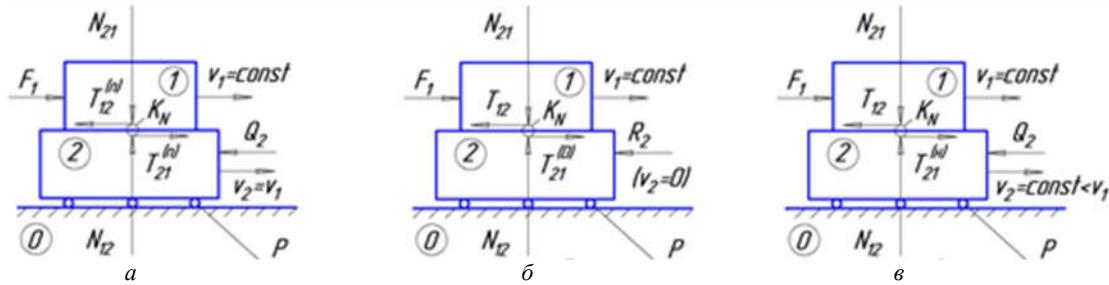


Рис. 2 – Схеми дійсності складаючих сил сили тренія скольження в залежності від кінематики відносільного скольження тел пари тренія:  
а – сил тренія покоя; б – дисипативних сил тренія; в – непотенціальних сил тренія

величине і протиправоположні по напрямленню. Величина і напрямлення лінії діяння будької складаючої сили тренія визначає величину і напрямлення діяння зовнішніх сил пари тренія в залежності від кінематики відносільного скольження тел (рис. 2).

$$F_1 = |T_{1-2}^{(i)}| = |T_{12}| = \\ = \begin{cases} f^{(n)} N_1 = |T_{12}^{(n)}| = T_{21}^{(n)} = |Q_2| & \text{при } v_1 = v_2 = 0 \text{ (рис. 2, а);} \\ f N_1 = |T_{12}| = T_{21}^{(D)} = R_2 \text{ при } v_1 > v_2 = 0 \text{ (рис. 2, б);} \\ f N_1 = |T_{12}| = T_{21}^{(n)} = |Q_2| \text{ при } v_1 > v_2 > 0 \text{ (рис. 2, в.)} \end{cases} \quad (4)$$

где  $f$  – коефіцієнт тренія скольження;

$0 \leq f^{(n)} \leq f$  – коефіцієнт тренія покоя, визначаючий величину сил тренія покоя  $T_{12}^{(n)}$  і  $T_{21}^{(n)}$ .

Із (4) для умови  $v_1 > v_2$  (рис. 2 в) будемо

$$T_{21}^{(n)} = f N_1 \frac{v_1}{v_1} = f N_1 \frac{v_2}{v_1} + f N_1 \frac{v_1 - v_2}{v_1} = T_{12}^{(M)} + T_{12}^{(D)}, \quad (5)$$

где  $T_{12}^{(M)} = f N_1 v_2 / v_1$  – потенціальна складаюча сили тренія скольження, обслуговуюча передачу механічної енергії со сторони ведучого тела 1 ведомому телу 2 для його переміщення со швидкістю  $0 < v_2 < v_1$ ;

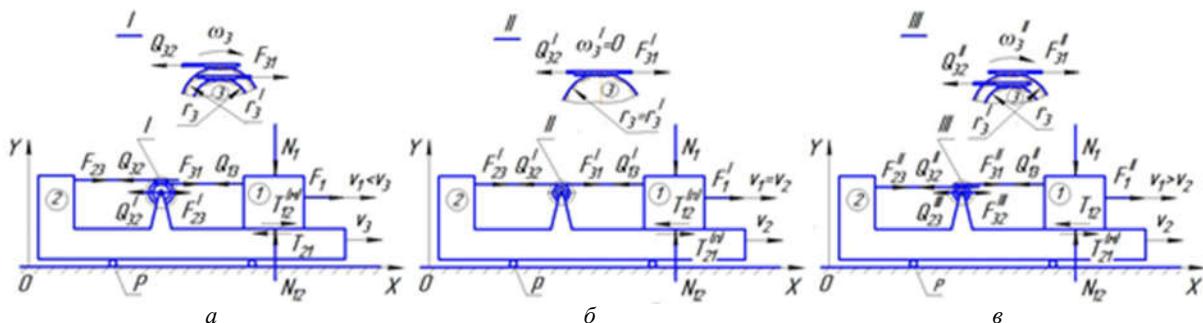


Рис. 3 – Механічні моделі кінематики скольження зубьев зірчастих колес:  
а – на участку  $L_1'P$  рабочої частини лінії зацеплення  $L_1'L_2'$ ; б – в полюсі зацеплення  $P$ ;  
в – на участку  $PL_{12}'$  рабочої частини лінії зацеплення  $L_1'L_2'$

Следовательно, модель, представлена на рис. 3, а с точки зоря взаимосвязи кинематических параметров движение тел 1 и 2 модели соответствует кинематике трения скольжения зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 1, а) на участке линии зацепления  $L_1'P$ .

На основании равновесия каждого из тел 1, 2 и 3 механической модели (рис. 3, а) в системе координат  $XOY$  ( $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  и  $\sum M = 0$ ) с учетом опреде-

$T_{12}^{(D)} = f N_1 (v_1 - v_2) / v_1$  – складаюча сила тренія скольження, обслуговуюча дисипацію часті механіческої енергії, яку отримує ведуче тело 1 за рахунок роботи зовнішньої сили  $F_1$  при пересуванні тел пари тренія.

Таким образом, процес тренія скольження зубів колес  $z_1$  і  $z_2$  (рис. 1 а) може бути реалізований механіческою моделлю, представленою на рис. 3, а в виде тел 1 і 2, які нагружені силою давлення  $N_1$  і переміщуються один відносно іншого з різними швидкостями  $v_1 \propto v_{1,i}^t$  і  $v_2 \propto v_{2,j}^t$  за рахунок зовнішньої сили руху  $F_1$ , приложеної до телу 1 і кінематичної зв'язку між телами 1 і 2 в виде шарнірно встановленого на телі 2 блока шестерень 3 з радіусами початкових колін  $r_3^t$  і  $r_3^f$  (виноска I) і зірчастих реек, неподвижно связаних з телами 1 і 2. Тело 2 переміщується без тренія (на роликах  $P$ ) відносно неподвижної горизонтальної опори 4, на якій розташовано джерело енергії (действія) сили  $F_1$  (на рис. 3 условно не показан). При скольженні поверхні зубів  $z_1$  і  $z_2$  (рис. 1 а) на частині робочої лінії зацеплення  $L_1'P$ , коли  $v_{1,i}^t < v_{2,i}^t$ , в моделі (рис. 3, а) використовують блок шестерень 3 з радіусами початкових колін  $r_3^t \propto v_{1,i}^t$  і  $r_3^f \propto v_{2,i}^t$ .

лений сил согласно табл. 1, рис. 2 і рівняній (4), (5), при  $r_3^t < r_3^f$ , будемо:

для тела 1

$$\sum X_1 = F_1 - Q_{13} + T_{12}^{(M)} = 0; \quad (6)$$

для тела 2

$$\sum X_2 = F_{23} + F_{23}' - T_{21} = 0; \quad (7)$$

для тела 3

$$\begin{cases} \sum X_3 = F_{31} - Q_{32} - Q'_{32} = 0; \\ \sum M_3 = F_{31}r'_3 - Q_{32}r_3 = F_{31}r'_3\omega_3 - Q_{32}r_3\omega_3 = \\ = F_{31}v_1 - Q_{32}v_2 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $F_{31} = -Q_{13}$  – составляющие внутренней силы зубчатой рейки, связывающей блок шестерни 3 и тело 1;

$F_{32} = -Q_{23}$  – составляющие внутренней силы зубчатой рейки, связывающей блок шестерни 3 и тело 2;

$F'_{23}$  – сила, действующая на тело 2 со стороны блок шестерни 3 в шарнирном соединении блок шестерни 3 и тела 2;

$Q'_{32} = -F'_{23}$  – сила, действующая на блок шестерни 3 со стороны тела 2 в шарнирном соединении блок шестерни 3 и тела 2.

На основании решения системы уравнений (6)–(8), следует

$$F_1 = fN_{12} \frac{v_2 - v_1}{v_2} = -fN_{12} \frac{v_1 - v_2}{v_2} = -fN_{12} \sigma_{12,m}, \quad (9)$$

где  $\sigma_{12,m}$  – относительная скорость скольжения тел модели (рис. 3, а), соответствующая относительной скорости скольжения зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$  на участке  $L'_1 P$  линии зацепления (рис. 1 а);

$$\sigma_{12,i} = \frac{v_{ck,i}}{v_{2,i}} = \frac{v_{2,i} - v_{1,i}}{v_{2,i}} = -\frac{v_{1,i} - v_{2,i}}{v_{2,i}}. \quad (10)$$

Для механической модели (рис. 3, б), соответствующей кинематике зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 1, б), уравнения равновесия тел 1, 2 и 3, при  $r'_3 = r_3$ , составят:

$$\sum X_1 = F'_1 - Q'_{13} + T_{12}^{(n)} = 0; \quad (11)$$

$$\sum X_2 = F'_{23} + T_{12}^{(n)} = 0; \quad (12)$$

$$\sum X_3 = F'_{31} - Q'_{32} = 0, \quad (13)$$

где верхним индексом (n) обозначены значения силовых параметров модели (рис. 1, б) при скольжении колес  $z_1$  и  $z_2$  в полюсе зацепления  $P$  (точка  $k_p$ ).

Из (14)–(16) следует при  $v_1 = v_2 \neq 0$

$$F'_1 = 0 = fN_{12} \frac{v_2 - v_1}{v_2} = fN_{12} \sigma'_{ck,m} = 0, \quad (14)$$

что соответствует условию (рис. 1 б)

$$v_{ck,p} = 0 \text{ и } \sigma_{12,p} = 0. \quad (15)$$

Для механической модели (рис. 3, в), соответствующей кинематике зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 1, в), уравнения равновесия тел 1, 2 и 3, при  $r'_3 > r_3$ , составят:

$$\sum X_1 = F''_1 - Q''_{13} - T_{12} = 0; \quad (16)$$

$$\sum X_2 = F''_{23} - Q'''_{23} + T_{21}^{(m)} = 0; \quad (17)$$

$$\begin{cases} \sum X_3 = F''_{31} - Q''_{32} + F'''_{32} = 0; \\ \sum M_3 = F''_{31}v_1 - Q''_{32}v_2 = 0, \end{cases} \quad (18)$$

где верхним индексом (n) обозначены значения силовых параметров модели, при скольжении зубчатых ко-

лес  $z_1$  и  $z_2$  в текущей точке  $k_j$  на участке  $PL'_2$  линии зацепления (рис. 1, в).

Из (16)–(18) следует

$$F''_1 = fN_{12} \frac{v_1 - v_2}{v_1} = fN_{12} \sigma''_{12,m}, \quad (19)$$

где  $\sigma''_{12,m}$  – относительная скорость скольжения тел модели (рис. 3, в), соответствующая относительной скорости скольжения зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$  на участке  $PL'_2$  линии зацепления (рис. 1, в)

$$\sigma''_{12,j} = \frac{v_{ck,j}}{v_{1,j}} = \frac{v_{1,j} - v_{2,j}}{v_{1,j}}. \quad (20)$$

На основании анализа условий скольжения тел механической модели (9), (14), (19) получены уравнения (10), (15), (20) для определения относительного скольжения поверхностей прямозубых колес редуктора эвольвентного профиля (рис. 4).

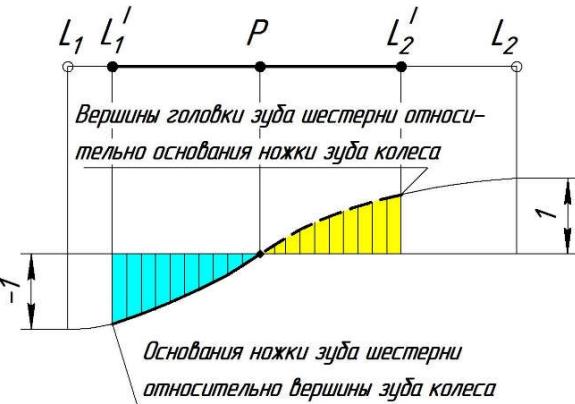


Рис. 4 – Эпюра относительного скольжения ( $\sigma_{12}$ ) поверхностей зубьев шестерни  $z_1 = 18$  и колеса  $z_2 = 34$ : а – ножки зуба шестерни (—) относительно головки колеса; б – головки зуба шестерни (---) относительно ножки колеса

#### Выводы:

1. Разработан метод механического моделирования кинематики скольжения прямозубых колес эвольвентного профиля с помощью двух тел с плоской поверхностью контакта, перемещающихся друг относительно друга со скоростью скольжения прямо пропорциональной скорости скольжения зубьев колес редуктора.

2. Проведенные исследования условий скольжения тел механической модели позволил установить характер относительного скольжения поверхности зуба шестерни относительно зуба колеса при перемещении точек контакта поверхностей зубьев вдоль рабочей части линии зацепления.

#### Список литературы

- Бондаренко С. И. Характер и причины разрушения шестерен дорожно-строительных и сельскохозяйственных машин / С. И. Бондаренко, В. А. Карпенко, Е. А. Нестеренко [и др.] // Вестн. Харьков. нац. авт. дорож. ун-та. – 2011. – Вып. 54. – С. 127–133.
- Дорофеев В. Л. Математическая модель проектирования авиационных зубчатых передач / В. Л. Дорофеев, В. В. Голованов, В. М. Ананьев // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – № 10. – С. 44–49.
- Конф И. А. Физическая модель контакта эвольвентного зацепления (заедание, износ) / И. А. Конф // Вестник машиностроения. – 1999. – № 8. – С. 141–144.
- Кожевников С. Н. Теория механизмов и машин. 2-е изд., перераб. и доп. / С. Н. Кожевников. – Киев : Машгиз, 1964. – 674 с.

5. Теория механизмов и машин: Учеб. пособие / [М. З. Коловский, А. Н. Евграфов, Ю. А. Семёнов, А. В. Слоущ]. – 3-е изд., испр. – М. : Издательский центр "Академия", 2008. – 560 с.
6. Добров И. В. Моделирование процессов внешнего трения в поступательных кинематических парах / И. В. Добров // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2009. – № 6. – С. 9–17.
7. DSTU 2823-94. Зносостійкість виробів тертя. Знозування та мащення. Терміни та визначення. – [Чинний від 1996-01-01]. – К. : Держспоживстандарт України, 1996. – 32 с.
8. Dobrov I. V. Development of scientific bases of the dynamics of machines as a section of applied mechanics / I. V. Dobrov // Procedia Engineering – V.129 – 2015 – P. 863–872.
9. Добров И. В. К вопросу классификации сил трения скольжения в поступательных кинематических парах / И. В. Добров // Материалы Всеукраинской научно-технической конференции "Механика машин – основная складовая прикладной механики". 11–13 квітня 2017 р. – Дніпро. – 2017. – С. 223–224.

**References (transliterated)**

1. Bondarenko S. I., Karpenko V. A., Nesterenko E. A. Harakter i prichiny razrushenija shesteren dorozhno-stroitel'nyh i sel'skohozjajstvennyh mashin [The nature and causes of the destruction of the gears of road-building and agricultural machinery]. *Vestn. Har'kov. nac. avtomob. dorozh. un-ta*. 2011, Vol. 54, pp. 127–133.
2. Dorofeev V. L., Golovanov V. V., Anan'ev V. M. Matematicheskaja model' proektirovaniija aviacionnyh zubchatyh peredach [Mathematical model for the design of aircraft gears]. *Aviacionno-kosmicheskaja tekhnika i tehnologija*. 2012, no. 10, pp. 44–49.
3. Kopf I. A. Fizicheskaja model' kontakta jevol'ventnogo zaceplenija

(zaedanie, iznos) [The physical model of the involute gears (jamming, wear)]. *Vestnik mashinostroenija*. 1999, no. 8, pp. 141–144.

4. Kozhevnikov S. N. Teoriya mehanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines]. 2-e izd., pererab. i dop. Kiev, Mashgiz Publ., 1964. 674 p.
5. Kolovskij M. Z., Evgrafov A. N., Semjonov Ju. A., Sloush A. V. Teoriya mehanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines]: Ucheb. posobie.–3-e izd., ispr. Moscow, Izdatel'skij centr "Akademija" Publ., 2008. 560 p.
6. Dobrov I. V. Modelirovaniye processov vneshnego trenija v postupatel'nyh kinematischeskih parah [Modeling of the processes of external friction in translational kinematic pairs]. *Trenie i smazka v mashinah i mehanizmakh*. 2009, no. 6, pp. 9–17.
7. DSTU 2823-94. Znosostijkist' virobiv terija. Znoshuvannja ta mashhennja. Termini ta viznachennja [Wear-resistant friction products. Wear and lubrication. Terms and definitions. Chinnij vid 1996-01-01]. Kiev, Derzhspozhivstandart Ukrains'koi naukovo-tehnichnoi konferencii "Mehanika mashin – osnovna skladova prikladnoi mehaniki" [Ukrainian Scientific and technical Conference "Mechanics of machines – the main component of Applied Mechanics" (11–13 of April 2017, Dnipro)]. Dnipro, 2017, pp. 223–224.
8. Dobrov I. V. Development of scientific bases of the dynamics of machines as a section of applied mechanics. *Procedia Engineering*. 2015, Vol. 129, pp. 863–872.
9. Dobrov I. V. K voprosu klassifikacii sil trenija skol'zhenija v postupatel'nyh kinematischeskih parah [To the question of classification of sliding friction forces in translational kinematic pairs]. *Materiali Vseukraains'koi naukovo-tehnichnoi konferencii "Mehanika mashin – osnovna skladova prikladnoi mehaniki"* [Ukrainian Scientific and technical Conference "Mechanics of machines – the main component of Applied Mechanics" (11–13 of April 2017, Dnipro)]. Dnipro, 2017, pp. 223–224.

*Поступила (received) 30.06.2017*

**Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions**

**Механічна модель кінематики ковзання зубчастих коліс редуктора / І. В. Добров, А. В. Сьомічев, О. В. Коптилій, І. І. Гетьман //** Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х. : НТУ "ХПІ", 2017. – № 25 (1247). – С. 48–52. – Біблиогр.: 9 назв. – ISSN 2079-0791.

**Механическая модель кинематики скольжения зубчатых колес редуктора / И. В. Добров, А. В. Семичев, А. В. Коптильй, И. И. Гетьман //** Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х. : НТУ "ХПІ", 2017. – № 25 (1247). – С. 48–52. – Біблиогр.: 9 назв. – ISSN 2079-0791.

**Mechanical model of the sliding kinematics of spur gears / I. V. Dobrov, A. V. Semichev, A. V. Koptilyj, I. I. Get'man //** Bulletin of NTU "KhPI". Series: Problem of mechanical drive. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2017. – No. 25 (1247). – P. 48–52. – Bibliogr.: 9. – ISSN 2079-0791.

**Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors**

**Добров Ігор Вячеславович** – доктор технічних наук, професор, Національна металургійна академія України, завідувач кафедри прикладної механіки, м. Дніпро; тел.: (050) 452-74-11; e-mail: igordobrov@yahoo.com.

**Добров Ігор Вячеславович** – доктор технических наук, профессор, Национальная металлургическая академия Украины, заведующий кафедрой прикладной механики, г. Днепр; тел.: (050) 452-74-11; e-mail: igordobrov@yahoo.com.

**Dobrov Igor Vyacheslavovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Metallurgical Academy of Ukraine, Chief of the Department of Applied Mechanics, Dnipro; tel.: (050) 452-74-11; e-mail: igordobrov@yahoo.com.

**Сьомічев Андрій Вікторович** – кандидат технічних наук, Національна металургійна академія України, доцент кафедри прикладної механіки, м. Дніпро.

**Семичев Андрей Викторович** – кандидат технических наук, Национальная металлургическая академия Украины, доцент кафедры прикладной механики, г. Днепр.

**Semichev Andriy Victorovich** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), National Metallurgical Academy of Ukraine, Associate Professor at the Department of Applied Mechanics, Dnipro.

**Коптилій Олександр Васильович** – Національна металургійна академія України, асистент кафедри прикладної механіки, м. Дніпро.

**Koptilyy Oleksandr Vasylivich** – National Metallurgical Academy of Ukraine, Assistant at the Department of Applied Mechanics, Dnipro.

**Гетьман Ірина Ігорівна** – ПП "ДІВ-ПБ", інженер, м. Дніпро.

**Гетьман Ірина Ігорівна** – ЧП "ДІВ-ПБ", инженер, г. Днепр.

**Getman Irina Igorivna** – PE "DIV-PB", Engineer, Dnipro.