УДК 621.002:658.6

А.В.КУПРИЯНОВ, канд. техн. наук, УИПА
Н.Ю.ЛАМНАУЭР, канд. техн. наук, УИПА

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГОДНОСТИ РАЗМЕРОВ

Запропоновано систему контролю, що спрямована на отримання деталей з близькими до оптимального розмірами. Гідність розміру має числове значення, що зменшується від максимального - одиниці, у міру віддалення дійсного розміру від оптимального. Запропонований і перевірений математичний апарат для аналітичної побудови функції оптимальності розмірів. Показано, як розподіл оптимальності характеризує технологію виготовлення з точки зору якості.

The control system built on the receipt of details with sizes near to optimum is offered. The usability of dimension has the numerical value decreasing from maximal - unity, as far as actual dimension locate from optimum one. A mathematical definition for function of optimum of dimensions is offered and tested. It is shown, as distributing of optimum characterizes quality of technology.

1. Введение

В машиностроении традиционно используется допусковый контроль годности размеров. Он подразумевает, что размеры, находящиеся в определенных пределах, называемых допуском, считаются одинаково годными, и их качество не различается. Это плохо по двум причинам. Во-первых, это не соответствует условиям эксплуатации, при которых существует некоторое наилучшее значение размера, которое будем называть оптимальным размером. Во-вторых, это не стимулирует производителя изготавливать детали с возможно более узким диапазоном значений действительного размера. В существующей системе единственный путь улучшения качества – это уменьшить допуск размера. Такой кардинальный шаг не всегда оправдан, поскольку систематические и случайные погрешности изготовления не позволяют беспредельно уменьшать допуски.

Предлагается система контроля, в которой размеры имеют не дискретное: 0 или 1, а непрерывное значение годности, увеличивающееся по мере приближения к оптимальному размеру. При этом, в зависимости от диапазона значений размера, детали могут быть разделены на сорта, имеющие разное значение годности размеров и разное значение продажной цены. Оплата труда рабочих может быть также дифференцирована, в зависимости от доли изделий каждого сорта. Это позволит стимулировать производителя непрерывно улучшать качество, а также расширить сбыт продукции за счет дифференцированного подхода к покупателям с разными финансовыми возможностями.

Использование функции годности размеров и функции плотности распределения годности размеров в обобщенном виде предложено в [1]. Однако, функция плотности распределения годности была получена только для нормального распределения размеров деталей и только с применением численных методов.

Цель статьи состоит в теоретическом обосновании и проверке формул, позволяющих аналитически строить функцию плотности распределения годности размеров, применительно для широко используемых законов распределения размеров деталей и видов функции годности размеров.

2. Функция годности размеров

Форма функции цены отклонения действительного размера от оптимального значения может быть разной. Для количественной оценки цены отклонения действительного размера от оптимального предлагается использовать функцию годности размеров $K(x)$, требования к которой:

1. Равенство 1 в значениях оптимального размера - *ko*.
2. Равенство 0 в двух значениях предельно допустимых значений, меньшего *ei* и большего *es* соответственно (это могут быть границы стандартного поля допуска).
3. В пределах допустимых значений изменяется в диапазоне [0, 1], так, что одному значению функции соответствует два значения аргумента находящихся по разные стороны от *ko*.
4. Отрицательность за пределами допустимых значений.

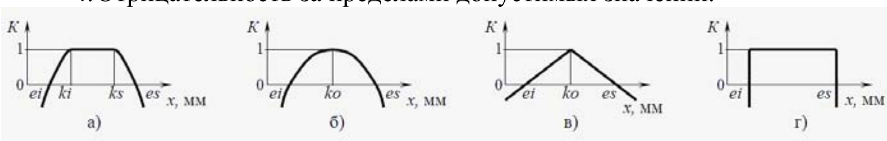


Рис. 1. Семейство функций годности размеров

На рисунке 1 изображены примеры функций годности размеров. По горизонтальной оси отложены размеры x в мм, по вертикальной оси безразмерные значения годности размеров $K(x)$. Форма функции годности устанавливается исходя из эксплуатационных условий работы детали. Форма в области оптимальных значений может быть различной: может быть (рис. 1а), а может и не быть (рис. 1б, в) неубывающего участка. Боковые участки функции могут быть выпуклы вверх (рис. 1а, 1б), линейны (рис. 1в), и даже выпуклы вниз. Форма функции годности определяет, насколько желательно получать близкие к оптимальной величине *ko* размеры. Чем больше ускорение ее, тем уже диапазон значения размера требуется обеспечить технологически. Функция годности может быть несимметрична, если значение оптимального размера смещено относительно центра допустимых значений. Несимметричная форма целесообразна, если требуется технологически обеспечить размеры, близкие к одному из допустимых значений.

Для классического допускового контроля можно представить функцию годности в виде, изображенном на рисунке 1г. В пределах допустимых значений [*ei*, *es*] детали имеют годность, равную единице, за пределами [*ei*, *es*] детали бракованные.

Один из видов предлагаемой функции годности показан на рисунке 1а. Данная функция характеризует использование технологического запаса точности, при котором диапазон размеров с годностью $K(x) = 1$ по сравнению с классическим допусковым контролем сужается от допустимых значений [*ei*, *es*] до желательных [*ki*, *ks*]. При этом значения размеров за пределами [*ki*, *ks*], но в пределах [*ei*, *es*], нежелательны, но допустимы, и имеют $0 < K(x) < 1$. За пределами диапазона [*ei*, *es*] функция годности $K(x) < 0$, это значит, что изготовление деталей с такими значениями размеров штрафуется. Более подробно построение функции годности в данном виде рассмотрено в [1].

Случай, когда диапазон желательных размеров [*ki*, *ks*] уменьшается до единственного оптимального значения $ko = ki = ks$, изображен на рисунках 1б и 1в. При этом только для размера $x = ko$ значение годности $K(x) = 1$, для остальных оно меньше. Следует заметить, что значение оптимального размера должно находиться внутри диапазона гранично допустимых значений $ei < ko < es$, в противном случае требования к функции годности размеров $K(x)$ не будут соблюдены.

Задаваясь диапазоном значений годности, можно определять соответствующий ему диапазон действительных размеров. Таким образом, можно делить детали на сорта. Собирая изделие из деталей определенного сорта, можно говорить, что изделие соответствует этому сорту [2].

Использование обобщенного подхода к построению функции годности, изложенное в [1], не всегда оправдано. Часто можно использовать более простые виды функций.

Использование линейной функции годности (рис. 1в) значительно упрощает математическую задачу расчета значения годности действительного размера. В этом случае значение годности размера определяется по формуле:

$$K(x) = \begin{cases} (x - ei)/(ko - ei), & x \le ko, \\ (x - es)/(ko - es), & x \ge ko. \end{cases} \qquad (1)$$

При заданном значении годности K можно определить соответствующие ему значения размеров:

$$x(K) = \begin{cases} ei + K\ (ko - ei), & x \le ko, \\ es + K\ (ko - es), & x \ge ko. \end{cases} \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) $ko \ne ei \ne es$.

Использование параболы в качестве функции годности дает кривую (рис. 1б), по внешнему виду похожую на нормированную кривую стоимости получения деталей с определенным диапазоном размеров. По этой причине, а также из-за математической простоты, парабола в качестве функции годности найдет широкое применение. Парабола симметрична, поэтому недостатком использования ее в качестве функции годности будет невозможность смещать значении оптимального размера относительно центра допустимых размеров, т.е. всегда $ko = (ei + es) / 2$. Значение годности действительного размера, по причине симметричности решения для левой и правой половин, можно записать одним уравнением:

$$K(x) = 1 - \left(\frac{2x - es - ei}{es - ei} \right)^2 . \qquad (3)$$

Значение двух размеров, соответствующие заданной годности K определяется по формуле:

$$x(K) = ko \pm \frac{es - ei}{2} \sqrt{1 - K} . \qquad (4)$$

3. Функция плотности распределения годности размеров

Функции плотности распределения размеров $f(x)$ деталей достаточно хорошо изучены [3]. В машиностроении размеры могут соответствовать закону нормального распределения, равной вероятности, равнобедренного треугольника, эксцентриситета, а также их композиция.

Если спроектировать функцию плотности распределения размеров $f(x)$ на функцию годности размеров $y = K(x)$, то получим функцию, которая характеризует плотность распределения вероятности получения размера с определенным значением годности. Будем именовать ее функцией плотности распределения годности размеров. Каждое из сочетаний функции годности размеров и функция плотности распределения размеров дает свой вид-функция плотности распределения годности размеров.

Эта функция может быть построена методом статистического моделирования [1]. Для практики имеет большое значение получение ее в аналитическом виде. В общем случае эта функция плотности получается как сумма произведений [4]:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} f(\Psi_i(K)) \left| \Psi_i'(K) \right| , \qquad (5)$$

где $\Psi_i(K)$ - обратные функции для данного y со столькими слагаемыми n, сколько значений (при данном y) имеет обратная функция.

Получим функцию плотности распределения годности размеров для случая, когда плотность распределения размеров подчиняется нормальному закону с среднеарифметическим значением размеров a и среднеквадратическим отклонением σ. В этом случае функция плотности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (6)$$

Замечательно, что для случая, когда функция плотности распределения размеров нормальна, а функция годности линейна (1), функция плотности распределения годности размеров также подчиняется закону нормального распределения:

$$g(y)=\frac{1}{\sigma_G\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_G)^2}{2\sigma_G{}^2}}, \qquad (7)$$

где

$$a_G=\begin{cases}(a-ei)/(ko-ei), & x\le ko,\\ (a-es)/(ko-es), & x\ge ko.\end{cases} \qquad (8)$$

$$\sigma_G=\begin{cases}\sigma/(ko-ei), & x\le ko,\\ \sigma/(ko-es), & x\ge ko.\end{cases} \qquad (9)$$

Таким образом, среднеарифметическое значение размеров a_G функции плотности распределения годности размеров равно значению годности в точке a (из сравнения (1) и (8)). Среднеквадратическое отклонение размеров σ_G функции плотности распределения годности размеров отличается от σ только на множитель (см. (9)).

Функция плотности распределения годности размеров для случая, когда функция плотности распределения размеров нормальна, а функция годности парабола (3), имеет вид:

$$g(y)=\frac{(es-ko)}{2\sigma\sqrt{2\pi(1-y)}}\left(e^{-\frac{(ko-(es-ko)\sqrt{1-y}-a)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(ko+(es-ko)\sqrt{1-y}-a)^2}{2\sigma^2}}\right), \qquad (10)$$

при (- $\infty < y \le 1$).

Если размеры деталей распределены равномерно в интервале (c, b), и функция плотности распределения имеет вид:

$$f(x)=1/(b-c), \qquad (11)$$

а функция годности парабола (3), то функция плотности распределения годности размеров имеет вид:

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{es-ko}{2\sqrt{1-y}\,(b-c)}, & m_2\le y\le m_1,\\ \dfrac{es-ko}{\sqrt{1-y}\,(b-c)}, & m_1\le y\le 1,\end{cases} \qquad (12)$$

где $m_1=1-\left(\dfrac{ko-a}{es-ko}\right)^2$, $m_1=1-\left(\dfrac{b-ko}{es-ko}\right)^2$. Формула (12) выведена при допущении, что $ei > c$ и $es < b$.

Если $ei = c$ и $es = b$, то $m_1 = m_2 = 0$ и функция плотности распределения годности (12) упрощается и имеет вид:

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{1-y}}, \quad 0\le y\le 1. \qquad (13)$$

В случае, когда размеры деталей распределены по закону равнобедренного треугольника, параметры которого совпадают с верхним и нижним допустимыми значениями $c = ei$, $b = es$, т. е. функция плотности распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le c, \\ 4(x-c)/(b-c)^2, & c < x \le (c+b)/2, \\ 4(b-x)/(b-c)^2, & (c+b)/2 < x < b, \\ 0, & x \ge b, \end{cases} \tag{14}$$

а функция годности парабола (3), то функция плотности распределения годности размеров имеет вид:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}} - 1, \quad 0 \le y < 1\,. \tag{15}$$

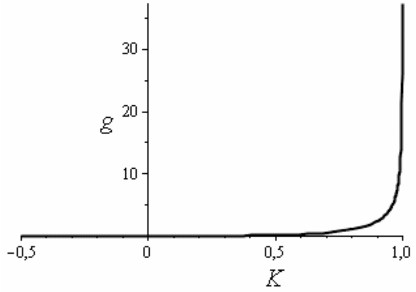
4. Примеры функции плотности распределения годности размеров

Проиллюстрируем функцию плотности распределение годности g на примере размера Ø90F8($^{+0,09}_{+0,036}$). Пусть значение оптимального размера совпадает с серединой поля допуска и равно 90,063 мм. В качестве функции годности размеров выбрана парабола (рис. 1 б), пересекающей ось абсцисс в границах поля допуска. Распределение размеров принято нормальным со среднеарифметическим значением a и среднеквадратическим отклонением σ. По оси абсцисс откладываются значения годности, по оси ординат – плотность распределения годности размеров.

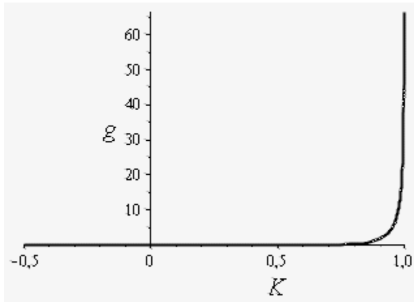
Рис. 2 а) иллюстрирует плотность распределения годности размеров для классического случая, когда центр кривой нормального распределения совпадает с оптимальным размером a = 90,063 мм, разброс размеров в пределах 6σ равен полю допуска, при этом среднеквадратическое отклонение σ = 0,009 мм. Количество деталей с размерами близкими к оптимальному максимально, по мере уменьшения годности количество деталей уменьшается, достигая нулевых значений на границах поля допуска. За пределами положительной годности деталей практически нет.

Рис. 2 б) иллюстрирует распределение годности для случая изготовления со значительным технологическим запасом точности. Исходные данные: центр кривой распределения размеров такой, как и для рисунка 3 а), среднеквадратическое отклонение уменьшено до σ = 0,005 мм. Таким образом, получаемые размеры сгруппированы около оптимального, а деталей с размерами, близкими к границам поля допуска, нет. Функция плотности распределения годности достигает нулевых значений при значениях годности 0,7.

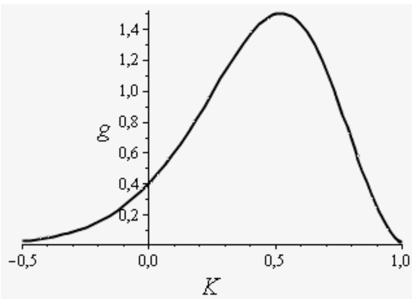
Рисунки 2 в) и 2 г) построены для исходных данных, характеризующих технологию, при которой имеются детали с отрицательной годностью, т.е. бракованные. На рисунке 2 в) центр кривой распределение размеров смещен относительно оптимального и равен a = 90,083 мм, при этом среднеквадратическое отклонение σ = 0,005 мм. Подобные параметры распределения размеров деталей характерны для случая неправильной настройки станка, а точность изготовления достаточна. Основная часть деталей имеют значения годности 0-0,8. Деталей с оптимальным размером практически нет, а в то же время значительная часть деталей имеет отрицательные значения годности, что свидетельствует о браке.



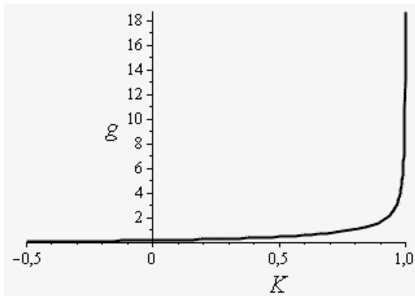
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. Примеры графиков плотности распределения годности размеров

На рисунке 2 г) центр кривой распределение размеров совпадает с оптимальным, но разброс размеров слишком велик, среднеквадратическое отклонение $\sigma = 0{,}012$ мм. Подобные параметры распределения размеров деталей характерны для случая недостаточной точности изготовления, при правильной настройке станка. Функция плотности распределения годности имеет максимум в области значений $g = 1$, но часть деталей имеют отрицательную годность.

Значение функции распределение годности размеров g в точке максимума отличается от полученных с помощью моделирования [1], причиной этому есть ограниченное число моделирующих значений, поэтому точка экстремума графика распределения годности меньше или больше.

Более точные аналитические методы, которые и рассмотрены в данной статье.

Выводы:

1. Предлагается система контроля, в которой действительные размеры имеют значение годности, непрерывно улучшающееся от $-\infty$ до 1 по мере приближения к оптимальному размеру.
2. Система контроля более общая, чем существующая стандартная система допусков, и включает ее в виде частного случая.
3. Для количественной оценки годности предложено семейство функций годности, подробно рассмотрены линейная и параболическая.
4. Задаваясь диапазоном значений годности, возможно разделять детали на сорта по критерию точности размеров.
5. Для оценки технологического процесса с точки зрения точности размеров предлагается функция плотности распределения годности размеров, которая представляет собой проекцию плотности распределения размера на функцию годности.
6. Выбран и проверен математический аппарат, позволяющий строить функцию плотности распределения годности размеров для случаев, когда функция годности представляет собой линейную или параболическую, а плотность распределения подчиняется одному из законов: нормальному, равномерному, равнобедренного треугольника.
7. Предложенные аналитические зависимости проиллюстрированы практическими примерами.

Список литературы: **1.** *Куприянов А.В.* Контроль оптимальности размеров / *А.В.Куприянов* // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – №24. – С. 9-15. **2.** *Куприянов А.В.* Расчет размерных цепей с гарантированным значением годности замыкающего звена / *А.В.Куприянов* // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – №25 . – С. 110-114. **3.** *Маталин А.А.* Технология машиностроения. Учебник для машиностроительных ВУЗов / *А.А.Маталин* – Л: Машиностроение, 1985. – 496 с. **4.** *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика / *В.С. Пугачев* – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. - 496с.

Поступила в редколлегию 24.09.10